

Ariel DZWONKOWSKI, Anna GOLIJANEK-JĘDRZEJCZYK, Leszek RAFIŃSKI
POLITECHNIKA GDAŃSKA, WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I AUTOMATYKI, KATEDRA METROLOGII I SYSTEMÓW INFORMACYJNYCH,
ul. G. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk

Szacowanie niepewności funkcji przetwarzania przetwornika LEM CT -5T metodą Monte Carlo

Dr inż. Ariel DZWONKOWSKI

Adiunkt w Katedrze Metrologii i Systemów Informatycznych Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej. Zainteresowania badawcze: systemy pomiarowe, diagnostyka łożysk silników indukcyjnych, projektowanie użytecznych interfejsów oraz szacowanie niepewności pomiarowych.



e-mail: a.dzwonkowski@ely.pg.gda.pl

Mgr inż. Leszek RAFIŃSKI

Asystent w Katedrze Metrologii i Systemów Informatycznych Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej. Zainteresowania badawcze: systemy wizyjne, pomiary biometryczne, systemy sztucznej inteligencji, systemy pomiarowo-kontrolne oraz projektowanie użytecznych interfejsów.



e-mail: l.rafiniski@ely.pg.gda.pl

Dr inż. Anna GOLIJANEK-JĘDRZEJCZYK

Adiunkt w Katedrze Metrologii i Systemów Informatycznych Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej. Zainteresowania badawcze: pomiary impedancji pętli, systemy pomiarowo-kontrolne, projektowanie użytecznych interfejsów oraz szacowanie niepewności pomiarowych.



e-mail: a.golijanek@ely.pg.gda.pl

Keywords: measurement uncertainty, the Monte Carlo method, measurement transducers.

1. Wstęp

Zgodnie z obowiązującymi od prawie 20 lat [1] wymaganiami, we współczesnej metrologii koniecznym jest prezentowanie wyniku pomiaru wraz z oszacowaną niepewnością rozszerzoną [1, 2, 3]. Stąd też we wszystkich dziedzinach nauki i techniki, takich jak: diagnostyka łożysk [4], pomiary wielkości elektrycznych [5] czy pomiary biomedyczne [6]; niezbędne jest szacowanie niepewności wyników pomiarów.

Z racji szerokiego wykorzystywania przetworników prądowych i napięciowych przez autorów w rozwiązywaniu różnych problemów pomiarowych, autorzy postanowili opracować metodologię szacowania niepewności tych przetworników.

W artykule zaprezentowano metodologię wyznaczenia niepewności przetwornika prądowego LEM CT -5T.

Przedstawiono dwa podejścia wyznaczania niepewności pomiaru: tradycyjne – metodą analityczną oraz symulację Monte Carlo – metodą numeryczną.

Metoda analityczna opiera się na operacji splotu rozkładów wejściowych za pomocą modelu matematycznego dla wielkości wejściowej. W tym przypadku miarą wyznaczonej niepewności jest niepewność rozszerzona obliczona jako iloczyn współczynnika rozszerzenia k i złożonej niepewności standardowej.

Metoda numeryczna polega na wyznaczaniu niepewności pomiaru na podstawie przedziału rozszerzenia, którego granice wyznaczają kwantyle rozkładu prawdopodobieństwa wielkości mierzonej. Parametrami tego rozkładu są: wartość oczekiwana – jako estymata wielkości wyjściowej, odchylenie standardowe oraz przedział ufności dla danego poziomu prawdopodobieństwa [7-8].

Streszczenie

W referacie zaprezentowano metodologię szacowania niepewności funkcji przetwarzania przetwornika prądowego, na przykładzie przetwornika LEM CT-5T, przy zastosowaniu metody opartej na Przewodniku GUM, z zastosowaniem prawa propagacji niepewności oraz metody numerycznej Monte Carlo. Przedstawiono szczegółową analizę doboru rozkładu wielkości wejściowej. W przypadku metody Monte Carlo dobór rozkładu wielkości wejściowych jest bardzo istotny, ponieważ zależny jest od niego wynik generacji próby. W artykule przeprowadzono także analizę porównawczą wyników oceny pomiaru metodą symulacji Monte Carlo oraz wyników uzyskanych metodą związaną z prawem propagacji niepewności.

Słowa kluczowe: niepewność pomiaru, metoda Monte Carlo, przetworniki pomiarowe.

Estimation of the LEM CT-5T transducer processing function uncertainty by the Monte Carlo method

Abstract

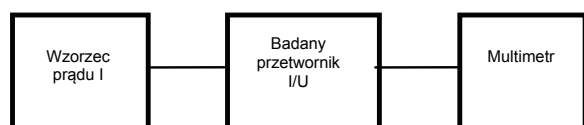
According to modern metrology requirements, prevailing for almost 20 years, it is necessary to present the result of a measurement with an estimated combined standard uncertainty [1, 2, 3]. Hence, it is necessary to estimate the measurement uncertainty in all fields of science and technology, such as for example bearings diagnosis [4], measurements of electrical quantities [5] or biomedical measurements [6]. Because of the extensive use of current and voltage transducers to solve various measurement problems, the authors decided to develop a methodology for estimating the uncertainty of such a transducer. The paper presents the methodology of calculating the uncertainty of the LEM current transducer CT-5T processing function. There are described two approaches for determination of the measurement uncertainty: the traditional, analytical method and the numerical Monte Carlo simulation method. The results obtained using both methods are convergent and allow for specification of the measurement uncertainty of current measurements with the CT-5T transducer, as well as verification of the estimated uncertainty of results calculated by the Monte Carlo method in the traditional approach. In the authors' opinion, the calculated measurement uncertainty of the analysed current-voltage transducer processing function, proves the validity of using this transducer for measurements of current with the maximum accuracy of 3%.

2. Badania przetworników LEM CT-5T

Przeprowadzone badania przetworników napięcie-prąd LEM CT-5T miały na celu oszacowanie niepewności pomiarów dokonywanych tymi urządzeniami.

Do oceny niepewności przetwornika prądowo-napięciowego wykorzystano system pomiarowy składający się z kalibratora FLUKE 5500A oraz multimetru Keithley 2002. Schemat blokowy układu pomiarowego do badania dokładności przetwornika napięciowego CT-5T przedstawiono na rys. 1.

Badania przetwornika prąd-napięcie typu CT-5T wykonane zostały dla 6 wartości częstotliwości: 50 Hz, 75 Hz, 120 Hz, 250 Hz, 500 Hz, 1000 Hz, dla każdej z nich przy 6 wartościach natężenia prądu: 250 mA, 500 mA, 1 A, 1,9 A, 2,5 A, 2,9 A. Pomiary przetwarzane były 50-krotnie.



Rys. 1. Schemat blokowy układu pomiarowego do badania dokładności przetwornika napięciowego CT-5T

Fig. 1. A block diagram of the measurement system for testing the CT-5T transducer accuracy

Wyniki tych analiz pozwalają sprecyzować, jakiej niepewności można się spodziewać, dokonując pomiaru prądu w określonych warunkach, przetwornikiem LEM CT-5T.

W artykule przedstawiono wyniki dla dwóch wartości prądu: 1 A i 2,5 A oraz dwóch częstotliwości: 50 Hz i 500 Hz.

3. Szacowanie niepewności funkcji przetwarzania przetwornika prądowego metodą propagacji niepewności

Napięcie na wyjściu przetwornika prąd-napięcie zależy od wartości natężenia prądu i oraz od przekładni przetwornika k_i .

Wartość prądu określa funkcja pomiaru, która jest podstawą szacunku niepewności pomiaru prądu [4]:

$$i = \frac{u_{wy}}{k_i}, \quad (1)$$

gdzie:

u_{wy} - napięcie na wyjściu przetwornika prąd-napięcie,
 k_i - przekładnia przetwornika prąd-napięcie,
 i - prąd na wejściu przetwornika prąd-napięcie.

Wariancję pomiaru prądu, przy założeniu braku korelacji między niepewnościami wielkości mierzonych, określa zależność [3]:

$$u^2(i) = \left(\frac{\partial i}{\partial k_i}\right)^2 u^2(k_i) + \left(\frac{\partial i}{\partial u_{wy}}\right)^2 u^2(u_{wy}), \quad (2)$$

gdzie:

$u^2(i)$ - wariancja pomiaru prądu,
 $u^2(u_{wy})$ - wariancja pomiaru napięcia multimetrem,
 $u^2(k_i)$ - wariancja estymacji przekładni przetwornika prąd-napięcie.

Zatem w celu określenia wariancji pomiaru prądu $u^2(i)$ należy uwzględnić wariancję pomiaru napięcia $u^2(u_{wy})$ oraz wyznaczyć wariancję estymacji przekładni przetwornika prądowo - napięciowego $u^2(k_i)$. W celu oszacowania wariancji $u^2(k_i)$ należy określić [7]:

- wariancję wartości prądu wyjściowego wzorca u^2_{ki} ,
- wariancję pomiaru napięcia, wynikającą z rozrzutu wyników mierzonych multimetrem u^2_{ri} ,
- wariancję wynikającą z błędu granicznego multimetru u^2_{mi} .

Wariancję wartości prądu wyjściowego wzorca u^2_{ki} oraz wariancję wynikającą z błędu granicznego multimetru u^2_{mi} wyznaczono jako wariancję typu B, na podstawie danych podanych przez producenta w specyfikacji multimetru i kalibratora, przyjmując prostokątny rozkład prawdopodobieństwa. Natomiast wariancję pomiaru napięcia $u^2(u_{ri})$ wyznaczono jako wariancję typu A, przyjmując normalny rozkład prawdopodobieństwa [1, 4, 9].

Przekładnię przetwornika prądowego k_i , zgodnie ze wzorem (1), określa zależność, będąca stosunkiem napięcia na zaciskach wyjściowych przetwornika do wartości natężenia prądu płynącego przez przetwornik [4].

Zatem wariancja estymacji przekładni przetwornika prąd-napięcie wynosi:

$$u^2(k_i) = c_u^2 u^2(\bar{u}_{wy}) + c_i^2 u^2(\bar{i}), \quad (3)$$

gdzie:

$u(\bar{u}_{wy})$ - wariancja wartości średniej napięcia, zmierzona multimetrem Keithley 2002,

$u(\bar{i})$ - wariancja wartości średniej prądu podawanego na wejście przetwornika.

Współczynniki wrażliwości określone zostały jako:

$$c_u = \frac{\partial k_i}{\partial u_{wy}} = \frac{1}{i}, \quad (4)$$

$$c_i = \frac{\partial k_i}{\partial i} = -\frac{k_i}{i}. \quad (5)$$

Wariancja wartości średniej napięcia na wyjściu przetwornika prąd-napięcie jest związana z niepewnością pomiarową multimetru Keithley 2002:

$$u^2(\bar{u}_{wy}) = u_{ri}^2 + u_{mi}^2, \quad (6)$$

gdzie:

u_{ri} - niepewność pomiaru wynikająca z rozrzutu wyników mierzonych multimetrem Keithley 2002,

u_{mi} - niepewność wynikająca z błędu granicznego multimetru Keithley 2002, podanego przez producenta w specyfikacji.

Do dalszych obliczeń przyjęto:

$$u^2(u_{wy}) = u^2(\bar{u}_{wy}). \quad (7)$$

W przeprowadzonych badaniach kalibrator Fluke 5500A generował sygnał wejściowy dla przetwornika. Wariancję wartości średniej prądu podawanego na wejście przetwornika $u^2(\bar{i})$ przedstawia zależność:

$$u^2(\bar{i}) = u_{ki}^2, \quad (8)$$

gdzie:

u_{ki} - niepewność wartości prądu wyjściowego kalibratora, podaną przez producenta sprzętu.

Badania przetwornika prąd-napięcie typu CT-5T wykonane zostały dla 6 wartości częstotliwości, dla każdej z nich przy 6 wartościach natężenia prądu. Pomiar powtarzany był 50-krotnie. Dla każdego wariantu obliczono składowe, zgodnie z zależnościami (3), (6), (7) i (8). Następnie na podstawie zależności (2), obliczono wariancję złożoną estymaty prądu $u^2(i)$.

Przykładowe wyniki obliczeń wariancji złożonej pomiaru prądu wykonano dla dwóch wartości częstotliwości: 50 Hz i 500 Hz oraz dwóch wartości natężenia prądu: 1 A i 2,5 A. Następnie, przy założonym poziomie ufności równym 95% i współczynnikiem rozszerzenia $k = 2$ oszacowano niepewność rozszerzoną U_i pomiaru prądu, korzystając z zależności [7, 8]:

$$U_i = k \cdot u(i). \quad (9)$$

Budżet niepewności estymaty prądu 1 A dla częstotliwości 50 Hz podano w tabeli 1.

Tab. 1. Budżet niepewności estymaty prądu dla częstotliwości 50 Hz i wartości natężenia prądu 1 A

Tab. 1. Uncertainty budget of the current estimate for frequency of 50 Hz and current value 1 A

Wielkość X_n	Estymata wielkości x_n	Wariancja standardowa $u^2(x_n)$	Rozkład prawdopodobieństwa	Współczynnik wrażliwości c_n	Udział w wariancji złożonej $u_n^2(y)$
u_{wy}	1,00 V	2,50E-7 V ²	normalny	1,00 A/V	2,50E-7 A ²
k_i	1 V/A	2,94E-7 V ² /A ²	normalny	1,00 A ² /V	2,94E-7 A ²
Niepewność standardowa $u(i)$					7,38E-4 A
Niepewność rozszerzona $U(i)$					1,48E-3 A

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń wynik pomiaru prądu o natężeniu 1 A dla częstotliwości 50 Hz, przy założonym poziomie ufności oraz współczynniku rozszerzenia, można zapisać jako: $I = (1,000 \pm 0,002)$ A.

Dokonano oszacowania budżetu niepewności estymaty prądu o natężeniu 2,5 A dla częstotliwości 50 Hz. Wyniki składowych niepewności dla tej częstotliwości zaprezentowano w tabeli 2.

Tab. 2. Budżet niepewności estymaty prądu dla częstotliwości 50 Hz i wartości natężenia prądu 2,5 A

Tab. 2. Uncertainty budget of the current estimate for frequency of 50 Hz and current value 2,5 A

Wielkość X_n	Estymata wielkości x_n	Wariancja standardowa $u^2(x_n)$	Rozkład prawdopodobieństwa	Współczynnik wrażliwości c_n	Udział w wariancji złożonej $u_n^2(y)$
u_{wy}	2,50 V	1,42E-4 V ²	normalny	1 A/V	1,42E-4 A ²
k_i	1 V/A	2,28E-5 V ² /A ²	normalny	2,5 A ² /V	1,43E-4 A ²
Niepewność standardowa $u(i)$					1,69E-2 A
Niepewność rozszerzona $U(i)$					3,38E-2 A

Wynik pomiaru prądu dla częstotliwości 50 Hz przy założonym poziomie ufności $p = 95\%$ oraz współczynniku rozszerzenia $k = 2$ można zapisać jako: $I = (2,50 \pm 0,03)$ A.

W tabeli 3 podano budżet niepewności estymaty prądu 1 A dla częstotliwości 500 Hz.

Tab. 3. Budżet niepewności estymaty prądu dla częstotliwości 500 Hz i wartości natężenia prądu 1 A

Tab. 3. Uncertainty budget of the current estimate for frequency of 500 Hz and current value 1 A

Wielkość X_n	Estymata wielkości x_n	Wariancja standardowa $u^2(x_n)$	Rozkład prawdopodobieństwa	Współczynnik wrażliwości c_n	Udział w wariancji złożonej $u_n^2(y)$
u_{wy}	1,00 V	4,00E-8 V ²	normalny	1,00 A/V	4,00E-8 A ²
k_i	1 V/A	8,41E-8 V ² /A ²	normalny	1,00 A ² /V	8,41E-8 A ²
Niepewność standardowa $u(i)$					3,52E-4 A
Niepewność rozszerzona $U(i)$					7,04E-4 A

Wynik pomiaru prądu przemiennego o natężeniu 1 A i częstotliwości 500 Hz, przy założonym poziomie ufności $p = 95\%$ oraz współczynniku rozszerzenia $k = 2$ jest następujący: $I = (1000,0 \pm 0,7)$ mA.

Zrealizowano także szacowanie analityczne budżetu niepewności estymaty prądu przemiennego o natężeniu 2,5 A dla częstotliwości 500 Hz. Wyniki składowych niepewności dla tej częstotliwości zaprezentowano w tabeli 4.

Tab. 4. Budżet niepewności estymaty prądu dla częstotliwości 500 Hz i wartości natężenia prądu 2,5 A

Tab. 4. Uncertainty budget of the current estimate for frequency of 500 Hz and current value 2,5 A

Wielkość X_n	Estymata wielkości x_n	Wariancja standardowa $u^2(x_n)$	Rozkład prawdopodobieństwa	Współczynnik wrażliwości c_n	Udział w wariancji złożonej $u_n^2(y)$
u_{wy}	2,50 V	8,60E-5 V ²	normalny	1 A/V	8,60E-5 A ²
k_i	1 V/A	1,38E-5 V ² /A ²	normalny	2,5 A ² /V	8,63E-5 A ²
Niepewność standardowa $u(i)$					1,31E-2 A
Niepewność rozszerzona $U(i)$					2,62E-2 A

Wynik pomiaru prądu dla o wartości 2,5 A i częstotliwości 500 Hz, przy poziomie ufności równym 95% oraz współczynniku rozszerzenia $k = 2$ można zapisać jako: $I = (2,50 \pm 0,03)$ A.

Porównując wartości oszacowanych niepewności rozszerzonych pomiaru prądu 1 A i 2,5 dla częstotliwości 50 Hz i 500 Hz można stwierdzić, iż niepewności te nie przekraczają 2% wartości mierzonego prądu.

4. Szacowanie niepewności funkcji przetwarzania przetwornika prądowego metodą Monte Carlo

W celu weryfikacji wyników szacowania niepewności, uzyskanych w poprzednim rozdziale, przeprowadzono szacowanie niepewności funkcji przetwarzania przetwornika LEM CT-5T metodą numeryczną, za pomocą symulacji Monte Carlo. Podejście takie bazuje na definicji przedziału rozszerzenia, którego granice są wyznaczone poprzez kwantyle rozkładu prawdopodobieństwa, związanego z wielkością mierzoną.

Szacowanie niepewności tą metodą polega na zastosowaniu niniejszej opisaną procedurę z wykorzystaniem generatora liczb losowych w programie Excel.

Przyjęto, że funkcja pomiaru przetwornika prądowego LEM CT-5T, zgodnie z zależnością (2), jest postaci:

$$i = \bar{i} + c_1 u(k_i) + c_2 u(u_{wy}), \quad (10)$$

gdzie współczynniki wrażliwości c_1 i c_2 opisują odpowiednio zależności:

$$c_1 = \frac{\partial i}{\partial k_i}, \quad (11)$$

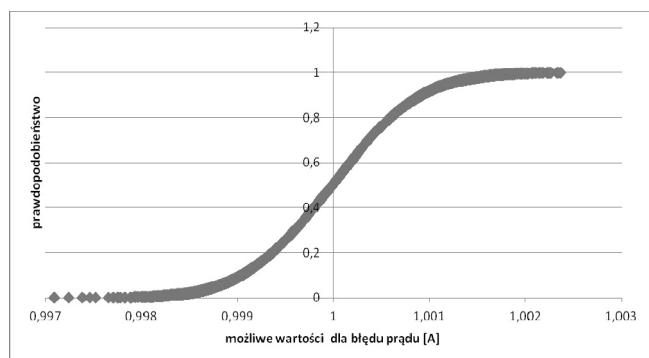
$$c_2 = \frac{\partial i}{\partial u_{wy}}. \quad (12)$$

Następnie założono, że rozkłady prawdopodobieństwa dla wielkości wejściowych: u_{wy} i k_i , są rozkładami normalnymi.

Szacowanie niepewności metodą Monte Carlo przeprowadzono w programie Microsoft Excel dla liczby próbek M równej 10^4 . Wyznaczono funkcję gęstości prawdopodobieństwa wielkości wyjściowej - prądu i , jej wartość oczekiwaną oraz przedział ufności dla poziomu ufności $p = 95\%$.

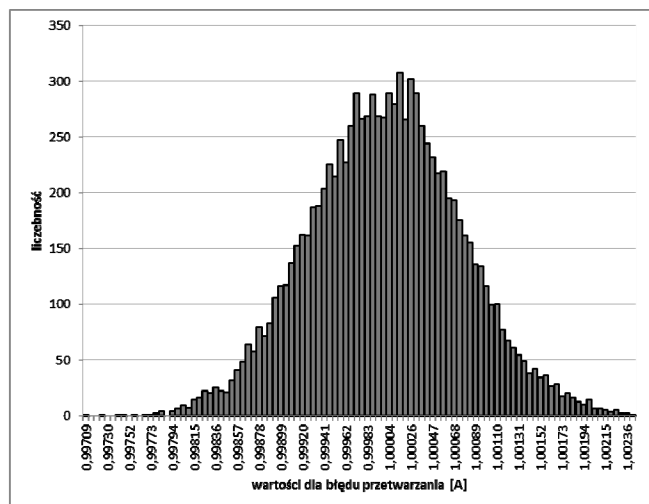
Obliczenia przeprowadzono dla następujących wartości wielkości wejściowych dla: wartości prądu 1 A i 2,5 A oraz częstotliwości f równej 50 Hz i 500 Hz.

Na podstawie uzyskanych wyników symulacji metodą Monte Carlo wykreślono także przebieg dystrybucji numerycznych. Na rys. 2 przedstawiono przykładową dystrybucję numeryczną zbioru możliwych wartości błęd pomiaru prądu dla u_{wy} równego 1,0 V oraz $k_i = 1$ V/A, przy częstotliwości 50 Hz.



Rys. 2. Dystrybuanta numeryczna dla danych: $u_{wy} = 1 \text{ V}$, $k_i = 1 \text{ V/A}$, $f = 50 \text{ Hz}$
 Fig. 2. The numeric distribution function for: $u_{wy} = 1 \text{ V}$, $k_i = 1 \text{ V/A}$, $f = 50 \text{ Hz}$

Na podstawie uzyskanych wyników wykreślono także histogramy. Przykładowy histogram dla u_{wy} równego 1,0 V oraz $k_i = 1 \text{ V/A}$ i częstotliwości 50 Hz zaprezentowano na rys. 3.



Rys. 3. Histogram dla danych: $u_{wy} = 1 \text{ V}$ oraz $k_i = 1 \text{ V/A}$, $f = 50 \text{ Hz}$
 Fig. 3. The histogram for: $u_{wy} = 1 \text{ V}$ oraz $k_i = 1 \text{ V/A}$, $f = 50 \text{ Hz}$

W tabeli 5 zestawiono uzyskane wyniki niepewności rozszerzonej $U(i)$ oszacowanej zarówno metodą tradycyjną - metodą propagacji niepewności oraz metodą Monte Carlo.

Tab. 5. Niepewność rozszerzona estymaty prądu dla częstotliwości 50 i 500 Hz i wartości natężenia prądu 1,0 A i 2,5 A
 Tab. 5. The combined standard uncertainty of the current estimate for frequency of 50 Hz and 500 Hz, and current values: 1,0 A and 2,5 A

Wielkość X_n		Wartości niepewności rozszerzonej $U(i)$		
$u_{wy} [\text{V}]$	$k_i [\text{V/A}]$	$f [\text{Hz}]$	prawa propagacji [A]	Monte Carlo [A]
1,00	1,00	50	1,48E-03	1,44E-03
		500	7,04E-04	6,89E-04
2,50	1,00	50	3,38E-02	3,29E-02
		500	2,62E-02	2,54E-02

Porównując wyniki oszacowanej rozszerzonej niepewności pomiarowej $U(i)$ (tabela 5) widać, że wyniki te różnią się między sobą, i że w każdym analizowanym przypadku wartość niepewności rozszerzonej wyznaczonej metodą tradycyjną jest większa niż wartość obliczona metodą symulacji Monte Carlo. Względna różnica między tymi wartościami wynosi maksymalnie 3,0% i zdaniem autorów błąd ten jest akceptowalny. W tabeli 6 zestawiono wartości estymat prądu dla częstotliwości 50 i 500 Hz, i wartości natężenia prądu 1,0 A i 2,5 A, uzyskanych zarówno

przy wykorzystaniu metody opartej o prawo propagacji niepewności jak i metodę Monte Carlo.

Tab. 6. Estymata prądu dla częstotliwości 50 i 500 Hz, i wartości natężenia prądu 1,0 A i 2,5 A
 Tab. 6. The current estimate for frequency of 50 Hz and 500 Hz, and current values: 1,0 A and 2,5 A

Estymata prądu i			
$i [\text{A}]$	$f [\text{Hz}]$	prawa propagacji [A]	Monte Carlo [A]
1,00	50	(10,00±0,02) 10⁻¹	(10,00±0,01) 10⁻¹
	500	(100,00±0,07) 10⁻²	(100,00±0,07) 10⁻²
2,50	50	(2,50±0,03)	(2,50±0,03)
	500	(2,50±0,03)	(2,50±0,03)

5. Podsumowanie

W artykule przedstawiono zagadnienie dotyczące szacowania niepewności funkcji przetwarzania przetwornika prąd-napięcie LEM CT-5T dwiema metodami: metodą opartą na Przewodniku GUM z zastosowaniem prawa propagacji niepewności oraz metodą numeryczną - Monte Carlo.

Wyniki uzyskanych analiz są zbieżne i pozwalają zarówno na: sprecyzowanie, jakiej niepewności pomiarowej można się spodziewać, dokonując pomiarów prądu przetwornikiem CT-5T, jak również na weryfikację wyników oszacowanych niepewności, uzyskanych w tradycyjnym podejściu metodą Monte Carlo.

Na podstawie otrzymanych wyników dla przetwornika prąd-napięcie LEM CT-5T można stwierdzić, iż dla 2,5 A i 500 Hz niepewność wynosi 1,2 % wartości mierzonej, a dla 1 A i 500 Hz - 0,07%.

Zdaniem autorów oszacowana niepewność funkcji przetwarzania dla analizowanego przetwornika prąd-napięcie dowodzi słuszności stosowania tego przetwornika do celów pomiaru prądu z dokładnością nie przekraczającą 3%.

6. Literatura

- [1] Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement - JCGM 100:2008, GUM 1995 with minor corrections, First edition September 2008.
- [2] Piotrowski J., Kostyrko K.: Wzorcowanie aparatury pomiarowej. Wydanie II zmienione i uaktualnione. PWN, Warszawa 2012.
- [3] Praca zbiorowa: Niepewność pomiarów w teorii i praktyce. Główny Urząd Miar, Warszawa 2011.
- [4] Dzwonkowski A., Swędrowski L.: Uncertainty analysis of measuring system for instantaneous power research. Metrology and Measurement Systems, Vol. XIX (2012), No. 3, pp. 573-582, Index 330930, ISSN 0860-8229.
- [5] Golijanek-Jędrzejczyk A.: Uncertainty estimation of loop impedance measurement determined by the vector method. PAK 11/2012, p.987-991. ISSN 0032-1440.
- [6] Rafiński L., Łuszczak M.: A measurement system for children endurance tests. Poznan University of Technology Academic Journals. Electrical Engineering. Computer Applications in Electrical Engineering 2012. - 2012, No. 72, s. 57-64. ISSN 1897-0737.
- [7] Fotowicz P.: Obliczanie niepewności pomiaru zgodne z definicją przedziału rozszerzenia na przykładzie opracowania wyniku wzorcowania mikrometru. PAR, 2010, nr 10/2012, s. 48—52.
- [8] Fotowicz P.: Nowe podejście w dziedzinie wyrażania niepewności pomiaru. PAR 7-8/2006 str. 34-37.
- [9] Evaluation of measurement data — An introduction to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents, JCGM 104:2009.