

# Zastosowanie algorytmu dopasowania do elipsy w pomiarach małych wartości składowej kątowej zespolonego stosunku napięć

**Streszczenie.** W artykule przeanalizowano zmodyfikowany algorytm dopasowania do elipsy (EFA), który umożliwia wyznaczenie skrajnie małych wartości składowej kątowej zespolonego stosunku napięć. Zastosowana modyfikacja polega na dwukrotnym zastosowaniu EFA dla sekwencji próbek przesuniętych o tę samą wartość kąta, ale o przeciwnych znakach. Wyniki symulacji numerycznych zostały zweryfikowane pomiarami przeprowadzonymi w systemie pomiarowym, zawierającym moduł akwizycji danych NI PXI-4461.

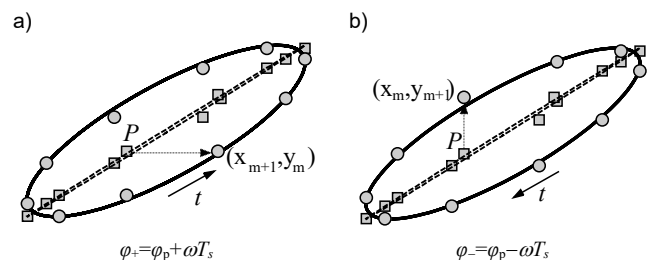
**Abstract.** The article analyzes a modified ellipse fitting algorithm (EFA), which enables determination of extremely small values of the angular component of the complex voltage ratio. The applied modification consists in applying the EFA twice for the sequence of samples shifted by the same angle value, but with opposite signs. The results of numerical simulations were verified by measurements carried out in a measuring system containing the NI PXI-4461 data acquisition module. (The application of the ellipse fitting algorithm in the measurements of small values of the angular component of the complex voltage ratio).

**Słowa kluczowe:** dopasowanie do elipsy, przesunięcie fazowe, zespolony stosunek napięć, algorytmy numeryczne.  
**Keywords:** ellipse fitting, phase shift, complex voltage ratio, numerical algorithms.

## Wstęp

Do wyznaczania składowych zespolonego stosunku napięć metodą próbkowania stosowane są różne algorytmy rekonstrukcji parametrów próbkowanych napięć sinusoidalnych. W zależności od zastosowanej techniki próbkowania, wykorzystuje się algorytmy oparte na dyskretnej transformacji Fouriera (DFT), dopasowaniu do sygnału sinusoidalnego (SFA) lub dopasowaniu do elipsy (EFA). W algorytmach DFT oraz SFA istotną jest informacja dotycząca chwili próbkowania kolejnych wartości przetwarzanych sygnałów - wystarczającą dokładność przetwarzania zapewnia synchronizacja próbkowania. Algorytm dopasowania do elipsy wykorzystuje równanie krzywej stożkowej. W tym przypadku istotne jest jednocześnie próbkowanie obu przetwarzanych napięć, natomiast znajomość czasu pobierania próbek nie jest wymagana. Ważnym z punktu widzenia pomiarów zespolonego stosunku napięć ograniczeniem tego algorytmu jest jego niestabilność dla wartości przesunięcia fazowego  $\varphi \cong \pm i\pi$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  pomiędzy próbkowanymi sygnałami. Warunek ten można sprowadzić do  $\varphi \cong 0$ , poprzez zmianę znaku jednego z przetwarzanych napięć. Obraz elipsy degeneruje się wtedy do odcinka. W analizowanych zastosowaniach, ze względu na możliwość bezpośredniego wyznaczenia parametrów estymowanej elipsy, stosowany jest najczęściej algorytm minimalizujący sumę algebraiczną kwadratów odległości punktów, których współrzędne kartezjańskie otrzymano metodą jednoczesnego próbkowania napięć, od poszukiwanej elipsy [1],[2],[3],[4]. W [4],[5] zaproponowano algorytmy poprawiające stabilność EFA dla  $\varphi \cong 0$ , jednak wymagają one informacji o wartości stosunku częstotliwości próbkowania do częstotliwości analizowanych sygnałów. W artykule przedstawiono algorytm, który pozwala na wyeliminowanie tego ograniczenia, w tym również dla skrajnie małych wartości przesunięcia fazowego. Zaproponowano zastosowanie metody dwukrotnego przesunięcia sekwencji próbek o tę samą wartość kąta, ale o przeciwnych znakach. Omawiana zasada pomiaru jest również przedstawiona w [6]. Przedstawione tam wyniki badań zostały uzupełnione o symulacje obejmujące serie 10 symulacji, co pozwoliło na oszacowanie odchylenia

standardowego błędu składowej kątowej. Przykład ilustrujący wpływ przesunięcia sekwencji próbek na kształt elipsy i położenie wybranego punktu  $P(x_m, y_m)$  przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Wpływ przesunięcia sekwencji próbek na kształt, położenie punktu i kierunek rotacji elipsy: a) przesunięcie elipsy o dodatni kąt fazowy:  $+\omega T_s$ , b) przesunięcie elipsy o ujemny kąt fazowy:  $-\omega T_s$ . Linia ciągła oznaczono elipsy dla wolnych od szumów przesuniętych sekwencji danych; kółkami zaznaczono punkty utworzone na podstawie przesuniętych sekwencji danych pomiarowych. Linia przerywana oznacza pierwotną elipsę dla  $\varphi \cong 0$ ; kwadratami zaznaczono punkty uzyskane na podstawie wyników pomiarów; ciągła strzałka wskazuje kierunki rotacji elips uzyskanych w wyniku przesunięcia sekwencji próbek

## Standardowy algorytm dopasowania do elipsy

Dla  $N$ -elementowych sekwencji próbkowanych napięć:

$$(1) \quad \begin{aligned} u_1(n) &= U_{m1}(\sin \omega n T_s) + U_{O1} \\ u_2(n) &= U_{m2} \sin(\omega n T_s + \varphi) + U_{O2} \end{aligned}$$

równanie krzywej stożkowej:

$$(2) \quad au_1^2(n) + bu_1(n)u_2(n) + cu_2^2(n) + du_1(n) + eu_2(n) + g = \varepsilon(n)$$

można zapisać w postaci macierzowej jako:

$$(3) \quad \mathbf{D}\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon},$$

gdzie:  $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $U_{m1}$ ,  $U_{m2}$  są amplitudami,  $U_{O1}$ ,  $U_{O2}$  - składowymi stałymi,  $\omega=2\pi f$  jest pulsacją,  $T_s$  - okresem próbkowania,  $\varphi$  - przesunięciem fazowym pomiędzy

próbkowanymi sygnałami sinusoidalnymi o częstotliwości  $f$ ,  $\mathbf{D}=[\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2]$  jest macierzą modelu (ang. *design matrix*) złożoną z elementów kwadratowych  $\mathbf{D}_1(n)=[u_1^2(n), u_1(n)u_2(n), u_2^2(n)]$  oraz liniowych  $\mathbf{D}_2(n)=[u_1(n), u_2(n), 1]$ ,  $\mathbf{a}=[a, b, c, d, e, g]^T$  jest wektorem parametrów, a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  wektorem błędów dopasowania.

Wyznaczenie wektora parametrów  $\mathbf{a}$ , zapewniającego najlepsze dopasowanie do elipsy (minimalizację sumy kwadratów błędów:  $\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ ), wymaga rozwiązania problemu uogólnionego wektora własnego [1]:

$$(4a) \quad \mathbf{S}\mathbf{a}=\lambda\mathbf{C}\mathbf{a},$$

z ograniczeniem rozwiązania do przypadku elipsy

$$(4b) \quad \mathbf{a}^T \mathbf{C}\mathbf{a}=1.$$

W równaniach (4)  $\mathbf{S}=\mathbf{D}^T \mathbf{D}$  jest macierzą rozproszenia,  $\mathbf{C}$  - macierzowym zapisem warunku ograniczenia postaci  $4ac-b^2=1$ , a  $\lambda$  - najmniejszą dodatnią wartością własną.

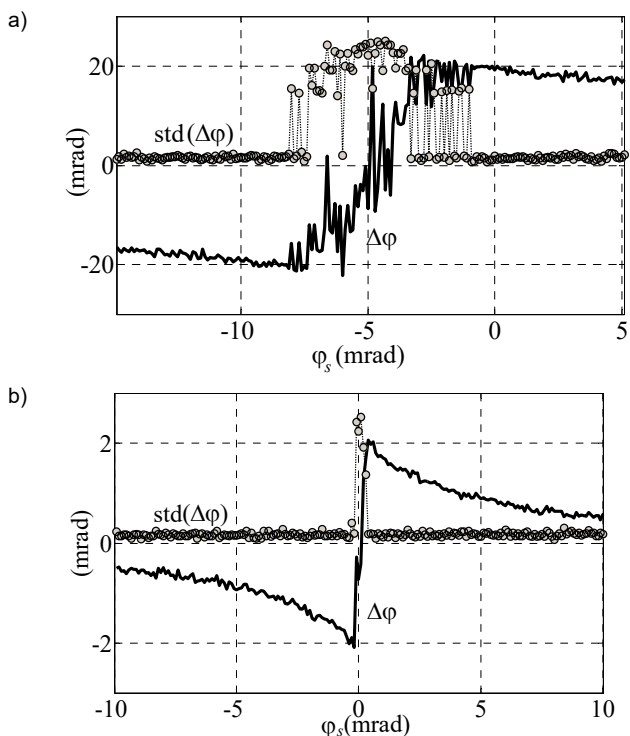
Dla stabilności rozwiązania układu (4) najistotniejsze znaczenie ma podmacierz  $\mathbf{S}_1=\mathbf{D}_1^T \mathbf{D}_1$  macierzy  $\mathbf{S}$ , zawierająca elementy związane ze współczynnikami równania (2), decydującymi o wartości składowej kątovej zespolonego stosunku napięć, definiowanego wzorem:

$$(5) \quad z = \frac{U_2}{U_1} = r e^{j\varphi}.$$

Po wyznaczeniu wektora parametrów elipsy składowe zespolonego stosunku napięć oblicza się ze wzorów:

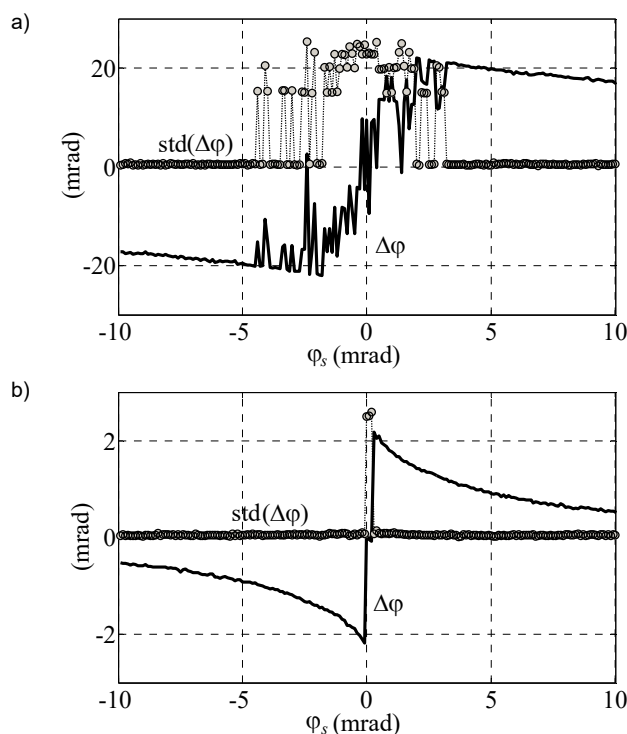
$$(6) \quad r = \frac{U_{m2}}{U_{m1}} = \sqrt{\frac{a}{c}}, \quad \varphi = k_r \arccos \frac{-\text{sign}(a)b}{2\sqrt{ac}}.$$

W (6) znak współczynnika  $k_r = \pm 1$ , zależny od kierunku rotacji elipsy, jest określany na podstawie pomocniczego algorytmu [2],[3].



Rys.2. Zależność bezwzględnego błędu wyznaczenia składowej kątovej  $\Delta\varphi$  zespolonego stosunku napięć w funkcji przyjętej do obliczeń wartości tego kąta (linia ciągła) oraz jego odchylenia standardowego  $\text{std}(\Delta\varphi)$  (szare kółka) dla stosunku częstotliwości  $f_s/f$  równych 10,05 oraz dla: a) SNR = 80 dB, b) SNR = 120 dB

W wyniku przeprowadzonych badań symulacyjnych wyznaczono zależność bezwzględnego błędu wyznaczenia składowej kątovej  $\Delta\varphi$  w funkcji przyjętej do obliczeń, zgodnie z modelem (1), wartości kąta  $\varphi_s$  z zakresu  $\langle -10, +10 \rangle$  mrad. Wyniki tych badań, otrzymanych jako wartość średnia z 10 symulacji, pokazano na rysunkach 2 i 3. Z wykresów tych wynika, że dla standardowego algorytmu dopasowania do elipsy wartość błędu estymacji składowej kątovej  $\Delta\varphi$  zespolonego stosunku napięć rośnie wraz ze zmniejszaniem się wartości tej składowej, przy czym wartości bezwzględne tego błędu są takie same dla  $|\varphi_s|$ . Dla  $\varphi_s \approx 0$  widoczna jest niestabilność tego algorytmu, którą potwierdza znaczny wzrost wartości odchylenia standardowego w obszarach wokół zerowej wartości kąta  $\varphi_s$ . Szerokość tego obszaru niestabilności zmniejsza się wraz ze wzrostem wartości SNR. Również wartości błędu estymacji  $\Delta\varphi$  zależą od wartości współczynnika SNR. Wzrost wartości SNR o 40 dB powoduje dziesięciokrotne zmniejszenie wartości tego błędu.



Rys.3. Zależność bezwzględnego błędu wyznaczenia składowej kątovej  $\Delta\varphi$  zespolonego stosunku napięć w funkcji przyjętej do obliczeń wartości tego kąta (linia ciągła) oraz jego odchylenia standardowego  $\text{std}(\Delta\varphi)$  (szare kółka) dla stosunku częstotliwości próbkowania do częstotliwości sygnałów sinusoidalnych  $f_s/f=100,50$  oraz dla: a) SNR = 80 dB, b) SNR = 120 dB

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch wybranych wartości  $f_s/f$  równych 10,05 i 100,50, oraz liczby próbek równych odpowiednio 200 i 2000. Zbadano również wpływ dwóch wartości stosunku sygnału do szumu (SNR) 80 dB oraz 120 dB na wartość tego błędu. Dodatkowo przedstawiono zależności odchylenia standardowego  $\text{std}(\Delta\varphi)$  od nastawionej wartości kąta  $\varphi_s$ .

### Zmodyfikowany algorytm dopasowania do elipsy

Jedną z możliwości zmiany przesunięcia fazowego pomiędzy zbiorami próbek mierzonych sygnałów jest ich podział na zestawy próbek o parzystych (p) i nieparzystych (n) indeksach [6]:

$$(7a) \quad \begin{aligned} u_1^p(m) &= U_{m1} \sin(\omega 2n T_s) + U_{O1} \\ u_2^p(m) &= U_{m2} \sin(\omega 2n T_s + \varphi) + U_{O2} \end{aligned}$$

$$(7b) \quad \begin{aligned} u_1^n(m) &= U_{m1} \sin \omega (2n+1) T_s + U_{O1} \\ u_2^n(m) &= U_{m2} \sin(\omega (2n+1) T_s + \varphi) + U_{O2} \end{aligned}$$

gdzie  $m=0,1,2,\dots,N/2-1$ .

Z otrzymanych podzbiorów próbek należy zestawić dwie grupy par:

$$(8) \quad \begin{aligned} P_1^I(m) &= (u_1^n(m), u_2^p(m)) \\ P_2^I(m) &= (u_1^p(m), u_2^n(m)) \end{aligned}$$

a następnie zastosować standardowy algorytm dopasowania do elipsy dla każdej z  $N/2$  - elementowych grup (8). Z (7) i (8) wynika, że powyższe pary tworzą elipsy charakteryzujące się przesunięciami fazowymi:

$$(9) \quad \begin{aligned} \varphi_1^I &= \varphi - \omega T_s \\ \varphi_2^I &= \varphi + \omega T_s \end{aligned}$$

Poszukiwana wartość kąta fazowego  $\varphi$  jest obliczana jako średnia arytmetyczna kątów (9).

Dla  $N=2^k$  przesunięcie fazowe elips można zwiększyć poprzez powtórzenie procedury podziału zestawów (7) na osiem podzbiorów, zawierających po  $N/8$  próbek i zestawienie ich w cztery grupy par:

$$(10) \quad \begin{aligned} P_1^{II}(s) &= (v_1^{n \rightarrow n}(s), v_2^{n \rightarrow p}(s)) \\ P_2^{II}(s) &= (v_1^{n \rightarrow p}(s), v_2^{n \rightarrow n}(s)) \\ P_3^{II}(s) &= (u_1^{p \rightarrow n}(s), u_2^{p \rightarrow p}(s)) \\ P_4^{II}(s) &= (u_1^{p \rightarrow p}(s), u_2^{p \rightarrow n}(s)) \end{aligned}$$

gdzie:  $s = 0,1,2,\dots, N/4-1$ .

Następnie z podzbiorów (10) należy utworzyć dwa  $N/2$  - elementowe zestawy par napięć

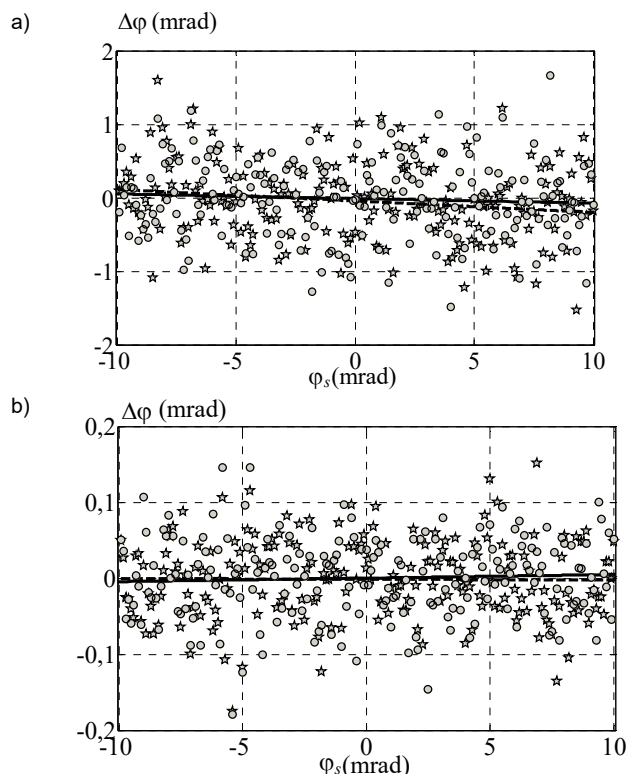
$$(11) \quad \begin{aligned} P_{1-4}^{II}(s) &= \begin{pmatrix} P_1^{II}(s) \\ P_4^{II}(s) \end{pmatrix} \\ P_{2-3}^{II}(s) &= \begin{pmatrix} P_2^{II}(s) \\ P_3^{II}(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dla których będą obliczane standardowym algorytmem dopasowania do elipsy wartości przesunięć fazowych:

$$(12) \quad \begin{aligned} \varphi_{1-4}^{II} &= \varphi - 2\omega T_s \\ \varphi_{2-3}^{II} &= \varphi + 2\omega T_s \end{aligned}$$

Poszukiwana wartość kąta fazowego  $\varphi$  jest obliczana jako średnia arytmetyczna kątów (12).

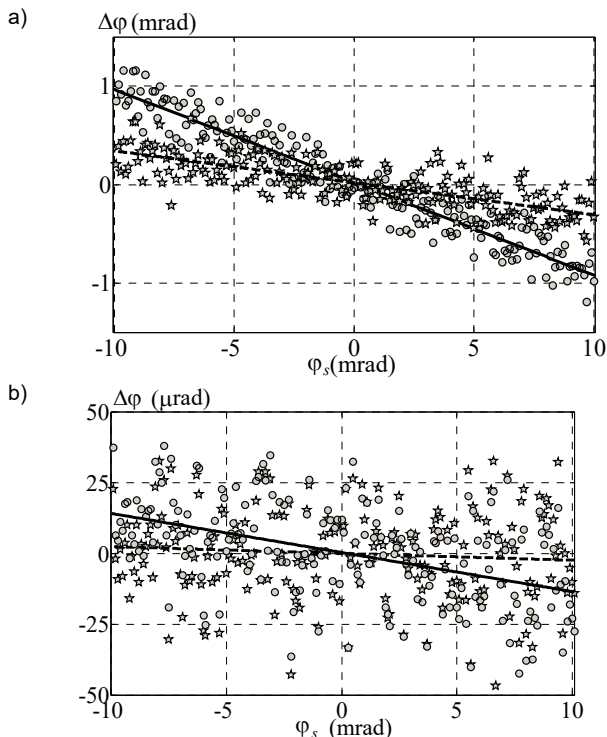
Wyniki badań symulacyjnych opisanych dwóch wersji zmodyfikowanych algorytmów dopasowania do elipsy, przeprowadzonych dla niezmiennych wartości parametrów, pokazano na rysunkach 4 i 5.



Rys.4. Zależność bezwzględnego błędu wyznaczenia składowej kątowej  $\Delta\varphi$  zespolonego stosunku napięć w funkcji przyjętej do obliczeń wartości tego kąta dla  $f_s/f = 10,05$  i zmodyfikowanych algorytmów dopasowania do elipsy: szarymi kółkami oznaczono wartości otrzymane na podstawie wzoru (9), a gwiazdkami - na podstawie wzoru (12). Linie otrzymano poprzez dopasowanie wartości obliczonych do prostej: linia ciągła - (9), linia przerywana - (12) dla: a) SNR=80 dB, b) SNR=120 dB

Zastosowanie proponowanych metod dwukrotnego przesunięcia sekwencji próbek o tę samą wartość kąta znacznie zmniejsza wartość błędu przesunięcia fazowego, również gdy  $|\varphi| \cong 0$ . Wyeliminowano widoczną na rysunkach 2 i 3 niestabilność standardowego algorytmu dopasowania do elipsy. Jednocześnie widoczny jest duży wpływ wartości współczynnika SNR na wartość tego błędu. Dla  $f_s/f = 10,05$ , zwiększenie SNR o 40 dB dziesięciokrotnie zmniejszyło wartość  $\Delta\varphi$ . Natomiast dla  $f_s/f = 100,50$  otrzymano w takim przypadku około 70-krotne zmniejszenie  $\Delta\varphi$ . Dla  $f_s/f = 100,50$  dwukrotne zwiększenie wartości kąta przesuwającego sekwencję próbek wpłynęło na dalsze istotne zmniejszenie wartości błędu przesunięcia fazowego. Dla  $f_s/f = 10,05$  wyniki są porównywalne, niezależnie od wartości zastosowanego przesunięcia sekwencji próbek.

Zaproponowane warianty metody przesunięć sekwencji próbek charakteryzują się złożonością obliczeniową zależną od liczby elementów niezbędnych do wyznaczenia macierzy rozproszenia  $S$ . W zmodyfikowanych algorytmach dopasowania do elipsy należy wprowadzić dwukrotnie wyznaczyć, zgodnie z (4), wektor parametrów  $\mathbf{a}$ , ale obliczenia są realizowane dla dwukrotnie mniejszej liczby próbek. Stąd złożoność obliczeniowa algorytmów zmodyfikowanych jest zbliżona do algorytmu standardowego.



Rys.5. Zależność bezwzględnego błędu wyznaczenia składowej kątovej  $\Delta\varphi$  zespolonego stosunku napięć w funkcji przyjętej do obliczeń wartości tego kąta dla  $f_s/f=100,50$  i zmodyfikowanych algorytmów dopasowania do elipsy: szarymi kółkami oznaczono wartości otrzymane na podstawie wzoru (9), a gwiazdkami - na podstawie wzoru (12). Linie otrzymano poprzez dopasowanie wartości obliczonych do prostej: linia ciągła - (9), linia przerywana - (12) dla a) SNR = 80 dB, b) SNR = 120 dB

### Wyniki pomiarów

Eksperymentalną weryfikację zmodyfikowanych algorytmów dopasowania do elipsy (mEFA) przeprowadzono z wykorzystaniem modułowego systemu PXI, opisanego szczegółowo w [4],[7]. System wykorzystano do pomiaru różnicy przesunięć fazowych wprowadzanych przez dwa 24-bitowe tory przetwarzania analogowo-cyfrowego, zawarte w module NI PXI-4461. Pomiar polegał na wyznaczeniu składowej kątovej zespolonego stosunku napięć wyjściowych tych torów, które były zasilane tym samym sygnałem sinusoidalnym o częstotliwości  $f=1$  kHz i amplitudzie 0,7 V. Wyniki, otrzymane jako średnia z serii 10 pomiarów, porównano z obliczonymi za pomocą 7-parametrowego algorytmu dopasowania do sinusa (SFA7p) [2]. Pomiary, zrealizowane dla częstotliwości próbkowania i liczby próbek identycznych z przyjętymi do obliczeń symulacyjnych, zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Pomiary składowej kątovej zespolonego stosunku napięć

Częstotliwość próbkowania	SFA7p		mEFA I ( $\omega T_s$ )		mEFA II ( $2\omega T_s$ )	
	$\varphi$ (μrad)	std( $\varphi$ ) (μrad)	$\varphi$ (μrad)	std( $\varphi$ ) (μrad)	$\varphi$ (μrad)	std( $\varphi$ ) (μrad)
10,050 kHz	1,84	0,12	1,84	0,19	1,81	0,18
100,50 kHz	1,56	0,08	1,60	0,09	1,60	0,10

Standardowy algorytm dopasowania do elipsy dla tak małych wartości kąta przesunięcia fazowego pomiędzy porównywanymi napięciami nie działa poprawnie. Porównanie wyników pomiarów przesunięcia fazowego referencyjnego algorytmu SFA7p ze zmodyfikowanymi

algorytmami dopasowywania do elipsy wykazuje dużą zbieżność obliczonych wartości, niezależnie od wartości częstotliwości próbkowania. Niepewność wyznaczenia wartości tego przesunięcia, szacowana za pomocą wyznaczonego odchylenia standardowego, jest porównywalna dla wszystkich algorytmów. Dziesięciokrotne zwiększenie częstotliwości próbkowania spowodowało dwukrotne zmniejszenie odchylenia standardowego wyników otrzymanych zmodyfikowanymi algorytmami dopasowania do elipsy, niezależnie od wartości zastosowanego przesunięcia sekwencji próbek.

### Podsumowanie

Porównanie wyników badań symulacyjnych i pomiarów wykonanych w systemie pomiarowym potwierdziło skuteczność proponowanych modyfikacji algorytmu dopasowania do elipsy. Nawet dla skrajnie małych wartości przesunięcia fazowego rzędu  $10^{-6}$  rad, otrzymane wartości składowej kątovej  $\varphi$  zespolonego stosunku napięć były porównywalne z obliczonym algorytmem SF7p. W takich warunkach standardowy EFA nie może być wykorzystany ze względu na niestabilne działanie wynikające ze złego uwarunkowania macierzy rozproszenia S.

Część eksperymentalna pracy została sfinansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki (Projekt o nr. 2020/37/B/ST7/00057)

**Autorzy:** dr hab. inż. Jerzy Augustyn, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Informatyki, Elektroniki i Elektrotechniki, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, 25-314 Kielce, E-mail: [j.augustyn@tu.kielce.pl](mailto:j.augustyn@tu.kielce.pl); prof. dr hab. inż. Marian Kampik, Politechnika Śląska, Katedra Metrologii, Elektroniki i Automatyki, ul. Akademicka 10, 44-100 Gliwice, E-mail: [marian.kampik@polsl.pl](mailto:marian.kampik@polsl.pl); dr inż. Krzysztof Musioł, Politechnika Śląska, Katedra Metrologii, Elektroniki i Automatyki, ul. Akademicka 10, 44-100 Gliwice, E-mail: [krzysztof.musiol@polsl.pl](mailto:krzysztof.musiol@polsl.pl).

### LITERATURA

- [1] Halíř R., Flusser J., Numerically stable direct least squares fitting of ellipses, *Proc. WSCG' 98*, University of West Bohemia, Campus Bory, Czech Republic, Feb. 1998, 125-132
- [2] Ramos M., Janeiro F. M., Radil T., Comparison of impedance measurements in a DSP using ellipse-fit and seven-parameter sine-fit algorithms, *Measurement*, 42 (2009), No. 9, 1370-1379, doi: 10.1016/j.measurement.2009.05.005
- [3] Janeiro F. M., Ramos P. M., Tlemcani M., Serra A. C., Recent development on impedance measurements with DSP-based ellipse fitting algorithms, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 58 (2009), No. 5, 1680-1689, doi: 10.1109/TIM.2009.2014512
- [4] Augustyn J., Kampik M., Application of Ellipse Fitting Algorithm in Incoherent Sampling Measurements of Complex Ratio of AC Voltages, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 66 (2017), No. 6, 1117-1123, doi: 10.1109/TIM.2017.2662298
- [5] Awan Z. A., Ramos P. M., Improvement of phase difference estimation using modified ellipse fit method, *Proc. I2MTC 2010*, May 2010, 78-81
- [6] Augustyn J., Kampik M., Musioł K., On determination of the complex voltage ratio using the ellipse-fitting algorithm in the case of an ill-conditioned scattering matrix, *Measurement*, 216 (2023), No. 112935, doi.org/10.1016/j.measurement.2023.112935.
- [7] Augustyn J., Kampik M., Musioł K., Investigation of Selected Reconstruction Algorithms Used for Determination of Complex Ratio of AC Voltages, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 70 (2021), No. 1503209, 1-9, doi: 10.1109/TIM.2021.3071233