

Wpłynęło 14.08.2012 r.  
Zrecenzowano 28.11.2012 r.  
Zaakceptowano 23.01.2013 r.

A – koncepcja  
B – zestawienie danych  
C – analizy statystyczne  
D – interpretacja wyników  
E – przygotowanie maszynopisu  
F – przegląd literatury

# **POMIAR OBJĘTOŚCI PRZEPLYWU WODY I MASY SUBSTANCJI W NIEJ ZAWARTEJ I JEGO NIEPEWNOŚĆ NA PRZYKŁADZIE STAWÓW RYBNYCH**

**Edmund KACA** <sup>ABCDEF</sup>

Instytut Technologiczno-Przyrodniczy w Falentach

## **Streszczenie**

Przedstawiono metody obliczania objętości przepływającej wody i masy substancji w niej zawartej na podstawie pomiarów objętościowego natężenia przepływu i wyników laboratoryjnych analiz stężeń. Zaproponowano wykonywanie tych obliczeń metodą prostokątów i – szczególnie wygodną, chociaż mniej dokładną – metodą trapezów. Błąd obliczeń tymi metodami jest wprost proporcjonalny do kwadratu okresu próbkowania. Dokładność obliczeń można poprawić, postępując zgodnie z zaproponowanym algorytmem.

Zwrócono uwagę na konieczność charakteryzowania wyników obliczeń ich niepewnością, czyli przedziałem wartości, w jakim – z określonym prawdopodobieństwem, np. 95% – znajduje się wartość dokładna. W przypadku pomiarów objętości wody lub masy substancji w niej zawartych na podstawie co najmniej 15 pomiarów cząstkowych (pomiar objętościowego natężenia przepływu, a w przypadku obliczeń masy – dodatkowo stężenia substancji w wodzie) podstawą obliczeń niepewności mogą być odpowiednio: systematyczne niepewności standardowe pomiaru objętościowego natężenia przepływu i dodatkowo – systematyczne niepewności standardowe oznaczeń stężenia substancji w wodzie. W przypadku obliczeń objętości wody lub masy zawartej w niej substancji na podstawie mniejszej liczby pomiarów cząstkowych, podstawą obliczeń niepewności powinny być nie tylko systematyczne, lecz również przypadkowe niepewności standardowe pomiaru objętościowego natężenia przepływu i analiz stężeń substancji w wodzie.

Stężenie substancji w wodzie i niepewność wyniku jego pomiaru powinny być określone przez chemiczne laboratoria akredytowane, które oprócz całkowitej niepewności wyniku analizy, powinny podawać jej składowe – niepewność przypadkową i systematyczną.

W pracy podano przykłady obliczeń, w których wykorzystano pomiary prowadzone na jednym ze stawów w kompleksie Stawów Raszyńskich w Zakładzie Doświadczalnym Instytutu Technologiczno-Przyrodniczego.

---

**Do cytowania For citation:** Kaca E. 2013. Pomiar objętości przepływu wody i masy substancji w niej zawartej i jego niepewność na przykładzie stawów rybnych. Woda-Środowisko-Obszary Wiejskie. T. 13. Z. 1(41) s. 31–57.

**Słowa kluczowe:** masa przepływu, masowe natężenie przepływu, metody obliczeń, niepewność pomiaru, objętościowe natężenie przepływu, objętość przepływu

## WSTĘP

Podstawą wielu ocen i decyzji dotyczących gospodarki wodnej w rolnictwie, w tym gospodarki wodnostawowej, są bilanse wodne i związane z nimi bilanse masy różnego rodzaju substancji rozproszonych czy rozpuszczonych w płynącej wodzie. Składniki tych bilansów traktuje się jak zmienne zdeterminowane, tj. przypisuje się im konkretne wartości, uznając je za pewne. Wiadomo jednak, że takie podejście jest uproszczeniem. Składniki te to zmienne losowe, charakteryzujące się określonymi rozkładami statystycznymi i operacje na tych zmiennych powinny prowadzić do wyników, które również będą zmiennymi o określonych rozkładach. Powinno to być (a nie jest) zauważone w nauce i praktyce, z korzyścią dla trafności wypracowywanych ocen i podejmowanych decyzji.

W związku z tym, że wartości składników w bilansach są wynikiem pomiarów, do ich analizy można wykorzystać teorię niepewności oraz zasady obliczeń na liczbach przybliżonych. Można wtedy uzyskać nie tylko wartość uznaną za najlepsze przybliżenie wartości prawdziwej, ale również przedział liczbowy, w którym – z określoną, dostatecznie dużą ufnością (prawdopodobieństwem) – znajduje się wartość prawdziwa.

## ZAKRES I CEL PRACY

Celem pracy było wskazanie możliwości wykorzystania metod numerycznych, teorii niepewności i obliczeń na liczbach przybliżonych do pośredniego pomiaru objętości przepływu wody i masy substancji w niej zawartej oraz do wyznaczenia niepewności tych pomiarów.

Omówiono problematykę obliczania natężenia przepływu wody i masy zawartej w niej substancji oraz zagadnienie obliczania niepewności tych wartości, wyrażających granice zmienności wyników takich obliczeń. Opisaną metodę można uogólnić na zagadnienia bilansowania objętości wody i masy substancji, w których operuje się wartościami pochodzącymi z obliczeń (pomiarów pośrednich) z użyciem różnego rodzaju zależności (funkcji pomiaru). Zarówno wynik sumowania (bilans), jak i jego składniki są obarczone niepewnościami o różnym charakterze. Przykładem takiego uogólnienia może być obliczanie zapotrzebowania na wodę w stawie w określonym czasie, na podstawie pomierzonego dopływu do stawu i odpływu z niego wody lub obliczanie ilości różnych substancji retencjonowanych w wodzie stawowej.

## METODY I MATERIAŁ

Obliczenia objętości przepływającej wody i masy substancji w niej zawartych oraz niepewności wyników tych obliczeń wykonano stosując numeryczne metody przybliżonego obliczania całek oznaczonych, teorię niepewności oraz zasady obliczeń na liczbach przybliżonych.

Na tej podstawie wyprowadzono stosowne zależności, a następnie – na przykładach – pokazano ich zastosowanie. W przykładach użyto wyników pomiarów (z 2009 r.) natężenia dopływu wody do stawu nr 9 w kompleksie Stawów Raszyńskich eksploatowanych przez Zakład Doświadczalny Instytutu Technologiczno-Przyrodniczego w Falentach i stężenia azotu azotanowego w niej zawartego. Do pomiaru natężenia przepływu używano przelewu trójkątnego, pracującego jako niezatopiony, osadzonego w prowadnicach na mnichu wpustowym.

## PRZEGLĄD WIEDZY

### POMIAR NATĘŻENIA PRZEPŁYWU

Objętościowe natężenie przepływu wody można mierzyć na progach, przelewach, w korytach i w otworach przepływomierzach [BOS (red.) 1978; KACA 1996; DĄBKOWSKI i in. 1997]. Są to zazwyczaj pomiary pośrednie (złożone), czyli takie, w których najlepsze przybliżenie wartości mierzonej wielkości  $Y$  oblicza się wg funkcji pomiarowej  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , na podstawie wyników  $x_1, x_2, \dots, x_k$  bezpośrednich pomiarów wielkości  $X_1, X_2, \dots, X_k$ . Każdy z wyników  $x_1, x_2, \dots, x_k$  uzyskuje się przez pomiar bezpośredni (prosty), czyli przez czynności, w wyniku których narzędzie pomiarowe wskazuje wartość mierzonej wielkości.

Przykładem takiej zgeneralizowanej funkcji jest zależność na objętościowe natężenie przepływu wody [BOS (red.) 1978]:

$$Q_V = w \mu f \sqrt{g} \beta H^u \quad (1)$$

gdzie:

$w$  i  $u$  – stałe liczbowe,

$\mu$  – współczynnik wydatku przepływomierza,

$f$  – współczynnik redukcji przepływu (gdy przepływ niezatopiony  $f = 1$  i jest stałą liczbową),

$g$  – przyspieszenie ziemskie,

$\beta$  – wyrażenie charakteryzujące wymiary przepływomierza,

$H$  – wysokość warstwy wody na przepływomierzu lub – gdy przepływ podtopiony – różnica poziomów wody na przepływomierzu i poniżej.

Stałe liczbowe  $w$  i  $u$  w zależności (1) nie są obciążone niepewnością, zaś pomiary wielkości  $\mu$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $\beta$ ,  $H$  są nią obciążone. Niepewność wartości  $g$  jest mała w stosunku do niepewności wartości pozostałych wielkości, a przez to jest pomijana w obliczeniach.

Masowe natężenie przepływu  $Q_M$  (wymiar np.  $\text{g}\cdot\text{s}^{-1}$ ) substancji w wodzie, nazywane ładunkiem jednostkowym substancji, określa się ze znanej zależności, mnożąc objętościowe natężenie przepływu  $Q_V$  ( $\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ ) przez stężenie  $C$  ( $\text{g}\cdot\text{m}^{-3}$ ) substancji w wodzie:

$$Q_M = C Q_V \quad (2)$$

### PRZYBLIŻONE ROZWIĄZYWANIE CAŁEK OZNACZONYCH

Do obliczeń objętości  $V$  przepływu wody i masy  $M$  substancji w niej zawartej wykorzystano dwie metody numerycznego rozwiązywania całek oznaczonych – metodę prostokątów i metodę trapezów [DZIUBIŃSKI, ŚWIĄTKOWSKI (red.) 1980]. Przyjęto, że funkcja podcałkowa jest funkcją czasu  $x(t)$ , obrazującą np. zmiany objętościowego lub masowego natężenia przepływu w czasie.

#### Metoda prostokątów

Całka funkcji  $x(t)$  ciągłej w przedziale  $\langle t_0, t_n \rangle$  może być w przybliżeniu oszacowana w następujący sposób

$$Y = \int_{t_0}^{t_n} x(t) dt \approx Y_P = \frac{t_n - t_0}{n} (y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \dots + y_{n-\frac{1}{2}}) \quad (3)$$

gdzie:

$Y$  – objętość przepływu wody lub masa substancji przepływającej w czasie  $\langle t_0, t_n \rangle$ ,

$Y_P$  – wartość  $Y$  oszacowana metodą prostokątów.

$$y_{k+\frac{1}{2}} = y\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right), \quad t_k = t_0 + \frac{t_n - t_0}{n} k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Prawa strona wzoru (3) jest sumą pól prostokątów o podstawach  $(t_n - t_0)/n$  i wysokościach równych  $y_{k+\frac{1}{2}}$ .

#### Metoda trapezów

Gdy zastąpi się funkcję  $x(t)$  funkcją  $x^*(t)$  ciągłą, przedziałami liniową, która dla każdego  $t_k = t_0 + \frac{t_n - t_0}{n} k$  ma wartość  $x^*(t_k) = x(t_k)$ , wtedy otrzyma się przybliżenie

$$Y = \int_{t_0}^{t_n} x(t) dt \approx Y_T = \frac{t_n - t_0}{n} \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) \quad (4)$$

gdzie:

$Y$  – objętość przepływu wody lub masa substancji przepływającej w czasie  $\langle t_0, t_n \rangle$ ,

$Y_T$  – wartość  $Y$  oszacowana metodą trapezów.

Jeżeli funkcja  $x(t)$  ma ciągle pochodne  $x(t)'$  i  $x(t)''$  w przedziale  $\langle t_0, t_n \rangle$  to błąd przybliżenia wynosi: w metodzie prostokątów  $-\frac{(t_n-t_0)^3}{24n^2}x(\xi)''$ , zaś w metodzie trapezów  $-\frac{(t_n-t_0)^3}{12n^2}x(\xi)''$ , gdzie  $\xi \in \langle t_0, t_n \rangle$  [BJÖRCK, DAHLQUIST 1987; DZIUBIŃSKI, ŚWIĄTKOWSKI (red.) 1980]. Z porównania tych wzorów wynika, że dwukrotnie dokładniejsza jest metoda prostokątów.

Obliczanie objętościowego i masowego natężenia przepływu metodą trapezów jest związane z wyborem między stałym a zmiennym okresem próbkowania  $\Delta t$ , czyli czasem między dwoma kolejnymi pomiarami. Problem taki nie istnieje w przypadku stosowania metody prostokątów, w której wymagany jest stały okres próbkowania  $\Delta t = (t_n - t_0)/n$ . Jest to jej wadą. Jeżeli decydujemy się na stały okres, powstaje kwestia jego długości, ponieważ od tego zależy dokładność obliczeń.

Błąd upraszczania (obcięcia, dyskretyzacji), zarówno w metodzie prostokątów ( $Y_P - Y$ ), jak i trapezów ( $Y_T - Y$ ) zmienia się w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu liczby pomiarów  $n$ , czyli wprost proporcjonalnie do kwadratu długości okresu  $\Delta t$  [BJÖRCK, DAHLQUIST 1987]. Im okres jest krótszy, tym mniejszy błąd obcięcia. Na tej podstawie można wyprowadzić wzór na poprawioną wartość  $Y_T$  obliczoną metodą trapezów:

$$Y \approx Y_T = Y_T(\Delta t) + \frac{1}{3}[Y_T(\Delta t) - Y_T(2\Delta t)] \quad (5)$$

w którym:  $Y_T(\Delta t)$  i  $Y_T(2\Delta t)$  oznaczają przybliżone wartości  $Y_T$  całki, obliczone metodą trapezów, gdy okres próbkowania wynosi odpowiednio  $\Delta t$  i  $2\Delta t$ . Oznacza to, że można otrzymać znacznie lepsze przybliżenie wartości  $Y$  przez dodanie do wartości  $Y_T(\Delta t)$  poprawki  $\frac{1}{3}[Y_T(\Delta t) - Y_T(2\Delta t)]$ . Identyczną poprawkę można wyprowadzić również w przypadku metody prostokątów. Wtedy we wzorze (5) w miejsce symbolu  $Y_T$  wstawia się symbol  $Y_P$ .

### NIEPEWNOŚĆ POMIARÓW

Z każdym pomiarem, którego wynik oznaczono symbolem  $x$ , jest związana niepewność, spowodowana świadomością obserwatora (użytkownika wyniku pomiaru), że wyniki takich, wielokrotnie przeprowadzonych pomiarów będą się różniły między sobą – będą się charakteryzowały rozrzutem. Rozrzut ten, a więc niepewność, można charakteryzować za pomocą **standardowej niepewności pomiaru**  $u(x)$  (ang. standard uncertainty) oraz – obliczanej na jej podstawie – **rozszerzo-**

**nej niepewności pomiaru**  $U(x)$  (ang. expanded uncertainty), będącej iloczynem niepewności standardowej i współczynnika rozszerzenia  $k$ :  $U(x) = k u(x)$ . Niepewności te można przedstawiać w jednostkach mierzonej wielkości, w procentach lub w jednostkach niemianowanych w odniesieniu do wartości wielkości mierzonej (w przypadku wielokrotnych pomiarów – do jej wartości średniej). W pierwszym przypadku jest to **niepewność bezwzględna**, w drugim i w trzecim zaś – **niepewność względna**. Na przykład niepewność standardowa względna  $u'(x)$  jest ilorazem niepewności standardowej bezwzględnej  $u(x)$  przez wartość wielkości mierzonej  $x$ , tzn.  $u'(x) = u(x)/x$ .

Wynik pomiaru  $x$  (najczęściej wartość średnia) i jego bezwzględna niepewność rozszerzona  $U(x)$  wyznaczają przedział ( $x \pm U(x)$ ), w którym z określoną ufnością  $\alpha$  (najczęściej  $\alpha = 95\%$ ) znajduje się rzeczywista wartość mierzonej wielkości. Oczywiście pomiar jest tym bardziej wiarygodny i użyteczny im rozstęp przedziału liczbowego  $2U(x)$  jest mniejszy. Zagadnienia związane z obliczaniem niepewności pomiarów syntetycznie omówiono m. in. w pracy autora [KACA 2011], a szczegółowo – w obszernej pracy ARENDARSKIEGO [2006].

Całkowita niepewność pomiaru (rozrzut)  $u_C(x)$  składa się z niepewności przypadkowej  $u_R(x)$  i systematycznej  $u_S(x)$ . Pierwsza jest wywołana błędami przypadkowymi. Są to błędy, wynikające z różnych, trudnych do zidentyfikowania źródeł, a przez to nieprzewidywalne co do wartości bezwzględnej i znaku. Drugą wywołują błędy systematyczne, tj. takie których wartość i znak nie zmieniają się lub zmieniają się wraz ze zmianą warunków według określonego prawa. Niepewność przypadkową można zmniejszyć (zmniejszyć rozrzut wyników) przez wielokrotny pomiar w tych samych warunkach. Taki zabieg nie będzie skuteczny w przypadku niepewności systematycznej. W teorii niepewności zakłada się, że błędy systematyczne są rozpoznawane i eliminowane z wyniku pomiaru [ARENDARSKI 2006]. Błędy systematyczne niewyeliminowane (ale rozpoznane) podlegają randomizacji, tj. są uwzględniane w obliczeniach niepewności, jak błędy przypadkowe.

Omawiając metody obliczania niepewności, rozróżnia się pomiar bezpośredni, a więc taki, którego wynik został wskazany przez przyrząd pomiarowy, i pośredni, którego wynik jest rezultatem obliczeń, wg odpowiedniej formuły, na podstawie wyników pomiarów bezpośrednich. Przykładem pomiaru bezpośredniego jest odczyt na wodowskazie wysokości warstwy przelewowej na przepływomierzu, pośredniego zaś – natężenie przepływu obliczone z użyciem odpowiedniej formuły (np. wzór (1)), m.in. na podstawie wysokości warstwy przelewowej.

Standardową niepewność pomiaru bezpośredniego można szacować jedną z dwóch metod:

- metodą typu A (niepewność przypadkowa) – na podstawie odchylenia standardowego  $S_{\bar{x}}$  średniej wartości wyników serii co najmniej 5 pomiarów (najlepiej co najmniej 10 pomiarów),
- metodą typu B (niepewność przypadkowa lub systematyczna) – w oparciu o osąd obserwatora, tj. naukowe rozpoznanie źródeł błędów (niepewności) po-

miarów i wynikającej z ich istnienia zmienności wyników pomiarów (błędów przypadkowych lub błędów systematycznych). W metodzie tej wykorzystuje się doświadczenie obserwatora, certyfikaty przyrządu pomiarowego i świadectwo jego producenta, dane literaturowe, obliczenia, a w ostateczności – zdrowy rozsądek.

Według metody typu A niepewność standardową średniej arytmetycznej, jako wyniku pomiaru, określa się ze znanego w statystyce wzoru:

$$u_R(\bar{x}) = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} ; \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (6)$$

gdzie:

$n$  – liczba pomiarów (powtórzeń);

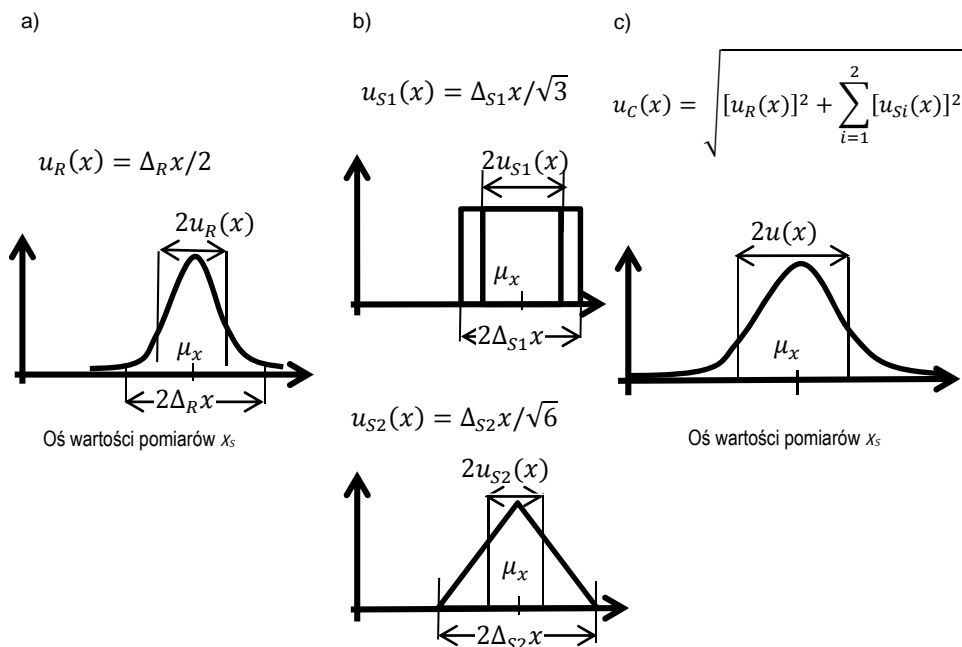
$x_i$  – wartość  $i$ -tego pomiaru (wynik surowy lub skorygowany o poprawki);

$\bar{x}$  – średnia arytmetyczna ze wszystkich wyników (surowych lub skorygowanych) serii pomiarów.

Podstawą obliczeń metodą typu B jest rozpoznanie hipotetycznych statystycznych rozkładów możliwych wyników pomiaru wielkości mierzonej. Teoretycznie można wyróżnić tyle rozkładów ile jest źródeł błędów. W ocenie niepewności przypadkowych (wskazań przyrządu i poprawek) składa się rozkłady spowodowane różnymi błędami przypadkowymi, otrzymując w wyniku rozkład złożony symetryczny, zwany rozkładem normalnym (Gaussa). W przypadku niepewności systematycznych (nieuwzględnionych poprawek), również otrzymuje się jeden rozkład – zazwyczaj normalny – przez złożenie rozkładów spowodowanych błędami systematycznymi ze zidentyfikowanych źródeł. Zazwyczaj będą to takie rozkłady symetryczne, jak rozkład prostokątny lub trójkątny. Cechą każdego z tych rozkładów jest wartość graniczna niepewności  $\Delta x$ , którą określa się w oparciu o naukowy osąd. W przypadku rozkładu normalnego może nią być wartość, której przekroczenie jest mało prawdopodobne (np. 5%), zaś w przypadku rozkładu prostokątnego lub trójkątnego – wartość maksymalna możliwa (rys. 1)

Niepewność standardową oblicza się na podstawie znanej (przyjętej) wartości  $\Delta x$ , wg wzoru:  $u(x) = \Delta x/k$ , gdzie  $k$  – współczynnik rozszerzenia. W przypadku rozkładu normalnego  $k = 2$ , prostokątnego –  $k = \sqrt{3} = 1,73$ , a trójkątnego –  $k = \sqrt{6} = 2,45$ .

Wzory podane na rysunku 1. można przedstawić w bardziej ogólnej postaci: na przypadkową standardową niepewność  $u_R(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^I [u_{Ri}(x)]^2}$ , na systematyczną standardową niepewność:  $u_S(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^J [u_{Sj}(x)]^2}$  i na całkowitą standardową



Rys. 1. Przykłady hipotetycznych rozkładów statystycznych wyników  $x$  pomiaru wielkości  $X$  a) obciążonego tylko błędami przypadkowymi, b) obciążonego tylko błędami systematycznymi z dwóch źródeł zakłóceń (rozkład prostokątny i rozkład trójkątny), c) obciążonego błędami przypadkowymi i systematycznymi (rozkład złożony);  $\mu_x$  – wartość rzeczywista mierzonej wielkości  $X$ ;  $\Delta_{R}x$ ,  $u_R(x)$  – odpowiednio przypadkowa graniczna i standardowa niepewność pomiaru wielkości  $X$  (spowodowana błędami przypadkowymi);  $\Delta_{S1}x$ ,  $u_{S1}(x)$ ,  $\Delta_{S2}x$ ,  $u_{S2}(x)$  – odpowiednio systematyczne graniczne i standardowe niepewności pomiaru wielkości  $X$  związane odpowiednio z pierwszym (1) i drugim (2) źródłem niepewności;  $u_C(x)$  – całkowita standardowa niepewność pomiaru wielkości  $X$

Fig. 1. Examples of hypothetical statistical distributions of measurements  $x$  of the  $X$  quantity a) burdened with only random errors, b) burdened with only systematic errors from two sources of disturbances (rectangle and triangle distribution), c) burdened with random and systematic errors (complex distribution);  $\mu_x$  – real value of measured quantity  $X$ ;  $\Delta_{R}x$ ,  $u_R(x)$  – expanded random and standard uncertainties, respectively, of the  $X$  quantity measurement (caused by random errors);  $\Delta_{S1}x$ ,  $u_{S1}(x)$ ,  $\Delta_{S2}x$ ,  $u_{S2}(x)$  – expanded systematic and standard uncertainties, respectively, of the  $X$  quantity measurements associated with the first (1) and second (2) source of uncertainty, respectively;  $u_C(x)$  – total standard uncertainty of the measurement of the  $X$  quantity

niepewność:  $u_C(x) = \sqrt{u_R(x)^2 + u_S(x)^2}$ , gdzie  $I$  oznacza liczbę branych pod uwagę niepewności przypadkowych  $u_{Ri}(x)$ , zaś  $J$  – niepewności systematycznych  $u_{Sj}(x)$ .

W przypadku **pomiaru pośredniego** wielkości  $Y$ , jego przypadkową, systematyczną albo całkowitą niepewność standardową, tzw. niepewność złożoną  $u_Z(y)$ , oblicza się na podstawie standardowych (systematycznych albo przypadkowych, bezwzględnych albo względnych) niepewności pomierzonych bezpośrednio wartości  $x_1, x_2, \dots, x_k$  wielkości wchodzących w skład funkcji pomiaru  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ :



– niepewność standardową złożoną bezwzględną

$$u_Z(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^k (C_i u(x_i))^2} \quad (7a)$$

$$C_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

– niepewność standardową złożoną względną

$$u'_Z(y) = \frac{u_Z(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} u'(x_i) \right]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^k [G_i u'(x_i)]^2} \quad (7b)$$

$$G_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{x_i}{y}$$

gdzie:

- $x_i$  – wyniki bezpośrednich pomiarów wielkości  $X_i$ ,
- $u(x_i)$  – przypadkowe albo systematyczne niepewności standardowe (cząstkowe) bezwzględne wyników pomiarów bezpośrednich,
- $u'(x_i)$  – przypadkowe albo systematyczne niepewności standardowe cząstkowe względne:  $(u'(x_i) = \frac{u(x_i)}{x_i}, i = 1, 2, \dots, k)$ ,
- $C_i, G_i$  – współczynniki wpływu (wrażliwości),
- $\partial f / \partial x_i$  – wartość pochodnej cząstkowej  $\partial f / \partial X_i$  funkcji  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_k)$  dla  $X_i = x_i$ .

Przedstawione zależności (7) są słuszne, gdy wyniki pomiarów  $x_1, x_2, \dots, x_k$  nie są wzajemnie skorelowane, co jest możliwe w przypadku braku korelacji między wielkościami  $X_1, X_2, \dots, X_k$ .

W przypadku, gdy błędy wyników są wzajemnie skorelowane oblicza się to skorelowanie i stosuje bardziej złożone wzory, opisane np. w pracy ARENDARSKIEGO [2006].

Inną możliwość obliczenia niepewności standardowej pomiaru pośredniego daje twierdzenie wykorzystywane w obliczeniach na liczbach przybliżonych. Według tego twierdzenia kres górny  $\Delta y$  błędu bezwzględnego przybliżonej wartości funkcji  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$  dla  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k$  wyraża się wzorem:

$$\Delta y \approx \sum_{i=1}^k \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta_i \quad (8)$$

gdzie:

$\Delta_i$  – kresy górne bezwzględnych błędów liczb przybliżonych  $x_i$ .

Wzór (8) można przedstawić w postaci wykorzystywanej w niniejszej pracy:  
 – dla niepewności standardowej złożonej bezwzględnej

$$u_z(y) = \sum_{i=1}^k |C_i u(x_i)|, \quad C_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (9a)$$

– dla niepewności standardowej złożonej względnej

$$u'_z(y) = \sum_{i=1}^k |G_i u'(x_i)|, \quad G_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \quad (9b)$$

gdzie oznaczenia jak we wzorach (7).

## WYNIKI ANALIZ I PRZYKŁADY

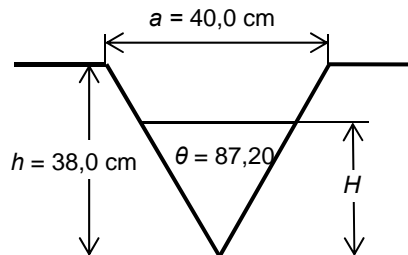
### POMIAR OBJĘTOŚCIOWEGO NATĘŻENIA PRZEPLYWU WODY I MASOWEGO NATĘŻENIA PRZEPLYWU AZOTU AZOTANOWEGO

Objętościowe natężenie przepływu  $Q_V$  wody na przelewie trójkątnym, pracującym jako niezatopiony (zwierciadło wody dolnej poniżej najniższego punktu trójkątnego wycięcia przelewu) można obliczyć ze wzoru:

$$Q_V = \frac{8}{15} \mu \sqrt{2g} \frac{a}{2h} H^{2,5} \quad (10)$$

Wzór ten jest specyficzną funkcją pomiaru  $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , w której kolejne argumenty oznaczają:

- $\mu$  – współczynnik wydatku przelewu,
- $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $9,81 \text{ m s}^{-2}$ ,
- $a$  – szerokość wycięcia otworu przelewu (rys. 2),
- $h$  – głębokość wycięcia korony przelewu (rys. 2),
- $H$  – wysokość warstwy przelewowej, w m.



Rys. 2. Przelew trójkątny niezatopiony

Fig. 2. V-notch free weir

**Przykład 1.** Obliczyć objętościowe natężenie przepływu wody na przelewie trójkątnym niezatopionym (wymiary jak na rysunku 2), gdy pomierzona bezpośrednio wysokość warstwy przelewowej wynosi  $H = 22,5$  cm.

Według danych WTO gdy  $\theta = 90^\circ$  wartość  $\mu$  może się zmieniać w przedziale od 0,6080 do 0,5855 [DĄBKOWSKI i in. 1997], stąd w obliczeniach przyjęto  $\mu = (0,6080 + 0,5855)/2 = 0,5968$

$$Q_V = \frac{8}{15} \cdot 0,5968 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot \frac{40,0}{2 \cdot 38,0} H^{2,5} = 0,7420 \cdot H^{2,5}$$

$$Q_V = 0,7420 \cdot 0,225^{2,5} = 0,017819 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 17,819 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Wynik obliczeń podano z nadmierną liczbą cyfr, ponieważ ostateczne uzgodnienie liczby cyfr w wyniku nastąpi po obliczeniu jego rozszerzonej niepewności.

**Przykład 2.** Wraz z pomiarem natężenia przepływu na przelewie (przykład 1) pobrano próbę wody, w której metodą spektrofotometryczną określono stężenie azotu azotanowego ( $C_{\text{N-NO}_3}$ ). Stężenie to wynosiło  $6,51 \text{ mg} \cdot \text{dm}^{-3}$ . Obliczyć masowe natężenie przepływu  $\text{N-NO}_3 - Q_M$

$$Q_M = C_{\text{N-NO}_3} Q_V = 6,51 \text{ mg} \cdot \text{dm}^{-3} \cdot 17,819 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 116,00 \text{ mg} \cdot \text{s}^{-1}$$

#### NIEPEWNOŚĆ POMIARU OBJĘTOŚCIOWEGO NATĘŻENIA PRZEPLÝWU WODY ZA POMOCĄ PRZELEWU TRÓJKĄTNEGO

Niepewność pomiaru objętościowego natężenia przepływu wody na przelewie trójkątnym można wyznaczyć, posługując się zależnościami (7), w których funkcja  $f$  jest wyrażona wzorem (10), zaś  $x_i$  oznaczają wartości  $\mu$ ,  $a$ ,  $h$ ,  $H$ , scharakteryzowane standardowymi (przypadkowymi, systematycznymi albo całkowitymi) niepewnościami bezwzględnyymi  $u(\mu)$ ,  $u(a)$ ,  $u(h)$ ,  $u(H)$  lub standardowymi (przypadkowymi, systematycznymi albo całkowitymi) niepewnościami względnymi:  $u'(\mu) = u(\mu)/\mu$ ,  $u'(a) = u(a)/a$ ,  $u'(h) = u(h)/h$ ,  $u'(H) = u(H)/H$ . Można przyjąć, że wartości  $\mu$ ,  $a$ ,  $h$ ,  $H$  nie są ze sobą skorelowane. W związku z takim założeniem, w wyniku odpowiednich przekształceń, otrzymuje się zależność:

$$u'_z(Q_V) = \sqrt{[u'(\mu)]^2 + [u'(a)]^2 + [u'(h)]^2 + [2,5u'(H)]^2} \quad (11)$$

która służy do obliczenia zarówno przypadkowej, systematycznej, jak i całkowitej standardowej niepewności.

W przypadku gdy pomiary objętościowego natężenia przepływu będą stosowane do obliczenia ilości przepływu w określonym czasie, oddzielnie oblicza się przypadkową niepewność standardową całkowitą i oddzielnie systematyczną niepewność standardową całkowitą. W tym celu we wzorze (11) w pierwszym przy-

padku podstawia się przypadkowe niepewności standardowe, w drugim zaś – systematyczne niepewności standardowe pomiarów bezpośrednich. Wyjaśnienie takiego postępowania zostanie zaprezentowane w dalszej części artykułu.

**Przykład 3.** Obliczyć przypadkową i systematyczną niepewność standardową względną i bezwzględną oraz całkowitą niepewność standardową bezwzględną natężenia objętościowego przepływu z przykładu 1. Podać ostateczny wynik wartości przepływu, uwzględniając w nim niepewność rozszerzoną.

Obliczenia przeprowadza się w oparciu o wzór (11) i bilans niepewności pomiaru natężenia przepływu (tab. 1, 2).

1) Przypadkowa niepewność standardowa względna pomiaru objętościowego natężenia przepływu:

$$u'_{ZR}(Q_V) = \sqrt{\sum_{i=1}^k [G_i \cdot u'_R(x_i)]^2} = \sqrt{0,00077490} = 0,0278 \quad (2,78\%)$$

2) Przypadkowa niepewność standardowa bezwzględna:

$$u_{ZR}(Q_V) = u'_{ZR}(Q_V) \cdot Q_V = 0,0278 \cdot 17,819 = 0,495 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

3) Systematyczna niepewność standardowa względna pomiaru objętościowego natężenia przepływu:

$$u'_{ZS}(Q_V) = \sqrt{\sum_{i=1}^k [G_i \cdot u'_S(x_i)]^2} = \sqrt{0,00423831} = 0,0651 \quad (6,51\%)$$

4) Systematyczna niepewność standardowa bezwzględna:

$$u_{ZS}(Q_V) = u'_{ZS}(Q_V) \cdot Q_V = 0,0651 \cdot 17,819 = 1,160 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

5) Całkowita niepewność standardowa bezwzględna:

$$u_{ZC}(Q_V) = \sqrt{u_{ZR}(Q_V)^2 + u_{ZS}(Q_V)^2} = \sqrt{0,495^2 + 1,160^2} = 1,261 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Niepewność rozszerzoną obliczono w przybliżeniu, mnożąc całkowitą niepewność standardową przez współczynnik rozszerzenia  $k$ , który w przypadku rozkładu normalnego i poziomu ufności 95% przyjmuje wartość dwa. Stąd  $U_{ZC}(Q_V) = 2u_{ZC}(Q_V) = 2,5 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  (wynik zaokrąglą się do dwóch cyfr znaczących). Ostateczny wynik:  $Q_V = (17,8 \pm 2,5) \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  (liczba miejsc po przecinku w wyniku i niepewności powinna być taka sama – w przykładzie jest jedno miejsce). Przeprowadzone obliczenia upoważniają do stwierdzenia z ufnością  $\alpha \approx 95\%$ , że rzeczywista wartość przepływu na przelewie zawiera się w przedziale od 15,3 do 20,3  $\text{dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Table 1.** Bilans przypadkowych niepewności standardowych pomiaru natężenia przepływu na przelewie trójkątnym ( $Q_V = 17,819 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )**Table 1.** Balance of random standard uncertainties of the measurement of flow intensity through V-notch weir ( $Q_V = 17.819 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )

Wielkość		Quantity	Oszacowanie	Niepewność graniczna (rozszerzona)	Współczynnik rozszerzenia	Niepewność standardowa		Współczynnik wpływu	Składowe niepewności złożonej
Symbol	jednostka unit					Estimate	Expanded uncertainty		
						bezwzględna absolute	względna (-) relative (-)		
$X_i$		$x_i$		$\Delta x_i$	$k$	$u_R(x_i)$	$u'_R(x_i)$	$G_i$	$[G_i u'_R(x_i)]^2$
$\mu$	–	0,59675	0	0	0,000	0,00000	1	0,00000000	
$a$	cm	40,0	0,1	2	0,050	<b>0,00125</b>	1	0,00000156	
$h$	cm	38,0	0,1	2	0,050	0,00132	1	0,00000173	
$H$	cm	22,5	0,5	2	0,250	0,01111	2,5	0,00077160	
<b>Suma</b>								<b>0,00077490</b>	

Objaśnienia:  $\mu$  – współczynnik wydatku przelewu;  $a$  – szerokość wycięcia otworu przelewu;  $h$  – głębokość wycięcia korony przelewu;  $H$  – wysokość warstwy przelewowej.

Explanations:  $\mu$  – weir yield coefficient;  $a$  – breadth of weir's notch;  $h$  – depth of the notch;  $H$  – height of overflow layer.

**Tabela 2.** Bilans systematycznych niepewności standardowych pomiaru natężenia przepływu na przelewie trójkątnym ( $Q_V = 17,819 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )**Table 2.** Balance of systematic standard uncertainties of the measurement of flow intensity through V-notch weir ( $Q_V = 17.819 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )

Wielkość		Quantity	Oszacowanie	Niepewność graniczna (rozszerzona)	Współczynnik rozszerzenia	Niepewność standardowa		Współczynnik wpływu	Składowe niepewności złożonej
Symbol	jednostka unit					Estimate	Expanded uncertainty		
						bezwzględna absolute	względna (-) relative (-)		
$X_i$		$x_i$		$\Delta x_i$	$k$	$u_S(x_i)$	$u'_S(x_i)$	$G_i$	$[G_i u'_S(x_i)]^2$
$\mu$	–	0,59675	0,01125	1,732	0,0065	0,01088	1	0,00011845	
$a$	cm	40,0	0,1	1,732	0,0577	0,00144	1	0,00000208	
$h$	cm	38,0	0,1	1,732	0,0577	0,00152	1	0,00000231	
$H$	cm	22,5	1,0	1,732	0,5774	0,02566	2,5	0,00411547	
<b>Suma</b>								<b>0,00423831</b>	

Objaśnienia: jak pod tabelą 1. Explanations as in Table 1.

### NIEPEWNOŚĆ POMIARU MASOWEGO NATĘŻENIA PRZEPLYWU AZOTU AZOTANOWEGO

Niepewność pomiaru masowego natężenia przepływu substancji (jednostkowego ładunku substancji) można wyznaczyć, posługując się zależnościami (7), w których funkcja  $f$  jest wyrażona wzorem (2), zaś  $x_i$  oznaczają wartości objętościowego natężenia przepływu  $Q_V$  i stężenia  $C$  płynącej w wodzie substancji. Wartości te są scharakteryzowane standardowymi niepewnościami bezwzględnymi  $u(Q_V)$ ,  $u(C)$  lub standardowymi niepewnościami względnymi:  $u'(Q_V) = u(Q_V)/Q_V$ ,  $u'(C) = u(C)/C$ . W wyniku odpowiednich przekształceń uzyskuje się zależność:

$$u'_z(Q_M) = \sqrt{[u'(Q_V)]^2 + [u'(C)]^2} \quad (12)$$

**Przykład 4.** Obliczyć przypadkową i systematyczną niepewność standardową względną i bezwzględną oraz całkowitą niepewność standardową bezwzględną masowego natężenia przepływu (jednostkowego ładunku) azotu azotanowego (N-NO<sub>3</sub>) w wodzie (przykład 2). Podać ostateczny wynik wartości przepływu, uwzględniając w nim niepewność rozszerzoną. Przypadkową niepewność graniczną (rozszerzoną) bezwzględną uzyskanego wyniku pomiaru stężenia oszacowano na 0,23 mg·dm<sup>-3</sup>, zaś systematyczną niepewność graniczną (rozszerzoną) – na 0,20 mg·dm<sup>-3</sup>.

Obliczenia przeprowadza się w oparciu o wzór (12) i bilans niepewności pomiaru masowego natężenia przepływu (tab. 3, 4).

- 1) Przypadkowa niepewność standardowa względna pomiaru masowego natężenia przepływu (ładunku jednostkowego substancji):

$$u'_{ZR}(Q_M) = \sqrt{\sum_{i=1}^k [G_i u'_R(x_i)]^2} = \sqrt{0,00108540} = 0,0330 \quad (3,30\%),$$

- 2) Przypadkowa niepewność standardowa bezwzględna pomiaru masowego natężenia przepływu:

$$u_{ZR}(Q_M) = u'_{ZR}(Q_M) \cdot Q_M = 0,0329 \cdot 116,0 = 3,822 \text{ mg} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 3) Systematyczna niepewność standardowa względna pomiaru masowego natężenia przepływu:

$$u'_{ZS}(Q_M) = \sqrt{\sum_{i=1}^k [G_i u'_S(x_i)]^2} = \sqrt{0,00455204} = 0,0675 \quad (6,75\%)$$

- 4) Systematyczna niepewność standardowa bezwzględna pomiaru masowego natężenia przepływu:

**Tabela 3.** Bilans przypadkowych niepewności standardowych pomiaru natężenia przepływu azotu azotanowego na przelewie trójkątnym ( $Q_m = 116,0 \text{ mg}\cdot\text{s}^{-1}$ )

**Table 3.** Balance of random standard uncertainties of the measurement of nitrate-nitrogen flow intensity through V-notch weir ( $Q_m = 116.0 \text{ mg}\cdot\text{s}^{-1}$ )

Wielkość		Oszacowanie Estimate	Niepewność graniczna (rozszerzona) Expanded uncertainty	Współczynnik rozszerzenia Coefficient of expansion	Niepewność standardowa Standard uncertainty		Współczynnik wpływu Impact coefficient	Składowe niepewności złożonej Components of complex uncertainty
Symbol	miano unit				bezwzględna absolute	względna, % relative, %		
$X_i$		$x_i$	$\Delta x_i$	$k$	$u_R(x_i)$	$u'_R(x_i)$	$G_i$	$[G_i u'_R(x_i)]^2$
$Q_V$	$\text{dm}^3\cdot\text{s}^{-1}$	17,82	–	–	0,495	0,02781	1	0,00077340
$C_{N\text{-}NO_3}$	$\text{mg}\cdot\text{dm}^{-3}$	6,51	0,23	2	0,115	0,01767	1	0,00031200
<b>Suma</b>								<b>0,00108540</b>

Objaśnienia:  $Q_V$  – objętościowe natężenie przepływu;  $C_{N\text{-}NO_3}$  – stężenie N-NO<sub>3</sub>.

Explanations:  $Q_V$  – volumetric flow intensity;  $C_{N\text{-}NO_3}$  – N-NO<sub>3</sub> concentration.

**Tabela 4.** Bilans systematycznych niepewności standardowych pomiaru masowego natężenia przepływu na przelewie trójkątnym

**Table 4.** Balance of systematic standard uncertainties of the measurement of mass flow intensity through a V-notch weir

Wielkość		Oszacowanie Estimate	Niepewność graniczna (rozszerzona) Expanded uncertainty	Współczynnik rozszerzenia Coefficient of expansion	Niepewność standardowa Standard uncertainty		Współczynnik wpływu Impact coefficient	Składowe niepewności złożonej Components of complex uncertainty
symbol	miano unit				bezwzględna absolute	względna, % relative, %		
$X_i$		$x_i$	$\Delta x_i$	$k$	$u_S(x_i)$	$u'_S(x_i)$	$G_i$	$[G_i u'_S(x_i)]^2$
$Q_V$	$\text{dm}^3\cdot\text{s}^{-1}$	17,82	–	–	1,160	0,06510	1	0,00423741
$C_{N\text{-}NO_3}$	$\text{mg}\cdot\text{dm}^{-3}$	6,51	0,20	1,732	0,115	0,01000	1	0,00031463
<b>Suma</b>								<b>0,00455204</b>

Objaśnienia: jak pod tabelą 3. Explanations as in Table 3.

$$u_{ZS}(Q_M) = u'_{ZS}(Q_M). \quad Q_M = 0,0675 \cdot 116,0 = 7,830 \text{ mg} \cdot \text{s}^{-1}$$

5) Całkowita niepewność standardowa bezwzględna:

$$u_{ZC}(Q_M) = \sqrt{u_{ZR}(Q_M)^2 + u_{ZS}(Q_M)^2}. \quad \sqrt{[3,822]^2 + [7,830]^2} = 8,713 \text{ mg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Niepewność rozszerzoną wyznacza się ze wzoru  $U_{ZC}(Q_M) = 2u_{ZC}(Q_M) = 2 \cdot 8,713 = 17 \text{ mg} \cdot \text{s}^{-1}$  (wynik zaokrąglą się do dwóch cyfr znaczących). Ostateczny wynik:  $Q_M = (116 \pm 17) \text{ mg} \cdot \text{s}^{-1}$  (liczba miejsc po przecinku w wyniku i jego niepewności powinna być taka sama). Przeprowadzone obliczenia upoważniają do stwierdzenia z ufnością  $\alpha \approx 95\%$ , że rzeczywista wartość masowego natężenia przepływu N-NO<sub>3</sub> na przelewie zawiera się w przedziale od 99 do 133 mg·s<sup>-1</sup>.

### OBLICZANIE OBJĘTOŚCI LUB MASY PRZEPŁYWU

Objętość przepływu wody w okresie od  $t_0$  do  $t_n$  lub masę substancji w niej zawartej można określić dwiema metodami: prostokątów i trapezów. Objętość  $V$  przepływu wody i masę  $M$  przepływu substancji oblicza się wg zależności:

– w metodzie prostokątów

$$V \approx \Delta t \sum_{i=1}^n Q_{Vi-\frac{1}{2}}, \quad \left( n = \frac{t_n - t_0}{\Delta t} \right) \quad (13)$$

$$M \approx \Delta t \sum_{i=1}^n Q_{Mi-\frac{1}{2}}, \quad \left( n = \frac{t_n - t_0}{\Delta t} \right)$$

gdzie:

$Q_{Vi-\frac{1}{2}}, Q_{Mi-\frac{1}{2}}$  – objętościowe i masowe natężenie przepływu w środku okresu

$\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ ,

$t_{i-1}, t_i$  – dwie kolejne chwile w okresie od  $t_0$  do  $t_n$

$\Delta t$  =  $\Delta t_{i-1,i} = t_i - t_{i-1} = \text{const.}$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$

– w metodzie trapezów

$$V \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (Q_{Vi} + Q_{Vi+1}) \Delta t_{i,i+1} = \sum_{i=0}^n Q_{Vi} \Delta t_i \quad (14)$$

$$M \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (Q_{Mi} + Q_{Mi+1}) \Delta t_{i,i+1} = \sum_{i=0}^n Q_{Mi} \Delta t_i$$



gdzie:

$Q_{Vi}$ ,  $Q_{Mi}$  – objętościowe i masowe natężenie przepływu w chwili  $t_i$  (o numerze  $i$ ),

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t_{0,1}}{2}; \Delta t_n = \frac{\Delta t_{n-1,n}}{2}; \Delta t_i = \frac{\Delta t_{i-1,i} + \Delta t_{i,i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

Obliczone wartości objętości przepływu wody  $V$  i masy przepływu zawartej w niej substancji  $M$  można skorygować, posługując się zależnością (5).

### NIEPEWNOŚĆ POMIARU OBJĘTOŚCI LUB MASY PRZEPLYWU

Wyprowadzając wzory do obliczania niepewności pomiaru objętości przepływu wody lub masy przepływu zawartej w niej substancji, przyjmuje się, że niepewność pomiaru okresu próbkowania  $\Delta t_i$  jest mała, a przez to możliwa do pominięcia. Założenie to będzie spełnione w przypadku ścisłego odnotowywania czasu dokonywania pomiaru (miesiąc, dzień, godzina, minuta). Gdy stosuje się wzory ze stałym okresem próbkowania ( $\Delta t = \text{const.}$ ), a tak jest w przypadku metody prostokątów, pomiary natężenia przepływu należy wykonywać w równych odstępach czasu (zawsze o tej samej godzinie wybranego dnia lub dni tygodnia).

Na niepewność pomiaru całkowitej objętości lub masy przepływu w okresie od  $t_0$  do  $t_n$  będą się składać niepewności kolejnych pomiarów ich cząstkowych wartości, co wynika ze wzorów metody prostokątów i metody trapezów. Złożenia przypadkowych niepewności standardowych kolejnych pomiarów tych cząstkowych wartości można dokonać, stosując prawo przenoszenia się niepewności (wzory (7)). Nie będzie to możliwe w przypadku niepewności systematycznych, które są ze sobą skorelowane, ponieważ każdy pomiar przepływu jest wykonywany tym samym przyrządem (w przykładach – przelewem trójkątnym), a przez to jest obarczony błędem systematycznym o takim samym charakterze (znaku). W takim przypadku bezpieczniej jest posługiwać się wzorami (9).

### PRZYPADKOWA NIEPEWNOŚĆ STANDARDOWA POMIARU OBJĘTOŚCI LUB MASY PRZEPLYWU

Przypadkową niepewność standardową pomiaru objętości  $V$  lub masy  $M$  przepływu w czasie od  $t_0$  do  $t_n$  oblicza się za pomocą wzorów (7), w których funkcję  $f$  stanowi: w przypadku metody prostokątów wzór (13), a w przypadku metody trapezów – wzór (14). Argumenty funkcji  $x_i$  oznaczają wartości  $Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}}$  (w przypadku metody prostokątów) i  $Q_{(V,M)i}$  (w przypadku metody trapezów), a  $u(x_i)$  i  $u'(x_i)$  – ich przypadkowe niepewności standardowe odpowiednio bezwzględne  $u_R(Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}})$  i  $u_R(Q_{(V,M)i})$  i względne:  $u'_R(Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}}) = u_R(Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}})/Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}}$ ,

$u'_R(Q_{(V,M)}) = u_R(Q_{(V,M)})/Q_{(V,M)}$ . W wyniku odpowiednich przekształceń uzyskuje się:

– w metodzie prostokątów:

$$u_{ZR}(V, M) = \Delta t \sqrt{\sum_{i=1}^n [u_R(Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}})]^2} \quad (15a)$$

$$u'_{ZR}(V, M) = \frac{\Delta t}{V, M} \sqrt{\sum_{i=1}^n [Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}} u'_R(Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}})]^2} \quad (15b)$$

– w metodzie trapezów:

$$u_{ZR}(V, M) = \sqrt{\sum_{i=0}^n [\Delta t_i u_R(Q_{(V,M) i})]^2} \quad (16a)$$

$$u'_{ZR}(V, M) = \frac{1}{V, M} \sqrt{\sum_{i=0}^n [\Delta t_i Q_{(V,M) i} u'_R(Q_{(V,M) i})]^2} \quad (16b)$$

gdzie:

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t_{0,1}}{2}; \Delta t_n = \frac{\Delta t_{n-1,n}}{2}; \Delta t_i = \frac{\Delta t_{i-1,i} + \Delta t_{i,i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1;$$

$(V, M)$  – oznacza odniesienie się odpowiednio do objętości lub masy przepływu.

Przypadkowa niepewność standardowa pomiaru ilości przepływu w jakimś okresie maleje wraz ze wzrostem liczby pomiarów natężenia przepływu. Gdy liczba pomiarów przekracza 15, niepewność ta może być pominięta [BOS (red.) 1976]. Aby uzasadnić to ważne spostrzeżenie weźmy pod uwagę wzór (16b) i dla uproszczenia załóżmy, że wykonano  $n$  pomiarów objętościowego natężenia przepływu, uzyskując jednakowe wartości i jednakowe niepewności standardowe, tzn.  $Q_{Vi-\frac{1}{2}} = Q_V$  oraz  $u'(Q_{Vi-\frac{1}{2}}) = u'(Q_V)$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ . Przy tych założeniach wzór (16b) można przedstawić następująco:

$$u'_{ZR}(V) = \frac{1}{V} \sqrt{\sum_{i=1}^n [\Delta t Q_V u'_R(Q_V)]^2} = \sqrt{\frac{n[\Delta t Q_V u'_R(Q_V)]^2}{[n \Delta t Q_V]^2}} = \frac{u'_R(Q_V)}{\sqrt{n}} \quad (17)$$

Podobny wzór można wyprowadzić dla metody trapezów. Wynika z niego, że przypadkowa niepewność maleje odwrotnie proporcjonalnie do pierwiastka z liczby pomiarów. W przypadku systematycznej niepewności takie stwierdzenie nie jest zgodne z naszą intuicją. Niepewności systematycznej (błędu systematycznego) nie można zmniejszyć przez zwielokrotnienie liczby pomiarów.

**SYSTEMATYCZNA NIEPEWNOŚĆ STANDARDOWA POMIARU OBJĘTOŚCI  
LUB MASY PRZEPIYU**

Systematyczną niepewność standardową pomiaru ilości przepływu w czasie od  $t_0$  do  $t_n$  oblicza się za pomocą wzorów (9), w których funkcję  $f$  stanowi w przypadku metody prostokątów wzór (13), a w przypadku metody trapezów – wzór (14). Argumenty funkcji  $x_i$  oznaczają wartości  $Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}}$  (w przypadku metody prostokątów) i  $Q_{(V,M)i}$  (w przypadku metody trapezów), a  $u(x_i)$  i  $u'(x_i)$  ich systematyczne niepewności standardowe odpowiednio bezwzględne  $u_S(Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}})$  i  $u_S(Q_{(V,M)i})$  i względne:  $u'_S(Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}}) = u_S(Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}})/Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}}$ ,  $u'_S(Q_{(V,M)}) = u_S(Q_{(V,M)})/Q_{(V,M)}$ . W wyniku odpowiednich przekształceń uzyskuje się:

– w metodzie prostokątów:

$$u_{ZS}(V, M) = \Delta t \cdot \sum_{i=1}^n u_S(Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}}) \quad (18a)$$

$$u'_{ZS}(V, M) = \frac{\Delta t}{V, M} \sum_{i=1}^n Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}} \cdot u'_S(Q_{(V,M) i-\frac{1}{2}}) \quad (18b)$$

– w metodzie trapezów:

$$u_{ZS}(V, M) = \sum_{i=0}^n \Delta t_i \cdot u_S(Q_{(V,M)i}) \quad (19a)$$

$$u'_{ZS}(V, M) = \frac{1}{V, M} \sum_{i=0}^n \Delta t_i \cdot Q_{(V,M)i} \cdot u'_S(Q_{(V,M)i}) \quad (19b)$$

gdzie:

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t_{0,1}}{2}; \quad \Delta t_n = \frac{\Delta t_{n-1,n}}{2}; \quad \Delta t_i = \frac{\Delta t_{i-1,i} + \Delta t_{i,i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1,$$

$(V, M)$  – oznacza odniesienie się odpowiednio do objętości lub masy przepływu.

Wzory (18) i (19) można przedstawić w uogólnionej postaci:

$$u_{ZS}(V, M) = \sum_{i=0}^n u_S(Q_{(V,M)i}) \cdot \Delta t_i \quad (20a)$$

$$u'_{ZS}(V, M) = \frac{\sum_{i=0}^n u'_S(Q_{(V,M)i}) \cdot Q_{(V,M)i} \cdot \Delta t_i}{\sum_{i=0}^n Q_{(V,M)i} \cdot \Delta t_i} \quad (20b)$$

Ze wzorów tych wynika, że systematyczna niepewność standardowa względna ilości (objętości, masy) przepływu jest średnią ważoną systematycznych niepewności standardowych względnych pomiaru natężenia przepływu. Wagami są ilości przepływów cząstkowych  $V_i = Q_{Vi} \Delta t_i$  albo  $M_i = Q_{Mi} \Delta t_i$ . Identyczny wzór jest zalecany do stosowania przez grupę roboczą ds. małych budowli hydraulicznych [BOS (red.) 1978]. Załóżmy, że wykonano  $n$  pomiarów natężenia przepływu w jed-

**Tabela 5.** Wyniki kolejnych pomiarów bezpośrednich i obliczeń cząstkowych objętości przepływu wody i masy N-NO<sub>3</sub>**Table 5.** Results of consecutive direct measurements and partial calculations of the water flow volume and mass of N-NO<sub>3</sub>

Data pomiaru Date of measurement	Wyniki pomiarów bezpośrednich Results of direct measurements			Wyniki obliczeń Results of calculations											
				przepływ wody water flow						przepływ N-NO <sub>3</sub> N-NO <sub>3</sub> flow					
	$\Delta t$ doby	$H_i$ cm	$C_i$ mg·dm <sup>-3</sup>	$Q_{Vi}$ dm <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup>	$V_i$ m <sup>3</sup>	$u'_{zR}(Q_{Vi})$ (-)	$[u_{zR}(V_i)]^2$ (m <sup>3</sup> ) <sup>2</sup>	$u'_{zS}(Q_{Vi})$ (-)	$u_{zS}(V_i)$ m <sup>3</sup>	$Q_{mi}$ mg·s <sup>-1</sup>	$M_i$ kg	$u'_{zR}(Q_{Mi})$ (-)	$[u_{zR}(M_i)]^2$ kg <sup>2</sup>	$u'_{zS}(Q_{Mi})$ (-)	$u_{zS}(M_i)$ kg
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<b>14.04</b>		10,5	<b>6,49</b>	2,65		0,060		0,138		17,20		0,062		0,139	
21.04	7,0	20	6,50	13,27	4816	0,031	22723	0,073	352	86,25	31	0,036	1,266	0,075	2,35
28.04	7,0	22,5	6,51	17,82	9402	0,0278	68506	0,0651	612	116,00	61	0,0330	4,066	0,0675	4,13
6.05	8,0	25	6,51	23,19	14172	0,025	126193	0,059	833	151,04	92	0,031	8,006	0,061	5,67
<b>12.05</b>	6,0	15	<b>6,52</b>	6,47	7687	0,042	102769	0,097	745	42,16	50	0,045	5,142	0,098	4,93
18.05	6,0	35	6,59	53,78	15615	0,018	78554	0,043	667	354,42	103	0,025	6,621	0,046	4,74
26.05	8,0	23	6,68	18,83	25091	0,027	466962	0,064	1599	125,84	166	0,032	28,587	0,066	10,96
<b>15.06</b>	20,0	27	<b>6,92</b>	28,11	40551	0,023	886519	0,055	2214	194,51	277	0,029	62,460	0,057	15,80
23.06	8,0	25	7,73	23,19	17728	0,025	197465	0,059	1042	179,27	129	0,029	14,177	0,061	7,84
30.06	7,0	39	8,44	70,48	28326	0,016	208711	0,039	1094	594,91	234	0,021	24,431	0,041	9,60
<b>7.07</b>	7,0	12	<b>9,15</b>	3,70	22433	0,052	1366833	0,121	2710	33,87	190	0,054	103,905	0,121	23,09
14.07	7,0	31	8,05	39,70	13126	0,020	70596	0,048	628	319,45	107	0,025	7,010	0,050	5,34
21.07	7,0	23	6,94	18,83	17699	0,027	232348	0,064	1128	130,69	136	0,032	18,828	0,066	8,97
28.07	7,0	40	5,84	75,09	28400	0,016	199564	0,038	1072	438,37	172	0,025	18,817	0,043	7,33
4.08	7,0	43	4,73	89,97	49913	0,015	534537	0,035	1764	425,91	261	0,029	54,966	0,043	11,23
<b>11.08</b>	7,0	19	<b>3,63</b>	11,68	30738	0,033	1025450	0,077	2360	42,39	142	0,046	41,894	0,083	11,77
18.08	7,0	19	3,78	11,68	7062	0,033	54127	0,077	542	44,18	26	0,045	1,377	0,083	2,16
25.08	7,0	22	3,94	16,85	8625	0,028	60283	0,067	574	66,32	33	0,041	1,857	0,073	2,43
2.09	8,0	19	4,11	11,68	9857	0,033	105456	0,077	757	48,02	40	0,044	2,916	0,082	3,23
<b>6.09</b>	4,0	23	<b>4,2</b>	18,83	5271	0,027	20605	0,064	336	79,07	22	0,039	0,719	0,069	1,52

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16,09	10,0	32	4,2	42,98	26701	0,020	274320	0,046	1240	180,53	112	0,034	14,268	0,054	6,05
<b>23,09</b>	7,0	<b>35</b>	<b>4,2</b>	53,78	29260	0,018	275829	0,043	1250	225,86	123	0,033	16,188	0,051	6,24
<b>Sumy</b>	–	–	–	–	<b>412473</b>	–	–	–	<b>23519</b>	–	<b>2508</b>	–	–	–	<b>155,38</b>

Objaśnienia: wytłuszczone wartości stężeń pochodzą z pomiarów, pozostałe zaś – z interpolacji liniowej; szary wiersz zawiera dane i wyniki obliczeń z przykładów 1–4;  $\Delta t$  – okres próbkowania;  $H_i$  – wysokość warstwy przelewowej;  $C_i$  – stężenie N-NO<sub>3</sub>;  $Q_{Vi}$  – objętościowe natężenie przepływu wody;  $V_i$  – objętość przepływu wody w czasie  $\Delta t$ ;  $u_{ZR}(Q_{Vi})$ ,  $u_{ZS}(Q_{Vi})$  – przypadkowa i systematyczna niepewność pomiaru  $Q_{Vi}$ ;  $[u_{ZR}(V_i)]^2$ ,  $u_{ZS}(V_i)$  – składowa przypadkowej i systematycznej złożonej niepewności pomiaru objętości przepływu wody;  $Q_M$  – masowe natężenie przepływu N-NO<sub>3</sub>;  $M_i$  – masa N-NO<sub>3</sub>;  $u_{ZR}(Q_M)$ ,  $u_{ZS}(Q_M)$  – przypadkowa i systematyczna niepewność pomiaru  $Q_M$ ;  $[u_{ZR}(M_i)]^2$ ,  $u_{ZS}(M_i)$  – składowa przypadkowej i systematycznej niepewności złożonej pomiaru masy N-NO<sub>3</sub>.

Explanations: concentrations given in bold are from measurements, other – from linear interpolation; gray row contains data and calculations from examples 1–4;  $\Delta t$  – sampling period;  $H_i$  – height of overflow layer;  $C_i$  – N-NO<sub>3</sub> concentration;  $Q_{Vi}$  – volumetric flow intensity;  $V_i$  – volume of water flowing in time  $\Delta t$ ;  $u_{ZR}(Q_{Vi})$ ,  $u_{ZS}(Q_{Vi})$  – random and systematic uncertainty of the measurement of  $Q_{Vi}$ ;  $[u_{ZR}(V_i)]^2$ ,  $u_{ZS}(V_i)$  – component of random and systematic complex uncertainty of the measurement of water volume;  $Q_M$  – flow intensity of N-NO<sub>3</sub> mass;  $M_i$  – mass of N-NO<sub>3</sub>;  $u_{ZR}(Q_M)$ ,  $u_{ZS}(Q_M)$  – random and systematic uncertainty of the measurement of  $Q_M$ ;  $[u_{ZR}(M_i)]^2$ ,  $u_{ZS}(M_i)$  – component of random and systematic complex uncertainty of the N-NO<sub>3</sub> mass measurement.

nakowych odstępach czasu  $\Delta t$ , uzyskując jednakowe wartości i jednakowe niepewności standardowe, tzn.  $Q_{Vi} = Q_V$  oraz  $u'(Q_{Vi}) = u'(Q_V)$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ . Zgodnie z tymi założeniami wzór (20b) przyjmie postać:

$$u'_{zS}(V) = \frac{\sum_{i=0}^n u'_S(Q_V) Q_V \Delta t}{\sum_{i=0}^n Q_V \Delta t} = \frac{n u'_S(Q_V) Q_V \Delta t}{n Q_V \Delta t} = u'_S(Q_V) \quad (21)$$

Z tego wzoru wynika, że w przeciwieństwie do przypadkowych niepewności, systematyczna niepewność standardowa względna nie zależy od liczby  $n$  dokonywanych pomiarów.

**Przykład 5.** Obliczyć objętość dopływu wody i masę dopływu azotu azotanowego do stawu nr 9 w kompleksie Stawów Raszyńskich. Podstawą obliczeń są wyniki pomiarów wysokości  $H$  warstwy przelewowej na przelewie trójkątnym o wymiarach jak w przykładzie 1 oraz wyniki pomiarów stężenia  $C$  związków azotu azotanowego w próbach wody pobieranej na przelewie. Objętość  $V$  przepływu wody i masę  $M$  przepływu azotu azotanowego obliczano metodą trapezów, ponieważ pomiary objętościowego natężenia przepływu charakteryzowały się zmiennym okresem próbkowania.

Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli podzielonej na trzy części (tab. 5). W pierwszej zamieszczono wyniki pomiarów bezpośrednich, w drugiej i trzeciej zaś – szczegółowe wyniki obliczeń.

W tabeli 6. przedstawiono obliczone, a następnie skorygowane w oparciu o wzór (5), wartości  $V$  objętości wody i  $M$  masy azotu azotanowego, dopływających do stawu.

Zwraca uwagę mała wartość niepewności przypadkowych  $u'_{zR}(V)$ ,  $u'_{zR}(M)$  w stosunku do wartości niepewności systematycznych  $u'_{zS}(V)$ ,  $u'_{zS}(M)$ . Wynika z tego, że gdy liczba pomiarów jest duża (w przykładzie – 22) obliczenia niepewności uzyskanych wyników można ograniczyć tylko do niepewności systematycznej, co wykazano teoretycznie w tej pracy (wzór (17)). Oznacza to, że gdy liczba pomiarów jest duża, do obliczania niepewności ilości (objętości albo masy) przepływu należy dysponować tylko wartościami systematycznych niepewności standardowych pomiaru natężenia przepływu i analiz laboratoryjnych.

Na podstawie wyników zawartych w tabeli 6. można z ufnością ok. 95% twierdzić, że w okresie odrostu ryb w 2009 r. do stawu nr 9 dopłynęło  $(441 \pm 51) \text{ dm}^3$  wody i  $(2,74 \pm 0,34) \text{ Mg}$  azotu azotanowego. Przedstawione tu niepewności mogą być zaniżone (lub zawyżone) ze względu na uproszczenia stosowane w badaniach i obliczeniach oraz z uwagi na specyficzne warunki pomiarów. Można zaliczyć do nich:

- długi okres próbkowania ( $\Delta t$ ) natężenia przepływu i jeszcze dłuższy – stężenia substancji w wodzie,
- przerwę w próbkowaniu natężenia przepływu wody w okresie od 26.05 do 15.06.2009 r.,

**Tabela 6.** Podsumowanie wyników obliczeń**Table 6.** Summary of calculations

Wyniki obliczeń objętość przepływu wody			Results of calculations of water flow volume			
$V$	$u_{ZR}(V)$	$u_{ZS}(V)$	$u_{ZC}(V)$	$u'_{ZR}(V)$	$u'_{ZS}(V)$	$u'_{ZC}(V)$
m <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>	%	%	%
412 473	2 526	23 519	23 654	0,61	5,70	5,73
<b>440 698</b>	<b>2 698</b>	<b>25 128</b>	<b>25 273</b>	<b>0,61</b>	<b>5,70</b>	<b>5,73</b>
<b><math>V = (441 \pm 51) \text{ dm}^3</math></b>						
Wyniki obliczeń masy przepływu substancji			Results of calculations of mass flow			
$M$	$u_{ZR}(M)$	$u_{ZS}(M)$	$u_{ZC}(M)$	$u'_{ZR}(M)$	$u'_{ZS}(M)$	$u'_{ZC}(M)$
kg	kg	kg	kg	%	%	%
2508	21	155	157	0,83	6,20	6,25
<b>2738</b>	<b>23</b>	<b>170</b>	<b>171</b>	<b>0,83</b>	<b>6,20</b>	<b>6,25</b>
<b><math>M = (2,74 \pm 0,34) \text{ Mg}</math></b>						

Objaśnienia: wytłuszczone liczby oznaczają wartości skorygowane;  $V$  – objętość przepływu;  $u_{ZR}(V)$ ,  $u_{ZS}(V)$ ,  $u_{ZC}(V)$  – przypadkowa, systematyczna i całkowita złożona bezwzględna niepewność pomiaru  $V$ ;  $u'_{ZR}(V)$ ,  $u'_{ZS}(V)$ ,  $u'_{ZC}(V)$  – przypadkowa, systematyczna i całkowita złożona względna niepewność pomiaru  $V$ ;  $M$  – masa przepływu substancji;  $u_{ZR}(M)$ ,  $u_{ZS}(M)$ ,  $u_{ZC}(M)$  – przypadkowa, systematyczna i całkowita złożona bezwzględna niepewność pomiaru  $M$ ;  $u'_{ZR}(M)$ ,  $u'_{ZS}(M)$ ,  $u'_{ZC}(M)$  – przypadkowa, systematyczna i całkowita złożona względna niepewność pomiaru  $M$ ;

Explanations: corrected values are given in bold;  $V$  – volume of water;  $u_{ZR}(V)$ ,  $u_{ZS}(V)$ ,  $u_{ZC}(V)$  – random, systematic and total complex absolute uncertainty of the measurement of  $V$ ;  $u'_{ZR}(V)$ ,  $u'_{ZS}(V)$ ,  $u'_{ZC}(V)$  – random, systematic and total complex relative uncertainty of the measurement of  $V$ ;  $M$  – mass of a flowing substance;  $u_{ZR}(M)$ ,  $u_{ZS}(M)$ ,  $u_{ZC}(M)$  – random, systematic and total complex absolute uncertainty of the measurement of  $M$ ;  $u'_{ZR}(M)$ ,  $u'_{ZS}(M)$ ,  $u'_{ZC}(M)$  – random, systematic and total complex relative uncertainty of the measurement of  $M$ ;

- konieczność szacowania niepewności metodą typu B, a więc w oparciu o założenia dotyczące przypadkowych, szczególnie zaś systematycznych niepewności granicznych wyników pomiarów bezpośrednich na przelewie trójkątnym oraz przypadkowych, szczególnie zaś systematycznych niepewności granicznych analiz stężeń N-NO<sub>3</sub> w nieakredytowanym laboratorium.

## BILANSOWANIE WODY I MASY

Na zakończenie omówiono przypadek obliczania objętości wody albo masy substancji zawartej w wodzie retencjonowanych w określonym czasie na określonym obszarze i niepewności wyniku tych obliczeń. W takim przypadku podstawę obliczeń stanowią pomiary dopływu wody (substancji) na ten obszar i jej odpływu z tego obszaru oraz niepewności tych wartości.

Objętość wody albo masę substancji retencjonowanej na całym obszarze oblicza się sumując algebraicznie (z uwzględnieniem znaku) wszystkie dopływy i odpływy, tj.  $\Delta V = \sum_{i=1}^S V_i$  oraz  $\Delta M = \sum_{i=1}^S M_i$ . Niekiedy zachodzi potrzeba odniesienia objętości retencjonowanej wody albo masy substancji do jednostki powierzchni  $F$  obszaru i wtedy  $\Delta v = \sum_{i=1}^S v_i$  oraz  $\Delta m = \sum_{i=1}^S m_i$ , gdzie: ( $v_i = V_i/F$ ,  $m_i = M_i/F$ ).

Na podstawie tych zależności i wzorów (7) można wyprowadzić formuły na niepewność standardową tak uzyskanego wyniku. W przypadku niepewności standardowej bezwzględnej przyjmą one postać:

$$u_Z(\Delta V) = \sqrt{\sum_{i=1}^S u(V_i)^2} \quad (22a)$$

$$u_Z(\Delta M) = \sqrt{\sum_{i=1}^S u(M_i)^2}$$

$$u_Z(\Delta v) = \frac{1}{F} \sqrt{\sum_{i=1}^S u(V_i)^2 + u'(F)^2 \cdot \sum_{i=1}^S V_i^2} \quad (22b)$$

$$u_Z(\Delta m) = \frac{1}{F} \sqrt{\sum_{i=1}^S u(M_i)^2 + u'(F)^2 \cdot \sum_{i=1}^S M_i^2}$$

gdzie:

- $V_i, M_i$  – odpowiednio objętość i masa dopływu lub odpływu na  $i$ -tym ujęciu lub zrzucie,
- $u(V_i), u(M_i)$  – niepewność standardowa bezwzględna pomiaru objętości  $V_i$  i masy  $M_i$ ,
- $F$  – pole powierzchni obszaru retencjonowania wody lub masy substancji,
- $u'(F)$  – niepewność standardowa względna (bez miana) pomiaru powierzchni  $F$ ,
- $v_i, m_i$  – odpowiednio objętość i masa dopływu lub odpływu na  $i$ -tym ujęciu lub zrzucie w przeliczeniu na jednostkę powierzchni obszaru,
- $S$  – liczba ujęć na obszar i zrzutów z obszaru.

Z analizy wzorów (22) wynika, że niepewność pomiaru ilości dopływu rośnie wraz ze wzrostem liczby czynnych ujęć/zrzutów. W takich sytuacjach nie można sugerować się niepewnościami względnymi, gdyż w warunkach równowagi dopływu i odpływu ( $\Delta V \approx 0$ ,  $\Delta M \approx 0$ ) niepewność względna wartości  $\Delta V$  i  $\Delta M$  może osiągać bardzo duże wartości, co wynika z definicji tej niepewności, np.  $u'_Z(\Delta V) = u_Z(\Delta V)/\Delta V$  i  $u'_Z(\Delta M) = u_Z(\Delta M)/\Delta M$ .

Wzory (22) wyprowadzono zakładając, że wyniki pomiarów  $V_i, M_i$  (albo  $v_i, m_i$ ) dla  $i = 1, 2, \dots, S$  nie są ze sobą wzajemnie skorelowane. Założenie to będzie raczej spełnione w przypadku pomiaru (obliczania) objętości przepływu na różnych ujęciach lub zrzutach wody na podstawie pomiarów objętościowego natężenia przepływu wykonywanych różnymi metodami (np. z użyciem różnych przelewów). Natomiast założenie takie może być wątpliwe w przypadku pomiaru retencji masy



na danym obszarze, na podstawie pomiarów objętościowego natężenia przepływu na wpustach i upustach wody wykonywanych różnymi metodami i pomiarów stężeń substancji na tych urządzeniach wykonywanych tą samą metodą. Przykładem może być pomiar retencji N-NO<sub>3</sub> w stawie na podstawie pomiarów natężenia objętościowego przepływu wody na przelewach zainstalowanych w mniach spustowych i wpustowych oraz pomiarów stężenia tego pierwiastka tą samą metodą na tych urządzeniach. W tym przypadku systematyczna niepewność standardowa wyników pomiaru objętości przepływu w wodzie i masy substancji w niej zawartej, obliczona z wzorów (22) może być zawyżona. Wynika to z tego, że różnica między systematyczną niepewnością standardową wyników pomiarów na wpustach a systematyczną niepewnością standardową wyników pomiarów na upustach może być mniejsza od standardowej niepewności wyników pomiarów na tych urządzeniach branych oddzielnie. W celu uniknięcia tego problemu należałoby analizy stężenia substancji skorygować, wprowadzając odpowiednie poprawki i usuwając w ten sposób błędy systematyczne wyników analiz.

## WNIOSKI

1. Do obliczania objętości przepływu wody i masy przepływających w niej substancji można stosować jedną z numerycznych metod przybliżonego obliczania całek oznaczonych – metodę prostokątów lub metodę trapezów (wzory (13) albo (14)). Bardziej dokładna (dwa razy) jest metoda prostokątów, zaś bardziej wygodna – metoda trapezów, gdyż nie żąda się tu stałego okresu próbkowania.

2. Błąd obliczeń tymi metodami jest odwrotnie proporcjonalny do kwadratu liczby pomiarów, tj. wprost proporcjonalny do kwadratu okresu próbkowania. Dokładność obliczeń można poprawić, na podstawie dodatkowych obliczeń ilości przepływu przy podwójnym okresie próbkowania (wzór (5)).

3. Wynik obliczeń objętości lub masy przepływu, uzyskany metodą prostokątów albo metodą trapezów, stanowiący najlepsze przybliżenie wartości dokładnej, powinien być uzupełniony o jego niepewność, na podstawie której wyznacza się przedział liczbowy w jakim, z określonym prawdopodobieństwem, np. 95%, znajduje się wartość dokładna.

4. W pomiarach (obliczeniach) objętości i masy przepływu na podstawie co najmniej 15 pomiarów cząstkowych (pomiar natężenia przepływu, a w przypadku pomiaru przepływu masy – dodatkowo pomiar stężenia substancji w wodzie) podstawę obliczeń niepewności mogą stanowić, w przypadku objętości przepływu – systematyczne niepewności standardowe pomiaru natężenia objętościowego przepływu, zaś w przypadku masy – dodatkowo systematyczne niepewności standardowe pomiarów stężenia substancji w wodzie.

5. W pomiarach (obliczeniach) objętości i masy przepływu na podstawie mniejszej liczby (<15) pomiarów cząstkowych podstawę obliczeń niepewności

powinny stanowić nie tylko systematyczne, lecz również przypadkowe niepewności standardowe pomiaru natężenia objętościowego przepływu i, w przypadku pomiaru masy – dodatkowo, przypadkowe niepewności pomiarów stężeń substancji w wodzie.

6. Stężenia substancji w wodzie i ich niepewności powinny być określone przez chemiczne laboratoria akredytowane. Konieczne jest, aby laboratoria te, oprócz całkowitej niepewności wyniku analizy, podawały jej składowe – niepewność przypadkową i systematyczną. Wskazane jest, aby wyniki analiz laboratoryjnych były pozbawione błędów systematycznych, czyli charakteryzowały się zerową systematyczną niepewnością standardową.

## LITERATURA

- ARENDAŃSKI J. 2006. Niepewność pomiarów. Warszawa. Ofic. Wydaw. PW. ISBN 83-7207-653-7 ss. 167.
- BJÖRCK Å., DAHLQUIST G. 1987. Metody numeryczne. Wyd. 2. Warszawa. PWN. ISBN 83-01-04276-1 ss. 546.
- BOS M.G. (red.) 1978. Discharge measurement structures. Wageningen. ILRI ss. 458.
- DĄBKOWSKI SZ.L., JĘDRYKA E., KACA E., KOVALENKO P.I., ČALYJ B.J., MICHAJLOV J.A. 1997. Urządzenia i budowle do pomiaru przepływu wody w systemach wodno-melioracyjnych. Biblioteczka Wiadomości IMUZ. Nr 91. Falenty. Wydaw. IMUZ. ISBN 83-85735-64-X ss. 149.
- DZIUBIŃSKI I., ŚWIĄTKOWSKI T. (red.) 1980. Poradnik matematyczny. Warszawa. PWN. ISBN 83-01-01829-1 ss. 908.
- KACA E. 1996. Wzorcowanie budowli wodnomelioracyjnych. Biblioteczka Wiadomości IMUZ. Nr 87. Falenty. Wydaw. IMUZ. ISBN 83-85735-26-7 ss. 48.
- KACA E. 2011. Niepewność pomiaru. Laboratorium. Przegląd Ogólnopolski. Nr 3–4 s. 64–66.

*Edmund KACA*

### MEASUREMENT OF WATER FLOW AND MASS OF SUBSTANCES CONTAINED THEREIN AND ITS UNCERTAINTY BASED ON FISHPONDS EXAMPLE

**Key words:** *flow mass, flow volume, mass flow intensity, methods of calculation, uncertainty of measurement, volumetric flow intensity*

### S u m m a r y

The paper presents methods of calculating the volume of flowing water and mass of substances it contains based on measurements of water flow and laboratory analyses of concentrations. These calculations are proposed to be made with the method of rectangles and with especially convenient though less precise method of trapeziums. Error of calculations with these methods is proportional to the square of the sampling period. The accuracy may be improved by following the proposed algorithm.

The need was underlined of characterising the results of calculations by their uncertainty i.e. by the range of values within which, at a certain probability e.g. 95%, falls the exact value. In case of measurements of water volume or mass of substances it contains based on at least 15 partial meas-

urements (measurement of volumetric flow and, for mass calculations, also the concentration of a substance in water) calculations of uncertainty may be based on systematic standard uncertainty of volumetric flow and systematic standard uncertainty of concentration measurements, respectively. When the number of partial measurements is smaller, than the uncertainty should be based not only on systematic but also on random standard uncertainties of volumetric flow measurements and analyses of concentrations.

Concentrations of a substance in water and uncertainty of its measurement should be determined by accredited chemical laboratories, which, apart from the total uncertainty of analytical result should also give its components – random and systematic uncertainty.

The paper gives examples of calculations which used measurements made in one of ponds in the complex Stawy Raszyńskie of the Experimental Farm, Institute of Technology and Life Sciences

**Adres do korespondencji:** prof. dr hab. E. Kaca, Instytut Technologiczno-Przyrodniczy w Falentach, al. Hrabka 3, 05-090 Raszyn; tel. +48 (22) 720-04-20 w. 502, e-mail: E.Kaca@itep.edu.pl