Adam ŻUCHOWSKI
POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ

Przegląd metod wyznaczania parametrów dynamiki obiektów oscylacyjnych w oparciu o pomiar odpowiedzi skokowej

Prof. dr hab. inż. Adam ŻUCHOWSKI

Profesor zwyczajny zatrudniony w Instytucie Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej. Ze szkolnictwem wyższym związany zawodowo od 1955 roku (Politechnika Wrocławska, Politechnika Szczecińska). Jest współtwórcą polskiej szkoły miernictwa dynamicznego, posiada w dorobku ponad 300 publikacji. W kwietniu 2005 roku upłynęło 50 lat jego działalności naukowej.

e-mail: chlod@ps.pl

Streszczenie

Omówiono kilka prostych metod wyznaczania parametrów obiektów oscylacyjnych, wykorzystujących pomiar charakterystyki skokowej z uwzględnieniem zakresu ich stosowalności, zalet i wad. Stwarza ono pewna alternatywę i ułatwia wybór właściwej metody.

Słowa kluczowe: obiekty oscylacyjne, pomiar parametrów, charakterystyka skokowa

The Review of Methods Based on Step Response Measurements Applied to Estimation of Oscillatory System Parameters

Abstract

The several methods for estimation of oscillatory system parameters have been presented. All considered methods use the result of measurement of system step response. The disadvantages and advantages as well as scope of application of methods under consideration have been deeply discussed. These comparative discussion seems to be helpful in decision process aimed at choice of best method for given circumstances.

Keywords: Oscillatory systems, measurement of parameters, system step response

1. Wstęp

Transmitancję obiektu oscylacyjnego zapisuje się zwykle w postaci:

$$K(s) = \frac{k}{1+2\cdot B\cdot T\cdot s+T^2\cdot s^2} \tag{1}$$

gdzie k jest współczynnikiem statycznego wzmocnienia, B – stopniem tłumienia, a T – odwrotnością pulsacji drgań swobodnych. Przy takim zapisie charakterystyka skokowa $h(t)$ dana jest wzorem:

$$h(t) = k\left\{1 - exp\left(-\frac{B\cdot t}{T}\right)\cdot\left[cos\frac{t}{T}\sqrt{1-B^2} + \frac{B}{\sqrt{1-B^2}}\cdot sin\frac{t}{T}\sqrt{1-B^2}\right]\right\} \tag{2}$$

Pierwsze ekstremum charakterystyki skokowej (maksimum) wynosi:

$$h_{max} = k\cdot\left(1 + exp\left(\frac{-\pi\cdot B}{\sqrt{1-B^2}}\right)\right) \tag{3}$$

Dla stanu ustalonego przy $B > 0$ $h(\infty) = k$, co ze wzoru (3) pozwala wyznaczyć stopień tłumienia B, natomiast czas t_k po upływie którego charakterystyka skokowa po raz pierwszy osiąga wartość k określa wzór:

$$t_k = T\cdot\frac{\pi - arccos\,B}{\sqrt{1-B^2}} \tag{4}$$

skąd można wyznaczyć T. Ta „klasyczna" metoda może być stosowana wyłącznie w zakresie zmian $0<B<1$, a w praktyce w zakresie węższym, gdyż przy B bliskim zeru lub bliskim jedności nieuniknione błędy pomiaru h_{max} i $h(\infty)$ mają silny wpływ na wyniki obliczenia wartości B [1]. Dla ujemnych wartości B wyznaczenie $h(\infty)$ nie jest możliwe.

2. Metoda dwóch kolejnych ekstremów

Pierwsze ekstremum (maksimum) charakterystyki skokowej (2) zachodzące dla $t_1 = \frac{\pi\cdot T}{\sqrt{1-B^2}}$ określa wzór (3). Drugie ekstremum (minimum) zachodzące dla czasu t_2 dwukrotnie dłuższego wynosi:

$$h_{min} = k\cdot\left\{1 - exp\left(-\frac{2\cdot\pi\cdot B}{\sqrt{1-B^2}}\right)\right\} \tag{5}$$

i tym samym oznaczając: $x = exp\left(-\frac{\pi\cdot B}{\sqrt{1-B^2}}\right)$ otrzymuje się związek:

$$x = 1 - \frac{h_{min}}{h_{max}} \tag{6}$$

pozwalający wyznaczyć stopień tłumienia B bez pomiaru $h(\infty)$ i niezależnie od znaku B przy spełnieniu warunku $-1<B<1$ (praktycznie w węższych granicach i z wyłączeniem wartości B bliskich zeru z wspomnianych już uprzednio powodów). Po wyznaczeniu B w oparciu o pomiar h_{max} i h_{min} można wyznaczyć współczynnik wzmocnienia ze wzoru (3) lub (5) a znając k wyznaczyć parametr T ze wzoru (4) dla $B>0$, lub z wzoru:

$$t_k = T\cdot\frac{arccos\,B}{\sqrt{1-B^2}} \tag{7}$$

dla ujemnych wartości B. Tym samym zakres stosowalności metody ulega rozszerzeniu, a czas pomiarów jest krótszy (zbędne wyczekiwanie na wyznaczenie wartości k).

3. Metoda wykorzystująca pomiary wartości $h(t_1)$ i $h(t_1/2)$

W tej metodzie $h(t_1) = h_{max}$ (wzór (3)), natomiast dla $t=0.5\cdot t_1$ otrzymuje się

$$h\left(t_1/2\right)=k\cdot\left\{1-\frac{B}{\sqrt{1-B^2}}\cdot exp\left(-\frac{\pi\cdot B}{2\sqrt{1-B^2}}\right)\right\} \tag{8}$$

a znając stosunek $Q = h(t_1/2) / h(t_1)$ można wyznaczyć stopień tłumienia B albo korzystając ze specjalnie przygotowanej charakterystyki $Q=f(B)$, albo korzystając z dobrze ją aproksymującej zależności:

$$Q\cong 0.5+\frac{22}{75}\cdot B\cdot exp\left(\frac{45}{72}\cdot B^3\right) \tag{9}$$

Dla małych B można obliczyć jego wartość według metody rekurencyjnej

$$B_1=\frac{75}{22}\cdot\left(Q-0.5\right)$$

$$B_2=\frac{75}{22}\cdot exp\left(-\frac{45}{72}\cdot B_1^3\right)\cdot\left(Q-0.5\right) \tag{10}$$

$$B_3=...$$

Wadą metody jest konieczność pomiaru czasu t_1 (niewielka dokładność!), ograniczenie B do zakresu $-1<B<1$ i wrażliwość wyników zarówno przy małych jak i przy dużych B. Parametry T i k wyznacza się tak, jak w metodzie dwóch kolejnych ekstremów, ale tu pomiary trwają jeszcze krócej

4. Metoda typowa dla modelu Strejca

Wykorzystując znane metody identyfikacji parametrów modelu Strejca np. [2], [3] wyznacza się parametry transmitancji:

$$K\left(s\right)=\frac{k}{\left(1+s\cdot\frac{T}{n}\right)^n} \tag{11}$$

nie zważając na to, że charakterystyka skokowa badanego obiektu może posiadać dodatnie maksimum, a następnie w oparciu o zależności podane np. w [4] wyznacza się stopień tłumienia B i parametr T ze wzorów:

$$B=\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n-3\right\}^{-0.5}\quad,\quad 2\cdot B\cdot T=T_1 \tag{12}$$

Jest to metoda niedokładna, oparta na zależnościach przybliżonych i może być wykorzystywana w zakresie zmian $0.48\le B<\infty$, a więc przede wszystkim w zakresie wartości stopnia tłumienia, dla których obiekt nie jest elementem oscylacyjnym.

Korzystniejsza wydaje się nieco inna metoda polegająca na wyznaczeniu stanu ustalonego $h(\infty)$ = k, czasu t_1, przecięcia stycznej do charakterystyki skokowej wychodzącej z punktu $t=0$, $h(t)=0$ z linią $h(\infty)$ = k , oraz czasu t_2 dla którego $h(t_2)=0.65\cdot k$. Wykorzystując obliczenia symulacyjne można albo utworzyć specjalne charakterystyki pomocnicze zależności $t_1/t_2 = f_1(B)$, $tg\phi=\frac{k}{T}\cdot f_2\left(B\right)$ gdzie ϕ jest kątem nachylenia owej stycznej, albo wykorzystać dość dokładne wzory przybliżone:

$$f_2\left(B\right)\cong\frac{0.725}{1+1,42\cdot B} \tag{13}$$

$$f_1\left(B\right)\cong 0.92\cdot\left(\frac{B+1.5}{B+0.5}\right)\cdot\left(1-exp\left(-3.8\cdot B^{1,2}\right)\right)$$

ważne w zakresie zmian $0.5\le B\le 5$, a więc także przede wszystkim dla obiektów nie będących już członami oscylacyjnymi.

5. Metoda pozornego przesunięcia zer i biegunów transmitancji

Jeżeli na wejście obiektu zostanie podany sygnał $x(t) = 1(t)\cdot exp(a\cdot t)$, a sygnał wyjściowy będzie przemnożony przez człon $y_1(t) = y(t)\cdot exp(-a\cdot t)$ to związek pomiędzy $x(t)$ i $y_1(t)$ określi skokową charakterystykę transmitancji:

$$K\left(s+a\right)=\frac{k}{\left(1+2\cdot B\cdot T\cdot a+T^2\cdot a^2\right)+s\cdot 2\cdot T\left(B+T\cdot a\right)+s^2\cdot T^2} \tag{14}$$

co odpowiada transmitancji obiektu oscylacyjnego o zastępczym wzmocnieniu:

$$k_z=\frac{k}{1+2\cdot B\cdot T\cdot a+T^2\cdot a^2} \tag{15}$$

zastępczym stopniu tłumienia

$$B_z=B+T\cdot a \tag{16}$$

i zastępczym parametrze

$$T_z=\frac{T}{1+2\cdot B\cdot T\cdot a+T^2\cdot a^2} \tag{17}$$

W przypadku ujemnych wartości B poprzez odpowiedni dobór parametru a otrzymuje się dodatnie B_z i jeżeli jest ono mniejsze od jedności można wyznaczyć B_z, T_z, i k_z w sposób taki, jak w np. metodzie dwóch kolejnych ekstremów. Wykorzystując związki (15, (16) i (17) otrzymuje się równanie:

$$\left(a\cdot T_z\right)\cdot B^2-B+B_z-\left(a\cdot T_z\right)\cdot B_z^2-\left(a\cdot T_z\right)=0 \tag{18}$$

pozwalające wyznaczyć B (ujemne!), a następnie ze wzorów (15) i (16) parametry k i T. Zastosowanie tej metody przy dużym, dodatnim $B>1$ i ujemnym a, celem zmniejszenia wartości B_z nie jest możliwe, umożliwia ona natomiast pomiary w przypadku dużych, ujemnych mniejszych od -1 wartości B.

6. Podsumowanie

Powyższy przegląd z całą pewnością nie obejmuje wszystkich możliwych metod wyznaczania parametrów obiektów oscylacyjnych, ale wskazuje na praktyczne możliwości radzenia sobie w sytuacjach, w których metoda „klasyczna” zawodzi. Warto wspomnieć o bardzo skutecznej metodzie wykorzystującej procesy tzw. uśrednionego różniczkowania i również charakterystykę skokową (choć niekoniecznie) ale metoda ta wymaga posłużenia się specjalnym programem komputerowym [6] i dlatego nie została tu przytoczona.

7. Literatura

[1]. Adam Żuchowski: (praca zbiorowa): Laboratorium Teorii Sterowania. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1981

[2]. Stanisław Skoczowski: Eine Bemerkungen zur Approximierung von Regelstrecken mit Ausgleich. Regelungstechnik 7/1983 r.

[3]. Adam Żuchowski: O pewnej metodzie wyznaczania parametrów modelu Strejca. Pomiary Automatyka Kontrola, 10/1993 r.

[4]. Janusz Papliński: Wykorzystanie modelu Strejca dla tworzenia pochodnych modeli dynamiki liniowych obiektów. Rozprawa doktorska. Politechnika Szczecińska, Szczecin, 1996r.

[5]. Adam Żuchowski: Identyfikacja dynamiki liniowych obiektów z wykorzystaniem transformacji $Q\{K(s)\}$. Pomiary Automatyka Kontrola 11/2006r.

[6]. Magdalena Boćkowska, Mariusz Orłowski, Adam Żuchowski: O pewnej metodzie wyznaczania parametrów uproszczonych, liniowych modeli dynamiki obiektów. Pomiary Automatyka Kontrola , 12/1994r.

Artykuł recenzowany