dr Grzegorz Paweł SKORNY, dr Andrzej Antoni CZAJKOWSKI, mgr Jakub ŚLEDZIOWSKI

Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Szczecinie, Wydział Transportu Samochodowego
Higher School of Technology and Economics in Szczecin, Faculty of Motor Transport

O SPIRALI ARCHIMEDESA I JEJ INTERPRETACJI PRZYRODNICZEJ ILUSTRUJĄCEJ BUDOWĘ PAJĘCZYN

Streszczenie

Wstęp i cel: W pracy przedstawiono różne określenia i wybrane własności spirali Archimedesa. Głównym celem pracy jest interpretacja przyrodnicza spirali Archimedesa, a w szczególności jej związek z budową pajęczyn.
Materiał i metody: Materiałem teoretycznym są wybrane źródła z literatury. Materiałem przyrodniczym są zdjęcia pajęczyn wykonane w plenerze. W pracy zastosowano metodę analityczno-numeryczną z wykorzystaniem programu *Mathematica.*
Wyniki: Z badań numerycznych wynika fakt, iż można w sposób przybliżony określić przeciętną długość spirali pajęczej oraz pole jakie ona zakreśla. Istnieje związek geometryczny między spiralą Archimedesa a budową pajęczyn.
Wniosek: Znając własności spirali Archimedesa możliwe jest analityczne wyznaczenie przybliżonych wartości parametrów pajęczyny takich jak długość łuku, pole powierzchni, promień krzywizny oraz krzywiznę spirali pajęczej z wykorzystaniem programu *Mathematica*.

Słowa kluczowe: Spirala Archimedesa, definicje i własności, interpretacja przyrodnicza, symulacja, *Mathematica.*

(Otrzymano: 01.03.2016; Zrecenzowano: 15.03.2016; Zaakceptowano: 31.03.2016)

ABOUT ARCHIMEDEAN SPIRAL AND ITS NATURE INTERPRETATION ILLUSTRATING COBWEBS CONSTRUCTION

Abstract

Introduction and aim: *The paper presents various terms and selected properties of the spiral of Archimedes. The main aim of this paper is interpretation of the natural spiral of Archimedes, and in particular its relationship to the construction of cobwebs.*
Material and methods*: Theoretical material are selected from literature sources. The natural material consists from photos, which were taken outdoors. The paper uses numerical and analytical method using Mathematica program.*
Results*: The research shows that it is possible to approximately determine average length of spiral spider and a field which its outlines. There is some geometric relationship between spiral of Archimedes and the construction of cobwebs.*
Conclusion: *Knowing the properties of Archimedean spiral is possible analytical determination of approximate values cobwebs such as arc length, surface area, radius of curvature and the curvature of the spiral spider using Mathematica.*

Keywords: *Spiral of Archimedes, definitions and properties, natural interpretation, simulation, calculations, Mathematica.*

(Received: 01.03.2016; Revised: 15.03.2016; Accepted: 31.03.2016)

1. Określenia spirali Archimedesa

1.1. Współrzędne biegunowe

Spirala Archimedesa to krzywa w R^2 o równaniu we współrzędnych biegunowych o następującej postaci [1]-[3]:

$$\rho(\varphi) = a \cdot \varphi , \tag{1}$$

gdzie ρ to promień [m], φ – bezwymiarowy kąt między półosią układu współrzędnych biegunowych a promieniem wodzącym punktu spirali, natomiast a – parametr [m] określa wzór:

$$a = \frac{\rho}{\omega} , \tag{2}$$

gdzie ω to bezwymiarowa prędkość kątowa dla promienia ρ.

Wykres krzywej, określonej według wzoru (1), składa się z dwóch gałęzi, a m mianowicie linii odpowiadającej dodatnim wielkościom argumentu φ (Rys. 1) [1]-[3].

Program 1. Wykresy spiral Archimedesa we współrzędnych biegunowych w 2D

Program Mathematica [4]	*Komentarz*
`PolarPlot[{φ,-φ},{φ,0,6Pi},`	*Funkcja i zakres*
`PolarGridLines→Automatic,`	*Siatka*
`PolarAxes→Automatic,`	*Osie współrzędnych*
`PlotStyle→{Black,Thickness[0.008]},`	*Grubość krzywej*
`PolarTicks→{"Degrees",Automatic}]`	*Etykiety stopni (Rys. 1)*

1.2. Współrzędne parametryczne

Spirala Archimedesa we współrzędnych parametrycznych ma następującą postać [1], [3]:

$$x(t) = \rho(t) \cdot \cos(t) , \tag{3}$$

$$y(t) = \rho(t) \cdot \sin(t) , \tag{4}$$

gdzie t to bezwymiarowy kąt, a promień ρ określony wzorem (2) dla zmiennej t.

Jeśli we wzorach (3) i (4) uwzględnimy zależność (1) dla zmiennej t, to wtedy układ współrzędnych parametrycznych przyjmuje następującą jeszcze inną znaną postać:

$$x(t) = at \cdot \cos(t) , \tag{5}$$

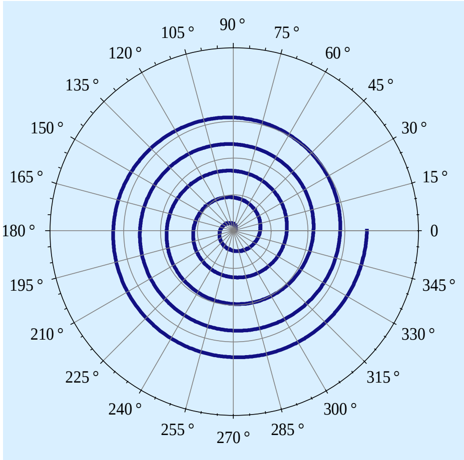
$$y(t) = at \cdot \sin(t) . \tag{6}$$

gdzie $t \in \langle 0,+\infty)$ lub $t \in (-\infty,0\rangle$.

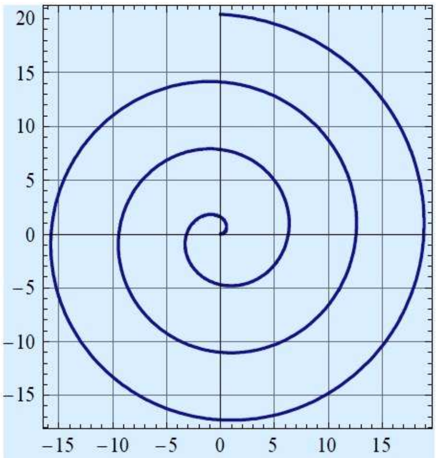
Wykres krzywej, określonej według wzorów (3) i (4) pokazano na rysunku 2 [2].

Program 2. Wykresy spiral Archimedesa we współrzędnych parametrycznych

Program Mathematica [4]	*Komentarz*
`ParametricPlot[{{t Cos[t],t Sin[t]},`	*Funkcje i zakres*
`{-t Cos[t],-t Sin[t]}},{t,0,6Pi},`	*Funkcje i zakres*
`Frame→True,`	*Ramka*
`GridLines→Automatic,`	*Siatka*
`PlotStyle→{{Black,Thickness[0.004]},` `{Black,Dashed,Thickness[0.006]}}]`	*Kolor, grubość i styl obu krzywych (Rys. 2)*



Rys. 1. Spirala Archimedesa w postaci biegunowej dla kąta φ>0 *(Mathematica)*
Źródło: Opracowanie własne Autorów
Fig. 1. Archimedean spiral in polar presentation for angle φ>0 *(Mathematica)*
Source: Elaboration of the Authors



Rys. 2. Spirala Archimedesa w postaci parametrycznej dla kąta t>0 *(Mathematica)*
Źródło: Opracowanie własne Autorów
Fig 2. Archimedean spiral in parametric presentation for angle t>0 *(Mathematica)*
Source: Elaboration of the Authors

1.3. Współrzędne kartezjańskie w przestrzeni 2D

Zauważmy, że prawdziwe są następujące zależności (Rys. 3) [1], [3]:

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \tag{7}$$

skąd otrzymujemy

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{8}$$

gdzie ρ - promień , x oraz y – współrzędne punktu na krzywej. Ponadto mamy zależność:

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{y}{x}, \tag{9}$$

skąd dostajemy

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{10}$$

Z równania (1) można otrzymać równanie ogólne spirali Archimedesa po podstawieniu zależności (8) i (10). Wtedy otrzymujemy równanie ogólne w następującej postaci [1], [3]:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{11}$$

Program 3. Wykres spirali Archimedesa we współrzędnych biegunowych w 2D

Program Mathematica [4]	*Komentarz*
`PolarPlot[φ,{φ,0,6Pi},` `Ticks→None,PlotStyle→Red]`	*Funkcja, zakres zmiennej φ* *Bez tiksów, kolor krzywej (Rys. 3)*

Program 4. Wykres spirali Archimedesa we współrzędnych parametrycznych w 2D (Rys 3) [1]

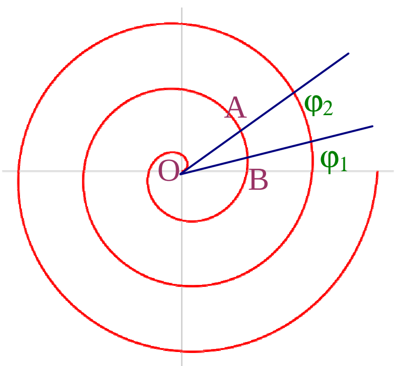
Program Mathematica [4]	*Komentarz*
`ParametricPlot[t{Cos[t],Sin[t]},{t,0,6Pi},` `Ticks→None,PlotStyle→Red,ImageSize→150]`	*Funkcja, zakres zmiennej t bez tiksów, kolor, rozmiar (Rys. 3)*

1.4. Współrzędne kartezjańskie w przestrzeni 3D

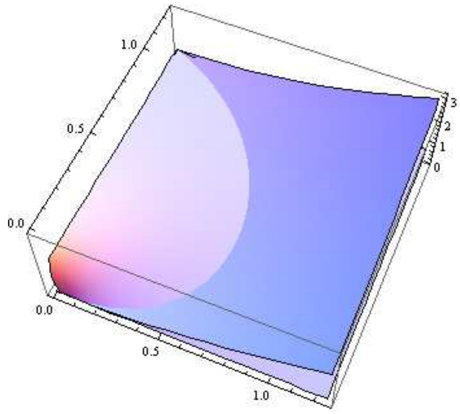
Biorąc pod uwagą zależność ogólną (11) możemy uzyskać przestrzenny obraz spirali Archimedesa (Rys. 4) [1], [2].

Program 5. Wykres spirali Archimedesa we współrzędnych przestrzennych 3D

Program Mathematica [4]	*Komentarz*
`Plot3D[{ArcTan[y/x],x^2+y^2},`	*Funkcje*
`{x,0.0001,1.25},{y,0.0001,1.25},`	*Zakres zmiennych x oraz y*
`Mesh→None]`	*Wygładzenie powierzchni (Rys. 4)*



Rys. 3. Spirala Archimedesa w postaci ogólnej punkty A, B oraz kąty φ_1 i φ_2 *(Mathematica 7)*
Źródło: Opracowanie własne Autorów
Fig. 3. Archimedean spiral in general form points A, B and angles φ_1 i φ_2 *(Mathematica 7)*
Source: Elaboration of the Authors



Rys. 4. Spirala Archimedesa w postaci 3D *Widok z góry (Mathematica 7)*
Źródło: Opracowanie własne Autorów
Fig. 4. Archimedean spiral in 3D form *Top view (Mathematica 7)*
Source: Elaboration of the Authors

2. Własności spirali Archimedesa

- Każda półprosta przecina wykres spirali Archimedesa w punktach A_1, A_2, … , A_k spełniających warunek [1]:

$$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_iA_{i+1} = ... = 2\pi = \text{const.} \tag{12}$$

- Długość łuku OA wyraża się następująco [1], [3]:

$$L = \frac{a}{2}\cdot\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1})\right]. \tag{13}$$

- Pole wycinka AB spirali wyraża się wzorem [1], [3]:

$$P_{AB} = \frac{1}{6}a^2(\varphi_2^3 - \varphi_1^3). \tag{14}$$

- Promień krzywizny spirali określony jest wzorem [3]:

$$R = a\frac{\sqrt{(\varphi^3+1)^3}}{\varphi^2+2}. \tag{15}$$

- Znając promień krzywizny można określić również krzywiznę spirali [3]:

$$\kappa = \frac{1}{R}. \tag{16}$$

3. Interpretacja przyrodnicza

3.1. Sieć pajęcza

Nić pajęcza to wielofunkcyjna, długa i cienka nić, powstająca w efekcie zakrzepnięcia na powietrzu wydzieliny gruczołów przędnych niektórych stawonogów zbudowanej z włókien fibroinowych sklejonych serycyną. Nić pajęcza jest elastyczna, nie rozpuszcza się w wodzie, jest kilkadziesiąt razy cieńsza od ludzkiego włosa i ma bardzo dobre własności mechaniczne. Może zwiększyć swoją długość o 40% bez rozerwania się.

Charakteryzuje się dużą wytrzymałością mechaniczną, najwyższą wśród naturalnych włókien. Nici przędne większości pająków cechuje wytrzymałość dwukrotnie wyższa niż wytrzymałość stali o tym samym przekroju.

Naukowcy pokładają nadzieje na opracowanie wydajnych metod pozyskiwania nici przędnych (dorównujących parametrami niciom pajęczym) w manipulacjach genetycznych dokonanych na jedwabnikach (Rys. 5-10) [5].

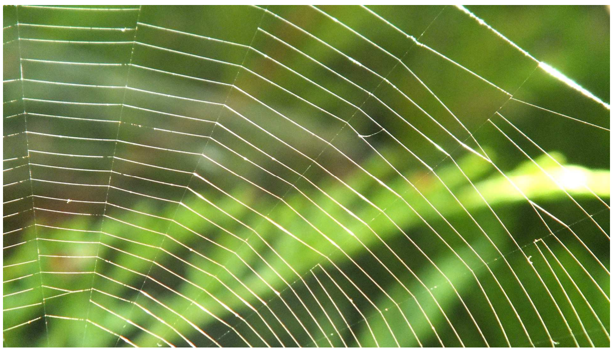
Rys. 5. Pajęczyna, widok ogólny
Fig. 5. Cobweb, general view

Rys. 6. Pajęczyna, powiększenie
Fig. 6. Cobweb, enlargement

Rys. 7. Pajęczyna, widok z boku
Fig. 7. Cobweb, lateral view

Rys. 8. Pajęczyna, odstępy
Fig. 8. Cobweb, intervals

Rys. 9. Pajęczyna, widok na siatkę
Fig. 9. Cobweb, net view



Rys. 10. Pajęczyna, widok na odstępy
Fig. 10. Cobweb, interval view

Photo: G.P. Skorny, J. Śledziowski

3.2. Analiza numeryczna parametrów spirali pajęczej

Przyjęte dane do analizy numerycznej parametry spirali pajęczej pokazano w tablicy 1.

Tablica 1. Wybrane parametry spirali pajęczej / Selected parameters of cobwebs spiral

Symbol:	*Objaśnienie:*	*Wartość:*		*Wymiar:*	
a	odstęp między ramionami spirali pajęczej	10	0,01	[mm]	[m]
n	przybliżona liczba ramion spirali pajęczej	25		-	
φ	kąt spirali pajęczej	$0{,}29\cdot\pi n$		[rad]	
φ_1, φ_2	kąt początkowy i końcowy spirali pajęczej	$0;\ 0{,}29\cdot 180\cdot n$	$0;\ 0{,}29\cdot\pi\cdot n$	[°]; [rad]	
		$0{,}29\cdot 180\cdot 25=1305°$	*$0{,}29\cdot\pi\cdot 25=22{,}7765$*		

Źródło: Opracowanie Autorów / Source: Elaboration of the Authors

Program 6. Obliczenie numeryczne parametrów pajęczyny *(spierali Archimedesa)*

Program Mathematica [4]	*Komentarz*
`a:=0.01  n:=25  φ:=0.29*Pi*n  φ1:=0.001  φ2:=0.29*Pi*n`	*Parametry pajęczyny (Tab. 1)*
`L=0.5*a*(f*Sqrt[f^2+1]+Log[f+Sqrt[f^2+1]])`	*Długość łuku pajęczyny*
`P=a^2*(f2^3-f1^3)/6`	*Pole powierzchni pajęczyny*
`R=a*(f^3+1)^1.5/(f^2+2)`	*Promień krzywizny pajęczyny*
`k=1/R`	*Krzywizna pajęczyny*

➢ Długość łuku L [m] spirali nici pajęczej, obliczona wg wzoru (13) jest równa:

$$L = \frac{0{,}01}{2}\left[22{,}7765\cdot\sqrt{22{,}7765^2+1}+\ln\left(22{,}7765+\sqrt{22{,}7765^2+1}\right)\right]\approx 2{,}62\,. \tag{17}$$

➢ Pole powierzchni P [m^2] spirali nici pajęczej, obliczone wg wzoru (14) jest równe:

$$P = \frac{0{,}01^2}{6}\cdot(22{,}7765^3-0{,}001^3)\approx 0{,}19693\,. \tag{18}$$

➢ Promień krzywizny R [m] spirali nici pajęczej, obliczony wg wzoru (15) ma postać:

$$R = 0{,}01\cdot\frac{\sqrt{(22{,}7765^3+1)^3}}{22{,}7765^2+2}\approx 24{,}6663\,. \tag{19}$$

➢ Krzywizna κ [m^{-1}] spirali nici pajęczej, obliczona wg wzoru (16) ma postać:

$$\kappa = \frac{22{,}7765^2+2}{0{,}01\cdot\sqrt{(22{,}7765^3+1)^3}}\approx 0{,}0405412\,. \tag{20}$$

4. Wniosek

Znając własności spirali Archimedesa możliwe jest analityczne wyznaczenie przybliżonych wartości parametrów spirali pajęczej takich jak długość łuku, pole powierzchni, promień krzywizny oraz krzywiznę stosując program numeryczny *Mathematica*.

Literatura

[1] Dziubiński I., Świątkowski T. (pod red.): *Poradnik matematyczny*. Warszawa: PWN, 1978.
[2] Lockwood E.H.: *A Book of Curves*. Cambridge University Press, Cambridge, England 1967.
[3] Niczyporowicz E.: *Krzywe płaskie. Wybrane zagadnienia z geometrii analitycznej i różniczkowej*. Warszawa: PWN, 1991.
[4] Wolfram S.: *The Mathematica Book, 4th edition.* Wolfram Media and Cambridge University Press, 1999.
[5] *http://pl.wikipedia.org/wiki/Nić_pajęcza (dostęp 30.09.2013).*