

MODEL DRGANIOWY LAMINOWANEJ PŁYTY PODDANEJ WYMUSZENIU AKUSTYCZNEMU

MICHAŁ SZMIDT

Instytut Lotnictwa

Streszczenie

W artykule opisano w sposób szczegółowy analizę drgań laminowanej płyty prostokątnej wymuszonych przez ciśnienie akustyczne. Wychodząc od równania różniczkowego, opisującego wymuszone drgania płyty prostopadle laminowanej, przedstawiono, krok po kroku, analityczne rozwiązanie równania drgań metodą Fouriera. Uzyskane przez zaprogramowanie oraz wykonanie przez komputer skryptu matematycznego numeryczne rozwiązanie pozwoliło na sporządzenie przebiegów czasowych wychylenia dowolnego punktu płyty, jak również animacji odkształcenia całej powierzchni płyty. Dzięki temu na trójwymiarowych wykresach zostały przedstawione kolejne postacie drgań własnych oraz określono ich charakter i wielkość.

Obliczenia i omówienie wyników przeprowadzono dla dwóch przypadków: płyty wykonanej z aluminium oraz z kompozytu włókno węglowe/żywica epoksydowa. Przyjęte założenia są zgodne z założeniami teorii płyt Kirchhoffa, zaś współczynniki tłumienia zostały zaczerpnięte z literatury opisującej badania empiryczne przeprowadzone przez naukowców amerykańskich i chińskich.

Opisany model drganiowy został opracowany w celu zbadania możliwości zrealizowania w praktyce koncepcji aktywnej redukcji niskoczęstotliwościowego hałasu, panującego w kabinach samolotów z napędem turbośmigłowym. Wtórny źródłem tego hałasu są – pobudzone do drgań dźwiękiem generowanym przez śmigła – cienkościennie elementy poszycia kadłuba, w przybliżeniu dające się zamodelować, jako prostokątna płyta wzbudzana ciśnieniem jednorodnym, zmiennym w czasie jak funkcja sinus.

Słowa kluczowe: Fourier, drgania, tłumienie, hałas, ciśnienie akustyczne, aluminium, kompozyt, płyta

WSTĘP

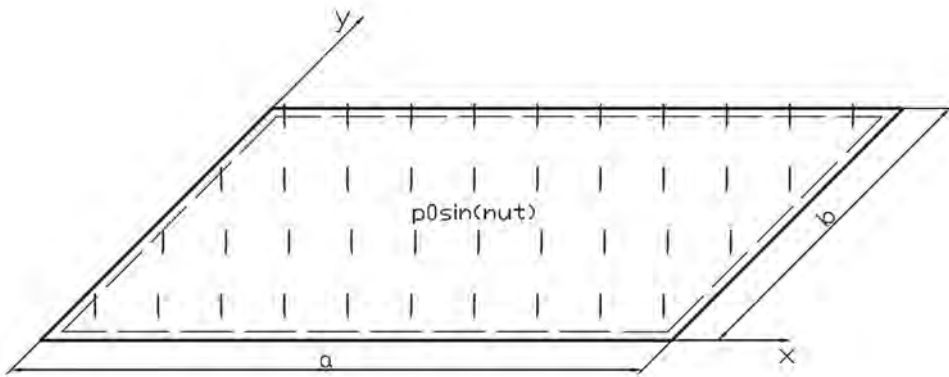
Niniejszy artykuł stanowi opis fragmentu prac prowadzonych w Net Instytucie (pion Instytutu Lotnictwa w Warszawie) w dziedzinie hałasu kabinowego. Zawiera szczegółowy opis modelu analitycznego używanego do symulowania zjawiska przejścia przez cienkościennie elementy poszycia kadłuba, fali dźwiękowej z zewnątrz do wnętrza kabiny samolotu pasażerskiego. Jest to pierwszy etap na drodze do opracowania skutecznej metody aktywnej tłumienia drgań powłokowych elementów kadłuba samolotu, w celach wyciszeniowych.

Rozwijana metoda opiera się na koncepcji zastosowania macierzy naklejonych na powłokowe elementy kadłuba piezoaktuatorów, które sterowane w aktywny sposób, mają redukować drgania ścianek kadłuba, a tym samym ograniczać hałas jaki jest przenoszony do wnętrza samolotu. Metoda, w założeniu, skupia się jedynie na hałasie niskoczęstotliwościowym, a dzieje się tak z dwóch powodów:

- głównym źródłem bardzo uciążliwego i trudnego do wyeliminowania obecnymi metodami hałasu jest hałas generowany przez śmigła (samoloty turbośmigłowe i o napędzie tłokowym)
- średnie i wysokie częstotliwości są skutecznie tłumione przez szeroko rozpowszechnione materiały dźwiękoizolacyjne i dźwiękochłonne.

1. WYPROWADZENIE ZALEŻNOŚCI

W niniejszym opracowaniu zajmiemy się analizą wymuszonych drgań prostokątnej płyty kompozytowej złożonej z $n = 7$ warstw laminatu włókno węglowe – żywica epoksydowa. Kąt laminowania wynosi 90° . Wymuszenie stanowi równomiernie rozłożone wzdłuż wymiarów płyty (jednorodne) ciśnienie akustyczne o wartości 20Pa, zmienne w czasie z częstotliwością ν , symulujące hałas o natężeniu 120dB. Wymiary płyty wynoszą $a = 500$, $b = 500$.



Rys. 1. Analizowana płyta

W rozważaniach wykorzystamy teorię płyt Kirchhoffa [1]. W tym celu przyjmujemy następujące założenia upraszczające:

- proste prostopadłe do powierzchni środkowej płyty pozostają również prostymi prostopadłymi do odkształconej powierzchni środkowej
- naprężenia w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej zanedbywalnie małe w porównaniu do innych naprężeń
- grubość płyty jest wielokrotnie mniejsza od jej pozostałych wymiarów
- ugięcie płyty jest tego samego rzędu wielkości co grubość płyty
- przemieszczenia styczne do powierzchni środkowej są znacznie mniejsze od ugięcia w kierunku prostopadłym
- składowe stanu odkształcenia są małe
- duża liczba warstw pozwala na pominięcie sprzężeń giętno-skrętnych w macierzy sztywności

Model nie daje możliwości uwzględnienia w symulacjach uszkodzeń laminatu typu rozwarstwienie czy obecność zamkniętych w materiale pęcherzy powietrza.

Analizie poddajemy drgania płyty prostopadle laminowanej, wobec czego mamy do czynienia z materiałem ortotropowym w skali makro, a zatem jej sztywność zależeć będzie tylko od czterech współczynników z macierzy sztywności tj. D_{11} , D_{22} , D_{12} oraz D_{66} . Tłumienie wewnętrzne uwzględnimy i przyjmujemy, że jest zależne od dwóch współczynników α oraz β charakteryzujących wartość oporów wiskotycznych, odpowiednio przy ściskaniu/rozciąganiu oraz ścinaniu ($\alpha < \beta$). W przypadku płyty z materiału izotropowego, równanie różniczkowe opisujące drgania wymuszone ma następującą postać:

$$D\Delta^2 w(x, y, t) + \lambda D\Delta^2 \left[\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (1)$$

W naszym przypadku lewa strona równania przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} L = & \alpha D_{11} \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2\beta (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha D_{22} \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \\ & + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + \\ & + \left(\alpha D_{11} \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2\beta (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha D_{22} \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right) \frac{d}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

Sztywności walcowe płyty w poszczególnych kierunkach (D_{11} , D_{12} , ...) są funkcją stałych materiałowych oraz liczby warstw kompozytu. Wyznamy je w zależności od elementów macierzy sztywności (Q_{11}, Q_{12}, \dots).

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} \quad (3)$$

$$Q_{12} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} \quad (4)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2 \nu_{12}}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} \quad (5)$$

Jeśli przyjmujemy, że:

$$F = \frac{Q_{22}}{Q_{11}} \quad (6)$$

$$P = \frac{1}{1 + \mu^3} + \frac{\mu(n-3)(n-1)(\mu+2)}{(n^2-1)(1+\mu)^3} \quad (7)$$

to sztywności walcowe płyty dane będą następującymi zależnościami:

$$D_{11} = (FP - P + 1)h^3 Q_{11} \quad (8)$$

$$D_{12} = \frac{h^3 Q_{12}}{12} \quad (9)$$

$$D_{22} = (P + F - FP) h^3 Q_{11} \quad (10)$$

$$D_{66} = \frac{h^3 Q_{66}}{12} \quad (11)$$

Współczynniki α oraz β określają wartość tłumienia wewnętrznego. Doświadczalnym wyznaczeniem ich wartości zajęli się C. C. Siu i C. W. Bert [3] oraz R. R. Clary [4]. W pierwszej z wymienionych prac przeanalizowane zostały drgania własne płyty kompozytowej złożonej z 24 warstw laminatu włókna boru/żywica epoksydowa. Dla pierwszej częstości własnej, przy swobodnych brzegach płyty, obliczona wartość współczynnika tłumienia wynosi $\alpha = 0,1$ (kąt laminowania 0 stopni) zaś $\beta = 0,8$ (kąt laminowania 90°) i jest podawana jako stosunek mierzonego współczynnika tłumienia do wartości współczynnika tłumienia krytycznego. W przypadku drugiej pracy również analizowane były drgania własne płyt laminowanych z kompozytu złożonego z włókien boru, zanurzonych w osnowie z żywicy epoksydowej. Liczby warstw wynosiły 6, 12, 24 zaś kąty laminowania to 0, 10, 30, 46, 60 oraz 90° . Także i w tym przypadku płyta miała swobodne brzegi. Dla pierwszej częstości drgań własnych zmierzone wartości współczynnika tłumienia wynosiły:

Tabela 1. Wartości współczynników tłumienia w zależności od sposobu ułożenia warstw laminatu oraz postaci drgań

Kąt laminowania	6 warstw	12 warstw	24 warstwy
<i>Pierwsza postać belkowa</i>			
0	0,8	0,2	0,1
90	1,1	0,8	0,8
<i>Pierwsza postać płytowa</i>			
0	2,2	4,0	1,9
90	-	2,0	5,3

Opory ruchu wynikające z lepkości gazów otaczających płytę są uwzględnione w powyższych eksperymentalnie wyznaczonych współczynnikach (pomiaru nie były przeprowadzane w próżni), co czyni je wygodnymi do naszych obliczeń. Analizując postacie drgań i odpowiadające im współczynniki tłumienia, zamieszczone w tabeli 1., możemy zaobserwować, iż współczynnik tłumienia dla postaci, w której płyta podlega nie tylko zgięciu ale i lokalnemu skręceniu jest średnio kilkukrotnie (od 1,4 do 20 razy) większy. Prowadzi to do wniosku, iż współczynnik tłumienia odpowiadający za tłumienie odkształceń tnących oraz skrętnych (β) jest dominującym. Zatem, biorąc pod uwagę wyniki dla pięciu pierwszych postaci drgań własnych, jakie uzyskali autorzy przytoczonych prac, przyjmujemy do dalszych analiz wartość współczynnika tłumienia β na poziomie 0,8 wartości współczynnika dla tłumienia krytycznego, zaś współczynnik α przyjmujemy 5-krotnie mniejszy dla każdej postaci drgań. Ponadto w pracy [4] możemy znaleźć interesujące porównanie tłumienia pierwszej postaci płytowej panelu kompozytowego i płyty aluminiowej. Wynika z niego, iż współczynnik tłumienia w przypadku materiału kompozytowego jest około dwukrotnie większy przy takich samych wymiarach po-

przecznym i grubości badanego elementu (stosunek boków prostokąta $a/b = 6,6$). Wykorzystamy tę informację, by bazując na modelu jaki opracował autor [5], zbadać, przy zachowaniu tego samego rodzaju wymuszenia i sposobu podparcia, jaki wpływ na poziom drgań płyty ma sama zmiana materiału, z którego wykonany jest panel.

Przejdziemy teraz do prawej strony równania (1), gdzie zapisane jest wymuszenie zewnętrzne. W rozpatrywanym przypadku wymuszenie dane jest ciśnieniem akustycznym jednorodnym względem zmiennych x, y ($p_z = \text{const}$) zaś zmieniającym się w czasie z częstotliwością v w postaci:

$$p(x, y, t) = p_z \sin(vt) \quad (12)$$

Równanie (1) jest równaniem niejednorodnym o jednorodnych warunkach brzegowych ((16), (17)). Rozwiążemy je metodą rozdzielenia zmiennych (Fouriera).

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (13)$$

Funkcje własne $W_{mn}(x, y)$ przewidujemy w postaci:

$$W_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (14)$$

Spełniają one dobrze przyjęte założenia tj. zerowe przemieszczenia poprzeczne płyty na brzegach i brak momentu reakcyjnego na brzegach (podparcie przegubowe). Przemieszczenia opisuje zależność (14), natomiast momenty gnące dane są wzorami:

$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (15)$$

$$M_y = D \left(\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right)$$

Powyższe założenia (15) możemy zapisać w postaci odpowiednich (jednorodnych) warunków brzegowych:

$$W_{mn}(0, y) = 0 \quad W_{mn}(a, y) = 0 \quad (16)$$

$$W_{mn}(0, y) = 0 \quad W_{mn}(b, y) = 0$$

oraz:

$$\frac{\partial^2 W_{mn}(0, y)}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 W_{mn}(a, y)}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 W_{mn}(0, y)}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 W_{mn}(b, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (17)$$

Po podstawieniu zależności (13) do równania (1) i obliczeniu odpowiednich pochodnych cząstkowych lewą stroną równania możemy zapisać w postaci:

$$L = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot T_{mn}(y) \cdot \left[D_{11} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 + \frac{d^2}{dt^2} \rho h + \frac{d}{dt} \left[\alpha D_{11} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\beta (D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \alpha D_{22} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] \right] \quad (18)$$

Rozwińmy teraz prawą stroną równania w szereg Fouriera:

$$p_z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{p_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (19)$$

Jako, że ciśnienie jest jednorodne (funkcja stała) współczynniki $a_{p_{mn}}$ są dane zależnością:

$$a_{p_{mn}} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p_z(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (20)$$

Po dwukrotnym scałkowaniu po obszarze $[0, a] \times [0, b]$, otrzymujemy:

$$a_{p_{mn}} = \frac{4p_z (\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{mn\pi^2} \quad (21)$$

Zatem możemy zapisać prawą stroną równania w następującej postaci:

$$P = \sin(\nu t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4p_z (\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{mn\pi^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (22)$$

Pomnóżmy obydwie strony równania przez funkcje ortogonalne $\frac{4}{ab} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$, a następnie dwukrotnie scałkujemy po obszarze $[0, a] \times [0, b]$, co prowadzi do warunku:

$$\begin{aligned} n &= i \\ m &= j \end{aligned} \quad (23)$$

wobec czego lewa strona wygląda następująco:

$$L = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dx dy T_{mn}(y) \cdot \left[D_{11} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 + \frac{d^2}{dt^2} \rho h + \frac{d}{dt} \left[\alpha D_{11} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2\beta (D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \alpha D_{22} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] \right] \quad (24)$$

a prawa strona równania:

$$P = \sin(\nu t) \frac{4p_z (\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{ij\pi^2} \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dx dy \quad (25)$$

Całka:

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{j\pi y}{b}\right) dx dy = \frac{ab}{4} \quad (26)$$

Zatem równanie (1) przyjmuje postać:

$$T_{mn}(y) \cdot \left[D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + \frac{d^2}{dt^2} \rho h + \right. \\ \left. + \frac{d}{dt} \left[\alpha D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2\beta (D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \alpha D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] \right] = \frac{4p_z (\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{ij\pi^2} \sin(\nu t) \quad (27)$$

Wstawmy do tego równania co następuje:

$$D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 = k$$

$$\alpha D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2\beta (D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \alpha D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 = c$$

$$\rho h = m \quad (28)$$

$$T_{ij}(t) = y$$

$$\frac{4p_z (\cos(i\pi) - 1)(\cos(j\pi) - 1)}{ij\pi^2} = F$$

by otrzymać równanie oscylatora harmonicznego (bez tłumienia) z wymuszeniem:

$$ky + cy' + my'' = F \sin(\nu t) \quad (29)$$

Jest to równanie niejednorodne, wobec czego jego rozwiązanie przyjmiemy jako sumę całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego.

$$y = y_1 + y_2 \quad (30)$$

Całkę ogólną y_1 równania jednorodnego (29) wyznaczmy przez podstawienie Eulera:

$$y = e^{rx} \quad (31)$$

które doprowadzi nas do równania charakterystycznego o postaci:

$$mr^2 + cr + k = 0 \quad (32)$$

Wyznacznik tego równania może przyjmować wszystkie trzy wartości (ujemną, zerową lub dodatnią), a którą z nich przyjmie zależy będzie od wartości współczynników α oraz β określających rodzaj tłumienia. Rozpatrzmy te przypadki:

a) wyznacznik ujemny - tłumienie podkrytyczne

$$\Delta = c^2 - 4mk < 0 \quad (33)$$

Wiemy z literatury, iż wartości współczynnika tłumienia odkształceń skrętnych/tnących są średnio kilkukrotnie większe, niż odkształceń rozciągających/ściskających. Jeśli więc przyjmujemy $\beta=5\alpha$ możemy wyznaczyć zakres w jakim muszą się mieścić wartości współczynnika tłumienia odkształceń, by tłumienie było podkrytyczne:

$$\alpha < \frac{\sqrt{4\rho h \left[D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right]}}{D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 5 \cdot 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4} \quad (34)$$

wówczas otrzymujemy dwa różne pierwiastki zespolone:

$$r_1 = \frac{-c + i\sqrt{4km - c^2}}{2m} \quad (35)$$

$$r_2 = \frac{-c - i\sqrt{4km - c^2}}{2m}$$

a zatem całka ogólna ma postać:

$$y_{1a} = e^{-\frac{c}{2m}t} \left(C_1^a \cos \left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} t \right) + C_2^a \sin \left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} t \right) \right) \quad (36)$$

b) wyznacznik zerowy - tłumienie krytyczne

$$\Delta = c^2 - 4mk = 0 \quad (37)$$

Przyjmując takie samo założenie jak poprzednio dochodzimy do warunku na α :

$$\alpha = \frac{\sqrt{4\rho h \left[D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right]}}{D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 5 \cdot 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4} \quad (38)$$

I wówczas równanie (31) ma jeden pierwiastek podwójny:

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \quad (39)$$

a całka ogólna równa się:

$$y_{1b} = e^{-\frac{c}{2m}t} (C_1^b t + C_2^b) \quad (40)$$

c) wyznacznik dodatni – tłumienie nadkrytyczne

(42)

(41)

(43)

oznacza, iż są dwa różne pierwiastki rzeczywiste:

prowadzące do całki ogólnej, jak następuje:

$$y_{1c} = C_1^c e^{-\frac{c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t} + C_2^c e^{-\frac{c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t} \quad (44)$$

Znajdziemy teraz metodą przewidywań całkę szczególną y_2 równania niejednorodnego (29).

$$y_2 = C_3 \sin(vt) + C_4 \cos(vt) \quad (45)$$

Po obliczeniu pochodnych i ich podstawieniu do równania (29) otrzymujemy wyrażenie:

$$(kC_3 - cvC_4 - mv^2C_3)\sin(vt) + (kC_4 + cvC_3 - mv^2C_4)\cos(vt) = F \sin(vt) \quad (46)$$

dzięki któremu możemy zapisać układ dwóch równań pozwalający na wyznaczenie stałych C_3 oraz C_4 :

$$\begin{cases} kC_3 - cvC_4 - mv^2C_3 = F \\ kC_4 + cvC_3 - mv^2C_4 = 0 \end{cases} \quad (47)$$

Stałe te wynoszą:

$$C_3 = \frac{F}{(k - mv^2) + \frac{c^2 v^2}{k - mv^2}}$$

$$C_4 = \frac{-F \frac{cv}{k - mv^2}}{(k - mv^2) + \frac{c^2 v^2}{k - mv^2}} \quad (48)$$

a wówczas całka szczególna równania niejednorodnego (29) przyjmuje postać:

$$y_2 = \frac{F}{\left(k - mv^2\right) + \frac{c^2 v^2}{k - mv^2}} \left(\sin(vt) - \frac{cv}{k - mv^2} \cos(vt) \right) \quad (49)$$

i wraz z każdą z trzech (36), (40) oraz (44) całek ogólnych równania jednorodnego tworzy trzy kompletne rozwiązania równania niejednorodnego. Wyznamy teraz brakujące stałe całek ogólnych. W tym celu musimy obliczyć pierwsze pochodne rozwiązań równania (29), wszystkich trzech przypadków:

$$\begin{aligned} y'_a &= \frac{Fv}{\left(k - mv^2\right) + \frac{c^2 v^2}{k - mv^2}} \left(\cos(vt) + \frac{cv^2}{k - mv^2} \sin(vt) \right) + \\ & - \frac{c}{2m} e^{-\frac{c}{2m}t} \left(C_1^a \cos\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) + C_2^a \sin\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) \right) + \\ & - e^{-\frac{c}{2m}t} \left(-C_1^a \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} \sin\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) + C_2^a \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} \cos\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t\right) \right) \\ y'_b &= \frac{Fv}{\left(k - mv^2\right) + \frac{c^2 v^2}{k - mv^2}} \left(\cos(vt) + \frac{cv^2}{k - mv^2} \sin(vt) \right) + \\ & - \frac{c}{2m} e^{-\frac{c}{2m}t} \left(C_1^b t + C_2^b \right) + e^{-\frac{c}{2m}t} C_1^b \\ y'_c &= \frac{Fv}{\left(k - mv^2\right) + \frac{c^2 v^2}{k - mv^2}} \left(\cos(vt) + \frac{cv^2}{k - mv^2} \sin(vt) \right) + \\ & + C_1^c \frac{c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} e^{-\frac{c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}t} + C_2^c \frac{c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} e^{-\frac{c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}t} \end{aligned} \quad (50)$$

Przyjmując zerowe warunki początkowe:

$$\begin{aligned} y(t=0) &= 0 \\ y'(t=0) &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Wyznamy wartości stałych C_1 oraz C_2 , dla każdego z trzech przypadków a), b) oraz c):

$$C_1^a = \frac{Fcv}{k^2 - 2kmv^2 + m^2v^4 + c^2v^2}$$

$$C_2^a = \frac{\frac{Fc}{\sqrt{4km - c^2}}(c^2 + 2m^2v^2 - 2km)}{k^2 - 2kmv^2 + m^2v^4 + c^2v^2}$$

$$C_1^b = \frac{Fv \left[c \left(c + \sqrt{c^2 - 4km} \right) + 2m \left(mv^2 - k \right) \right]}{\left(c - \sqrt{c^2 - 4km} \right) \left(k^2 - 2kmv^2 + m^2v^4 + c^2v^2 \right)} \quad (52)$$

$$C_2^b = \frac{Fcv}{k^2 - 2kmv^2 + m^2v^4 + c^2v^2}$$

$$C_1^c = \frac{2Fvm^2}{\sqrt{c^2 - 4km} \left(c^2 - c\sqrt{c^2 - 4km} + 2v^2m^2 - 2km \right)}$$

$$C_2^c = \frac{2Fvm^2\sqrt{c^2 - 4km}}{-4km \left(6c^2 - c\sqrt{c^2 - 4km} + 2m^2v^2 - 2km \right) + c^2 \left(2m^2v^2 - c^2 + c\sqrt{c^2 - 4km} \right)}$$

By nie komplikować notacji, zapiszmy kompletne rozwiązanie równania (27), nie cofając podstawień (28):

$$\begin{aligned} T_{ij}^{podkr}(t) &= \frac{F}{\left(k - mv^2 \right) + \frac{c^2v^2}{k - mv^2}} \left(\sin(vt) - \frac{cv}{k - mv^2} \cos(vt) \right) + \\ &+ \frac{Fc}{k^2 - 2kmv^2 + m^2v^4 + c^2v^2} e^{-\frac{c}{2m}t} \left(\begin{aligned} &v \cos\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t \right) + \\ &\frac{(c^2 + 2m^2v^2 - 2km)}{\sqrt{4km - c^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t \right) \end{aligned} \right) \\ T_{ij}^{kr}(t) &= \frac{F}{\left(k - mv^2 \right) + \frac{c^2v^2}{k - mv^2}} \left(\sin(vt) - \frac{cv}{k - mv^2} \cos(vt) \right) + \\ &+ \frac{Fv \cdot e^{-\frac{c}{2m}t}}{k^2 - 2kmv^2 + m^2v^4 + c^2v^2} \left(\frac{c \left(c + \sqrt{c^2 - 4km} \right) + 2m \left(mv^2 - k \right)}{\left(c - \sqrt{c^2 - 4km} \right)} t + c \right) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
T_{ij}^{nadkr}(t) = & \frac{F}{(k - mv^2) + \frac{c^2 v^2}{k - mv^2}} \left(\sin(vt) - \frac{cv}{k - mv^2} \cos(vt) \right) + \\
& + \frac{2Fvm^2}{\sqrt{c^2 - 4km} \left(c^2 - c\sqrt{c^2 - 4km} + 2v^2 m^2 - 2km \right)} e^{-\frac{c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} t} + \\
& - \frac{2Fvm^2 \sqrt{c^2 - 4km}}{4km \left(6c^2 - c\sqrt{c^2 - 4km} + 2m^2 v^2 - 2km \right) - c^2 \left(2m^2 v^2 - c^2 + c\sqrt{c^2 - 4km} \right)} e^{-\frac{c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} t}
\end{aligned}$$

W metodzie Fouriera poszukujemy rozwiązania będącego iloczynem funkcji $T(t)$ i $W(x,y)$. Rozwiązaliśmy zarówno zagadnienie brzegowe ($W(x,y)$), jak i początkowe ($T(t)$), możemy już jawnie zapisać kompletne rozwiązanie równania opisującego poprzeczne przemieszczenia punktów drgającej płyty. W tym celu wystarczy powyższe wyrażenia (53) uzupełnić o funkcje własne (14), by otrzymać:

$$\begin{aligned}
w^{podkr}(x,y,t) = & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \frac{Fc}{k^2 - 2kmv^2 + m^2 v^4 + c^2 v^2} \\
& e^{-\frac{c}{2m} t} \left(v \cos\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} t\right) + \frac{(c^2 + 2m^2 v^2 - 2km)}{\sqrt{4km - c^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} t\right) \right) \\
w^{kr}(x,y,t) = & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \frac{Fv \cdot e^{-\frac{c}{2m} t}}{k^2 - 2kmv^2 + m^2 v^4 + c^2 v^2} \\
& \left(\frac{c \left(c + \sqrt{c^2 - 4km} \right) + 2m \left(mv^2 - k \right)}{\left(c - \sqrt{c^2 - 4km} \right)} t + c \right) \tag{54} \\
w^{nadkr}(x,y,t) = & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \\
& \left(\frac{2Fvm^2}{\sqrt{c^2 - 4km} \left(c^2 - c\sqrt{c^2 - 4km} + 2v^2 m^2 - 2km \right)} e^{-\frac{c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} t} + \right. \\
& \left. - \frac{2Fvm^2 \sqrt{c^2 - 4km}}{4km \left(6c^2 - c\sqrt{c^2 - 4km} + 2m^2 v^2 - 2km \right) - c^2 \left(2m^2 v^2 - c^2 + c\sqrt{c^2 - 4km} \right)} e^{-\frac{c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} t} \right)
\end{aligned}$$

Wyznaczone na drodze eksperymentu współczynniki tłumienia, odniesione do współczynnika tłumienia krytycznego zastosujemy do obliczenia ich wartości bezwzględnych. Jeśli chcemy wykonać obliczenia dla tłumienia podkrytycznego, to iloraz h/ω_{ij} musi zawierać się

w przedziale $<0,1$) [Osiński [2] str. 130]. Dla tłumienia krytycznego równa się dokładnie jedności, natomiast w przypadku tłumienia nadkrytycznego, jest większy od jedności. Z inżynierskiego punktu widzenia tłumienie w laminowanej płycie należy przyjąć jako podkrytyczne. Wyznamy więc górne ograniczenie przedziału, rozpatrując przypadek tłumienia krytycznego. Wówczas:

$$\frac{h}{\omega_{ij}} = 1 \Rightarrow h = \omega_{ij} \quad (55)$$

gdzie:

$$2h = \frac{c}{m} \quad (c, m - \text{patrz podstawienia (28)}) \quad (56)$$

Podstawiając powyższe do (2.55), otrzymujemy:

$$\alpha D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2\beta (D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \alpha D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 = 2m\omega_{ij} = \sqrt{4mk} \quad (57)$$

Założyliśmy $\beta=5\alpha$, więc:

$$\alpha = \frac{\sqrt{4\rho h \left[D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2\beta (D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \alpha D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right]}}{D_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \cdot 5 \cdot \beta (D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \alpha D_{22} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4} \quad (58)$$

Jest to dokładnie takie samo wyrażenie jak to, które otrzymaliśmy poprzednio (35), co potwierdza prawidłowość obliczeń. W tym momencie stała pełzania α staje się funkcją indeksów „i” i „j”.

Dla pierwszej częstości własnej, przy $\frac{h}{\omega_{ij}} = 0,5$ przyjmuje wartość 0,00008471s.

Ostatnim etapem jest obliczenie wartości skutecznej prędkości drgań płyty. Zdecydowano się na tę wielkość, ponieważ jest wprost proporcjonalna do mocy źródła dźwięku i pozwala bezpośrednio analizować proces drganiowy pod względem energetycznym. Wielkość ta zdefiniowana jest jako pierwiastek ze średniokwadratowej (w przedziale czasu od t_1 do t_2) wartości prędkości, scałkowanej po obszarze płyty $[axb]$.

$$v_{RMS} = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b v^2(x, y, t) dx dy dt}{ab(t_2 - t_1)}} \quad (59)$$

Procedura ze skryptu najpierw (numerycznie) oblicza v_{RMS}^2 , następnie dzieli tę wartość przez mianownik wyrażenia (43), by na końcu - z wyznaczonej liczby w ten sposób liczby - wyciągnąć pierwiastek kwadratowy. Rozwiązanie $w(x,y,t)$ jest sumą i^*j funkcji własnych. Zatem $v(x,y,t)$ również jest sumą i^*j funkcji własnych. Oznacza to, że być w zgodzie z definicją v_{RMS} , musimy najpierw obliczyć sumę złożoną z i^*j funkcji własnych $v(x,y,t)$, a dopiero potem ją podnieść do kwadratu i scałkować po dx , dy , dt . Jednak taka kolejność wykonywania działań

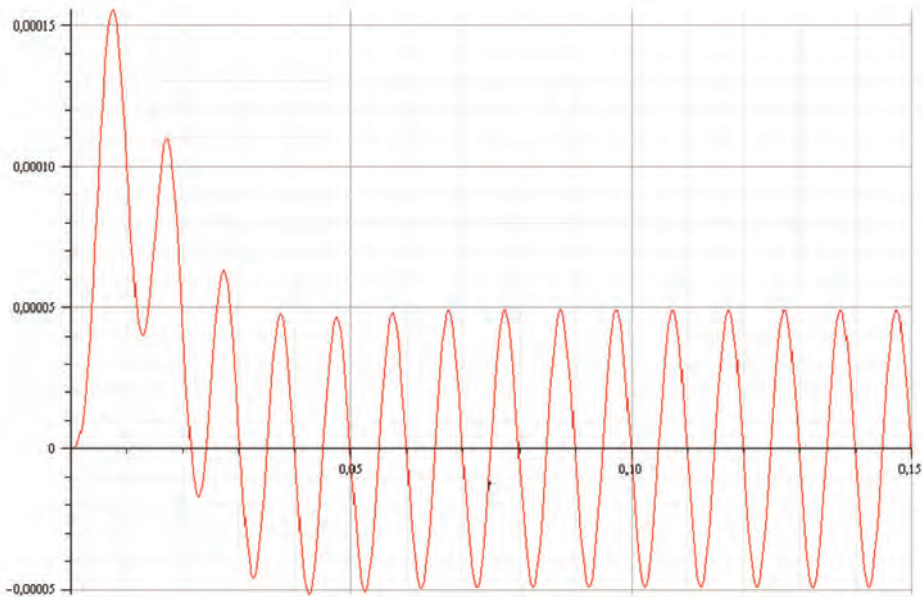
okazuje się być znacznie bardziej czasochłonna, niż na pozór błędna metoda: obliczenia sumy kwadratów (zamiast kwadratu sumy). Zauważmy, że wszystkie całki „mieszane” gdzie $i = j$ są zerowe, to mamy pewność, iż ten sposób obliczania v_{RMS} jest poprawny.

Dzieje się tak, ponieważ dla $i = j$ funkcje $\sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right)$ oraz $\sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$ są wzajemnie ortogonalne.

Opisane spostrzeżenie zostało pozytywnie zweryfikowane numerycznym eksperymentem, dzięki czemu uzyskano w ten sposób co najmniej o rząd wielkości krótszy czas obliczeń v_{RMS} .

2. REZULTATY OBLICZEŃ. SPOSTRZEŻENIA I WNIOSKI

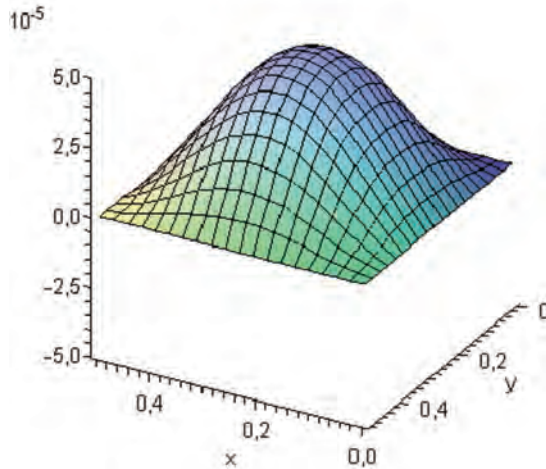
Na wszystkich poniższych rysunkach na osiach pionowych odłożono wychylenie poprzeczne punktów płyty w metrach. Przebieg czasowy położenia punktu środkowego płyty przy wymuszeniu akustycznym 120dB o częstotliwości 100Hz, oraz $\alpha_{1,1} = 0,00966s$ – co odpowiada silnemu tłumieniu podkrytycznemu (0,8 krytycznego), przedstawiony jest na rysunku 1. Uwzględniona liczba funkcji własnych $i*j = 100$, pozwoliła osiągnąć nie tylko dokładny, ale i bardzo gładki wykres. Grubość badanej płyty to 1,05mm (przyjęto 0,15mm na warstwę laminatu). Dane materiałowe, tj. $E_1 = 2,11GPa$, $E_2 = 0,053GPa$, $G_{12} = 0,026GPa$ oraz $\nu_{12} = 0,25$, niezbędne do wyznaczenia sztywności płytowych D_{11} , D_{22} , D_{12} oraz D_{66} zostały zaczerpnięte z pozycji [7].



Rys. 2. Wychylenie punktu środkowego płyty w funkcji czasu
(tłumienie silne podkrytyczne)

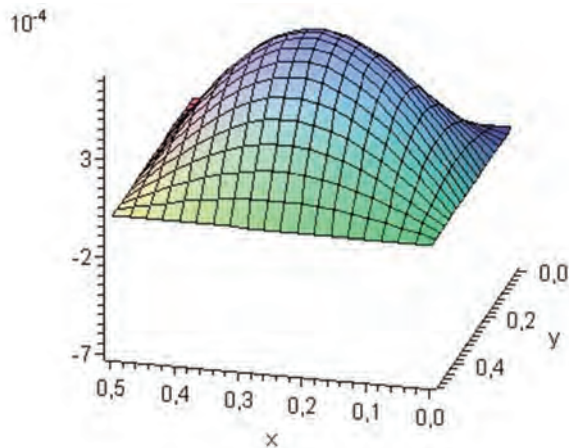
Wykres przedstawia typowe drgania tłumione. Widoczne są szybko gasnące drgania własne. Wytrącona z położenia równowagi płyta już po drugim okresie drgań zaczyna oscylować wokół położenia równowagi. Obwiednia amplitudy wzbudzonych drgań jednokrotnie przecina oś czasu, poczym asymptotycznie (szybko) zbiega do zera. Drgania ustalone odbywają się z częstotliwością wymuszenia a ich amplituda wynosi $50\mu m$. Są to duże drgania, lecz w pełni usprawiedliwione znacznymi gabarytami płyty tj. $500 \times 500 mm$. Postać drgań płyty dla $i*j = 25$ funkcji

własnych obrazuje rysunek nr 2.2. Poza pierwszą postacią drgań własnych praktycznie nie ujawniają się inne (wyższe). Postać drgań przy tej częstotliwości wymuszenia nie zależy od wartości współczynników tłumienia.



Rys. 3. Postać drgań płyty wymuszenia bazowego (100Hz)

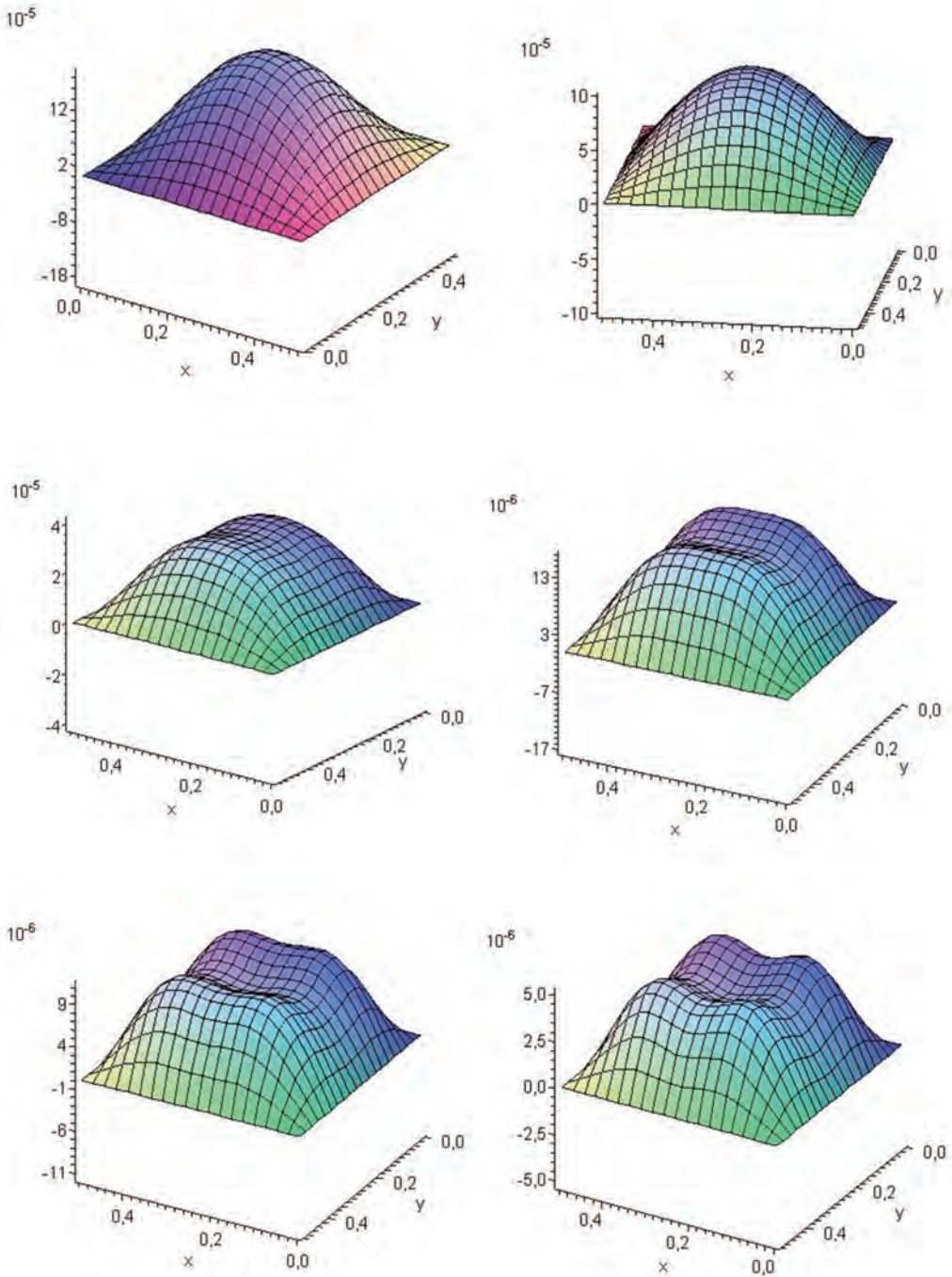
Postacie drgań kolejnych częstotliwości własnych wyglądają następująco:



Rys. 4. Pierwsza cz. własna 21,48Hz. Widoczne po jednej półfali na kierunku x i y

Z przeprowadzonej symulacji odpowiedzi drganiowej płyty, w przedziale częstotliwości 20-200Hz, możemy zaobserwować, iż dominującą postacią drgań jest pierwsza. Inne, wyższe, ujawniają się w sposób nieznaczny i tylko przy wymuszeniu ściśle odpowiadającemu częstotliwości rezonansowej. Prowadzi to do dwóch wniosków:

- trudno jest wzbudzić inną niż pierwsza postać drgań, poprzez wymuszenie jednorodnym ciśnieniem akustycznym, przyłożonym na całej powierzchni płyty
- zredukowanie hałasu przenoszonego przez płytę ograniczy się do zredukowania jej pierwszej postaci drgań (przy założeniu niewzbudzenia wyższych - samym układem regulacji), co znacznie upraszcza zagadnienie.



Rys. 5. Postacie drgań dla kolejnych częstotliwości własnych.

Od góry i od lewej (w nawiasach liczba półfal charakterystycznych dla danej postaci, w formie (axb):
 50.72 (1x2), 70.95 (2x1), 107.30 (1x3), 156.96 (3x1), 188.19 (1x4), 277.93 (4x1)

Przyjrzyjmy się teraz badanemu zjawisku pod względem energetycznym. Obliczenia v_{RMS} ze względu na czasochłonność ich wykonania zostały przeprowadzone dla $i*j = 25$ funkcji własnych, co i tak zapewnia dużą dokładność, gdyż różnica pomiędzy v_{RMS} liczonym dla 25 i 100 funkcji własnych, przy wymuszeniu 1000Hz, nie przekracza 2-3%. Związane jest to ze znanym faktem, iż nawet przy wyższych częstotliwościach wymuszenia, jedynie kilka pierwszych postaci drgań własnych ujawnia się i ma wpływ na wypadkową postać drgań płyty. Średnia z przedziału czasu od 10. do 12. sekundy drgań przy wymuszeniu 100Hz v_{RMS} wynosi $0,01134\text{m}^2/\text{s}^2$. Pozostałe wyniki w poniższej tabeli:

Częstotliwość wymuszenia [Hz]	Wartość v_{RMS} [m^2/s^2]
1	0.00241
2	0.00482
5	0.00482
10	0.0228
15	0.0306
20	0.0338
25	0.0333
30	0.03105
35	0.02831
40	0.02569
45	0.02337
50	0.02136
60	0.01815
70	0.01576
80	0.01393
90	0.01249
100	0.01134
120	0.00960
140	0.00834
160	0.00739
180	0.00663
200	0.00602

Tabela 2. Zestawienie v_{RMS} w zależności od częstotliwości wymuszającej

Widzimy, że drgania płyty powoli narastają wraz ze wzrostem częstotliwości, aż do 35Hz, gdzie ze względu na zbliżanie się częstotliwości wymuszenia do pierwszej częstotliwości drgań własnych, możemy zaobserwować - charakterystyczny dla rezonansu - szybki wzrost amplitudy, ograniczony jednak przez znaczne tłumienie wewnętrzne. Przeprowadzenie obliczeń dla powyższych wymiarów płyty miało na celu wyznaczenie podstawowych charakterystyk dynamicznych (tj. charakterystyki amplitudowo częstotliwościowej, oraz postaci drgań) obiektów, jakie mogą być badane na istniejącym na Politechnice Warszawskiej stanowisku. Jednak z punktu widzenia koncepcji aktywnej redukcji drgań cienkościennych elementów kadłuba samolotu, interesować nas będą znacznie mniej rozległe obiekty i tak, autor po oględzinach kilku typowych samolotów aluminiowych o konstrukcji nitowanej, wytypował elementarny prostokąt rozpięty na podłużnicach oraz wręgach kadłuba o stosunku boków około 1:4 oraz wymiarach 350x90mm. Przedstawia go poniższa fotografia:



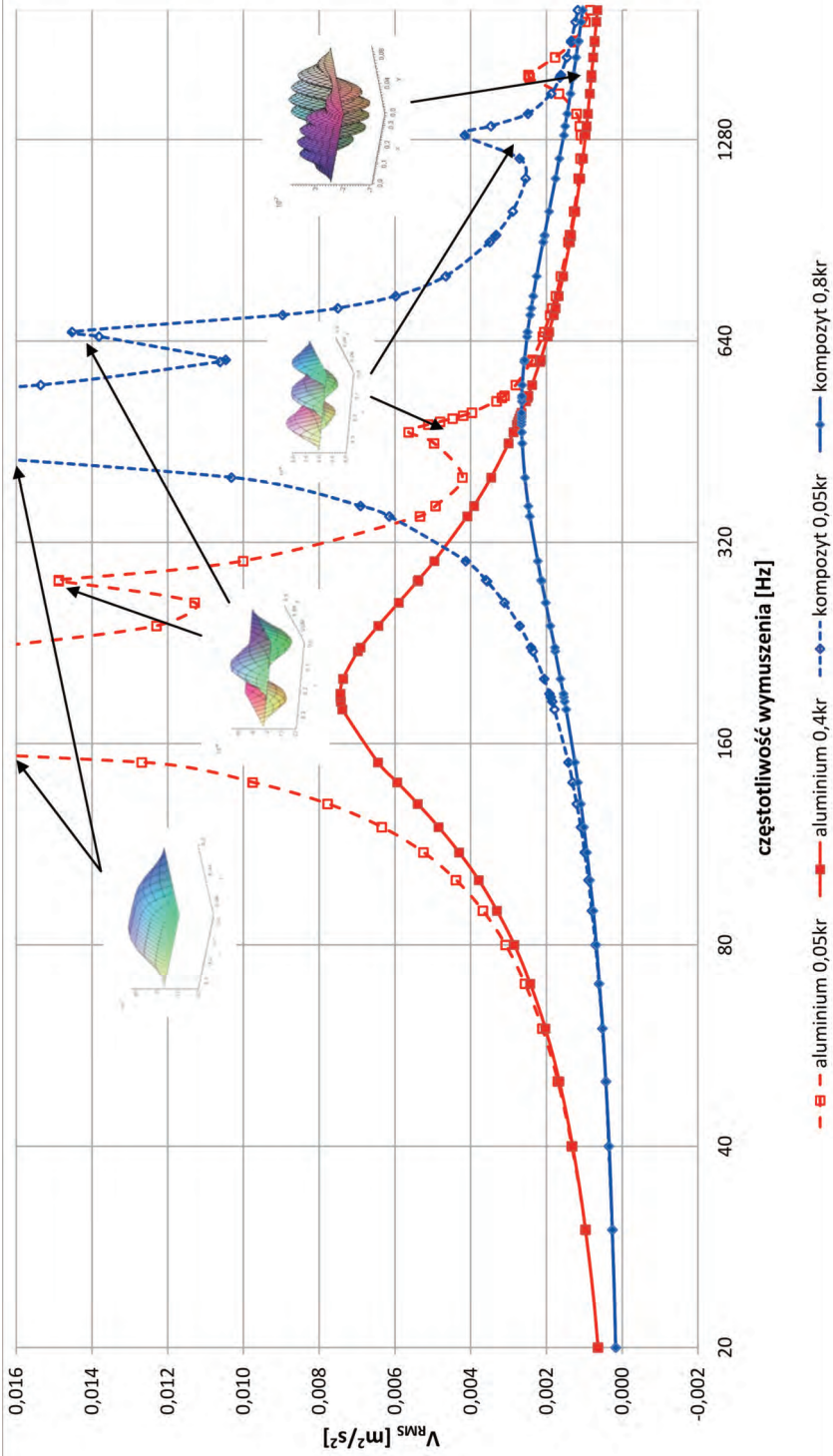
Fot. 1. Rozmiary i proporcje typowego elementu tworzącego poszycie kadłuba samolotu o konstrukcji nitowanej (I-22 „Iryda”).

Przejdźmy do zbadania odpowiedzi drganiowej na wymuszenie akustyczne takich właśnie obiektów. W poniższej tabeli zostały zamieszczone wyniki obliczeń dla dwóch płyt o jednakowych wymiarach poprzecznych (350x90mm) i grubości (0,59mm), lecz wykonanych z różnych materiałów, tj. z duraluminium oraz z laminatu włókno węglowe/żywica epoksydowa. Przebieg zmian częstotliwości wymuszającej zawiera się w zakresie 1Hz do 2kHz. Ułamkowe częstotliwości są to kolejne rezonanse – komórki z szarym tłem. Celem takiego zestawienia jest pokazanie jaki wpływ na zmniejszenie wartości skutecznej prędkości drgań powłoki cienkościennej – a tym samym, wprost proporcjonalnie, hałasu kabinowego jaki jest przez nią generowany – ma samo zastosowanie kompozytu do jej wykonania.

Tabela 2. Zestawienie v_{RMS} w zależności od częstotliwości wymuszającej

Częstotliwość Wymuszenia [Hz]	Wartość v_{RMS} [m ² /s ²]			
	Aluminium 0,05kr	Aluminium 0,4kr	Kompozyt 0,05kr	Kompozyt 0,8kr
1	0.000032	0.000032	0.000009	0.000009
2	0.000063	0.000063	0.000017	0.000017
3	0.000095	0.000095	0.000026	0.000026
5	0.000158	0.000158	0.000043	0.000043
10	0.000317	0.000317	0.000086	0.000086
20	0.00064	0.00064	0.00017	0.00017
30	0.00097	0.00097	0.00026	0.00026
40	0.00133	0.00131	0.00035	0.00034
50	0.00170	0.00166	0.00043	0.00043
60	0.00211	0.00203	0.00052	0.00051
70	0.00257	0.00243	0.00061	0.00060
80	0.00308	0.00285	0.00070	0.00068
90	0.00368	0.00331	0.00080	0.00076
100	0.00439	0.00379	0.00089	0.00085
110	0.00525	0.00431	0.00099	0.00093
120	0.00635	0.00485	0.00109	0.00101
130	0.00778	0.00540	0.00120	0.00109
140	0.00976	0.00594	0.00131	0.00117
150	0.01269	0.00645	0.00142	0.00125
180	0.04468	0.00739	0.00179	0.00148
185	0.05621	0.00743	0.00185	0.00152
187.87	0.05883	0.00744	0.00189	0.00154
190	0.05739	0.00744	0.00192	0.00155
200	0.03675	0.00737	0.00206	0.00163
220	0.01788	0.00698	0.00236	0.00177
222.83	0.01669	0.00691	0.00241	0.00178
240	0.01230	0.00644	0.00271	0.00190
260	0.01129	0.00590	0.00311	0.00202
280	0.01488	0.00540	0.00357	0.00213
281.09	0.01488	0.00538	0.00360	0.00214
300	0.01001	0.00496	0.00413	0.00223

Częstotliwość Wymuszenia [Hz]	Wartość V_{RMS} [m ² /s ²]			
	Aluminium 0,05kr	Aluminium 0,4kr	Kompozyt 0,05kr	Kompozyt 0,8kr
350	0.00534	0.00409	0.00615	0.00244
362.66	0.00493	0.00391	0.00691	0.00248
400	0.00422	0.00346	0.01032	0.00257
450	0.00497	0.00300	0.02326	0.00264
467.53	0.00564	0.00287	0.03446	0.00265
480	0.00512	0.00278	0.04248	0.00266
484.7	0.00481	0.00275	0.04338	0.00266
490	0.00448	0.00272	0.04227	0.00266
495	0.00420	0.00269	0.03963	0.00266
500	0.00397	0.00266	0.03624	0.00266
520	0.00332	0.00254	0.02423	0.00265
526.36	0.00318	0.00250	0.02162	0.00265
550	0.00281	0.00238	0.01536	0.00264
595.7	0.0024	0.00217	0.01062	0.00259
600	0.00237	0.00215	0.01047	0.00258
650	0.00210	0.00197	0.01382	0.00251
660.37	0.00206	0.00193	0.01453	0.0025
700	0.00190	0.00181	0.00897	0.00243
716.54	0.00185	0.00176	0.00751	0.0024
747.18	0.00175	0.00168	0.00598	0.00235
800	0.00162	0.00156	0.00466	0.00226
900	0.00142	0.00138	0.00350	0.00209
919.38	0.00138	0.00135	0.00335	0.00205
921.97	0.00138	0.00135	0.00333	0.00205
1000	0.00127	0.00124	0.00289	0.00193
1120.05	0.00115	0.00111	0.00255	0.00176
1200	0.00110	0.00104	0.00271	0.00166
1300.41	0.00109	0.00097	0.00416	0.00154
1341.45	0.00112	0.00094	0.00347	0.00151
1400	0.00121	0.00091	0.00249	0.00145
1500	0.00167	0.00086	0.00188	0.00136
1586.14	0.00245	0.00082	0.00165	0.00130
1597.65	0.00248	0.00081	0.00162	0.00129
1600	0.00248	0.00081	0.00162	0.00129
1700	0.00177	0.00077	0.00146	0.00122
1792.59	0.00126	0.00073	0.00135	0.00116
1800	0.00124	0.00073	0.00134	0.00115
1921.04	0.00097	0.00068	0.00123	0.00108
2000	0.00084	0.00066	0.00117	0.00104



Rys. 6. Porównanie charakterystyk amplitudowo częstotliwościowych

SPOSTRZEŻENIA

- Zjawiska obserwowane do 10Hz możemy określić jako quasi-statyczne ponieważ wpływ tłumienia wewnętrznego jest niezauważalny a odkształcenia zależą jedynie od sztywności płyty.
- Od około 70Hz zaczyna być widoczna pierwsza różnica między słabym, a silnym tłumieniem, by osiągnąć największą wartość przy pierwszym rezonansie.
- Możemy zaobserwować duży wpływ sztywności materiału, gdyż nawet przy przyjęciu takiej samej wartości współczynnika tłumienia, pole pod wykresem (energia przenikająca przez płytę) w przypadku materiału kompozytowego jest około 2-krotnie mniejsze niż w przypadku aluminium.
- Poza rezonansami wpływ wartości współczynników tłumienia na drgania jest mały.
- Zjawiska charakterystyczne dla rozruchu – np. takie jak wzbudzenie pierwszej postaci drgań przy wymuszeniu o częstotliwości znacznie większej od pierwszej częstotliwości rezonansowej, dają się zaobserwować tylko w przypadku płyty o znacznych wymiarach (patrz Rys. 1.).
- Powyżej 1kHz opracowany model zaczyna cechować znaczny wzrost czasu obliczeń (i to uwzględniając w obliczeniach tylko pierwszych 25 funkcji własnych). Powyżej 2kHz na pojedynczy wynik trzeba czekać około godziny, co wyklucza możliwość użycia modelu do symulowania układu aktywnego tłumienia drgań tych częstotliwości. Nie jest to jednak zagrożenie, gdyż wytypowane do redukcji drgań pasmo mieści się w przedziale 20-200Hz, w którym czas obliczeń spada do ok. 3s.
- W przedziale 500-1500Hz kompozyt cechują zauważalnie większe drgania – dzieje się tak m.in. z uwagi na liczne rezonanse położone w tym zakresie, które poprzez znaczne tłumienie wewnętrzne łączą się jedno rozciągnięte na przedziale 1,5 kHz maksimum.
- W tabeli przedstawiono wyniki obliczeń wszystkich częstotliwości własnych każdej z płyt (komórki z żółtym tłem). Znanym faktem jest, że nie wszystkie z nich ujawniają się jako rezonanse. Zostało to sprawdzone i na rys. 3. zamieszczono postacie drgań każdej z ujawniających się częstotliwości własnych obu płyt do 2kHz. Uwaga: by nie zaciemniać rysunku zamieszczono obliczone postacie płyty aluminiowej, ale przeprowadzone symulacje na modelu dowodzą, iż kolejne rezonanse płyty kompozytowej mają identyczny charakter.

WNIOSKI

- Zastosowanie kompozytu w sposób znaczący wpływa na zmniejszenie drgań płyty. Dzieje się tak z dwóch powodów. Po pierwsze, znacznie większa sztywność płytowa takiego elementu sprawia, iż odkształcenia dla niskich oraz średnich częstotliwości są wyraźnie mniejsze. Drugą kwestią jest sam współczynnik tłumienia wewnętrznego, który jak ustalili badacze [3], [4] dla materiału kompozytowego jest około 2-krotnie większy.

- Interesująca jest natomiast obserwacja wyższych (można zaobserwować już przy 2000Hz) częstotliwości, w przypadku których przewaga kompozytu zanika, ponieważ zaczyna wtedy odgrywać ważką rolę 3-ci człon równania oscylatora harmonicznego, tj. człon masowy. Przy wysokich częstotliwościach, drgająca płyta staje się wibrującą masą i nie ma znaczenia ani jej sztywność ani tłumienie w układzie a przede wszystkim jej masa, która dla jednakowych wymiarów geometrycznych, większa w przypadku płyty aluminiowej (jak 2,7 do 1,6).
- Przeprowadzone analizy pokazują, iż z punktu widzenia koncepcji aktywnej redukcji hałasu niskoczęstotliwościowego (umownie do około 200Hz), wystarczy się skupić jedynie na pierwszej postaci drgań, ewentualnie z uwzględnieniem nieznacznych odkształceń charakterystycznych dla drugiej w kolejności, a 3-ciej ze względu na występujących liczbę pół-fal postaci drgań.
- Zaproponowana koncepcja redukcji hałasu kabinowego może zostać zrealizowana ponieważ sterowanie jedną (maksymalnie dwiema) postaciami drgań wybranych elementów poszycia kadłuba można wykonywać na tyle szybko, by układ w czasie rzeczywistym był w stanie się dostrajać, adaptując tym samym do zmiennych warunków lotu, takich jak ciśnienie, obroty silnika, itp.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Praca zbiorowa pod redakcją M. Bijak - Żochowskiego, „Wytrzymałość Konstrukcji”, tom 2 wydanie I, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2004.
- [2] Z. Osiński, „Teoria Drgań”, wydanie I, PWN, Warszawa, 1980,
- [3] C, C, Siu, C, W, Bert, „Sinusoidal Response of Composite-Material Plates With Material Damping”, *Journal of Engineering for Industry*, MAY 1974
- [4] R, R, Clary, „Vibration Characteristics of Unidirectional Filamentary Composite Material Panels”, *Composite Materials: Second Conference, American Society for Testing and Materials Special Technical Publication 497*, 1972, pp, 415-438,
- [5] M, Szmidt „Analiza drgań płyty prostokątnej z naklejonymi elementami piezoelektrycznymi”, *Prace Instytutu Lotnictwa nr 192*, Warszawa 2008,
- [6] R, Brett Williams, Gyuhae Park, Daniel J, Inman and W, Keats Wilkie*, „An overview of Composite Actuators with Piezoceramic Fibers”, *Center for Intelligent Material Systems and Structures, Department of Mechanical Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, 310 Durham Hall, Blacksburg, VA 24061-0261, *Research Scientist: NASA Langley Research Center*,
- [7] W, Kurnik, A, Tylikowski, „Mechanika Elementów Laminowanych”, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa, 1997.

ANALYTICAL VIBRATION PLATE MODEL WITH ACOUSTIC EXCITATION

Abstract

An analytical study of the vibration characteristic of an aluminum and carbon/epoxy orthogonally laminated composite plates has been conducted. By solving the vibration equation with Fourier method, step by step, the analytical solution has been derived. The numerical solution has been achieved by developing and calculating on a computer a short program. Then it was possible to draw a position of each point from the zero time to any time, with unlimited time or space resolution. Also 3-dimensional plots has been developed and where used to create an animations which shows the subsequent vibration modes.

Calculations and the discussion of the results were conducted for the two cases: the plate made of aluminum and the plate made of carbon/epoxy composite. Assumptions which have been taken are compatible with the assumptions of the Kirchhoff plate theory. The value of the damping coefficients has been taken from the papers describing the experiments conducted by an American and Chinese scientist.

Described vibration model has been developed in order to examine the possibility of realization on a physical model an active noise reduction concept in the turbo-propeller aircrafts. This concept is about reducing the vibration of the fuselage walls, which, excited by the propeller tonal noise, becomes a secondary source of noise. Those walls, approximately, can be considered as a rectangular plates excited by the pressure - homogenous and oscillating as a sinus function.

Key words: *Fourier, vibrations, damping, noise, acoustic pressure, aluminum, composite, plate*