

Piotr Rapp*

Zabytkowe dzwony – zagadnienia mechaniki i napędu

Historical bells – mechanics and drive problems

Słowa kluczowe: dzwon, wahadło fizyczne, współczynnik kształtu, środek uderzenia, obciążenie dynamiczne, napęd łańcuchowy, napęd elektromagnetyczny, jarzmo proste, jarzmo wykorbione

Key words: bell, physical pendulum, shape coefficient, strike centre, dynamic load, chain drive, electromagnetic drive, plain yoke, cranked yoke

Dzwon to narzędzie dźwiękowe z grupy idiofonów, metalofon odlewany najczęściej ze stopu w proporcjach 78% miedzi, 20% cyny oraz 2% innych metali, w kształcie kielicha; uderzany umieszczonym wewnątrz wahadłem, tzw. sercem; tyle mówi zwięzła definicja encyklopedyczna.

Inni, nadając elementom dzwonu odpowiednie nazwy, porównują go do człowieka. Dzwon wieńczy korona złożona z uszu i klucza, poniżej są czapka, szyja i boki zwane płaszczem. Wylot dzwonu niektórzy nazywają ustami, krawędź – wargą, a wewnątrz dzwonu bije serce [1].

Dzwony pochodzą z Azji i znane były już w starożytności. Są świadectwem prestiżu oraz pełnią różnorakie funkcje kulturowe. Są również jednym z najstarszych środków komunikowania się ludzi i w znacznym stopniu pełnią tę funkcję do dnia dzisiejszego. „Mowa” dzwonu polega na różnych sposobach wydobywaniu dźwięku. Instrukcja z 1463 roku zachowana w kościele Mariackim w Gdańsku wymienia trzy sposoby: kołysanie dzwonu, bicie sercem pociągającym za pomocą sznura oraz rytmiczne uderzanie sercami kilku dzwonów zwane bajrowaniem. Dźwięk dzwonu można wydobywać również za pomocą uderzania młotkiem lub młotkami. Najczęściej są to nieruchome dzwony zegarowe – tzw. typ cymbałowy [2].

Dźwięk dzwonu ma skomplikowaną budowę. Występuje ton uderzeniowy i tzw. górne *aliquoty* (tj. składowe harmoniczne, których częstotliwości są wielokrotnościami częstotliwości tonu podstawowego: oktawa, duodecyma, kwintdecyma itd.) oraz nieharmoniczne tony składowe. Ton główny – o oktawę niższy od tonu uderzeniowego, dobrze słyszalny w stadium nabrzmiewania, jest tonem kombinacyjnym, wytworem subiektywnym (nie występuje w widmie dźwięku). Dzwon jako instrument ma osobliwe brzmienie, gdyż jego tony składowe nie zlewają się w ściśle określoną barwę, lecz są słyszane osobno.

A bell is a sound tool belonging to idiophone group; it is a metallophone, usually cast from an alloy including 78% of copper, 20% of tin and 2% of other metals in a goblet shape. It is usually struck by an inside-mounted tongue, i.e. the clapper. So says a brief encyclopedia definition.

Others attribute names to bell elements comparing it to a human body. A bell is crowned, the crown parts are called eyes and key, below are shoulder and waist. The lower rim is called a mouth with lips. Inside the bell beats the heart (clapper) [1].

Bells originate from Asia and were known in ancient times already. They are a testimony to prestige and fulfil various cultural functions. Bells are among the oldest means of inter-personal communication and to a great degree play this role nowadays. The bells *speech* is manifested in various ways of sound emission. A manual dated at 1463 kept in Virgin Mary Church in Gdańsk specifies three such ways: swinging bells, striking by a clapper pulled by a rope and rhythmical striking of clappers at several bells. The bell sound may also be emitted by hammer strokes, the situation usually occurring with immovable clock bells – the so called chimes [2].

The bell sound has a complicated structure. It consists of a strike note, higher *aliquots* (i.e. the harmonic components with frequencies being multiples of the basic note: an octave, a twelfth, a fifteenth, etc.) and non-harmonic tones. The principal note – one octave lower than the strike note, which is clearly heard in the sound build-up phase is a combined note, a subjective creation not present in the sound spectrum. A bell as an instrument has an unusual sound because its components do not merge into any specified note but the components are audible separately.

* Politechnika Poznańska, pl. M. Skłodowskiej-Curie 5, 60-965 Poznań

* Poznan University of Technology, pl. M. Skłodowskiej-Curie 5, 60-965 Poznań

Z punktu widzenia mechaniki najciekawszym i zarazem najbardziej złożonym jest wydobywanie dźwięku dzwonu przez jego kołysanie. Powstające przy tym drgania można podzielić na dwa rodzaje: skomplikowane przestrzenne drgania czaszy dzwonu spowodowane uderzeniem serca w wieniec dzwonu, w wyniku których powstaje dźwięk, oraz płaskie wahadłowe drgania zawieszonoego na osi dzwonu traktowanego jak bryła sztywne.

Przedmiotem niniejszego opracowania są drgania dzwonu jako bryły sztywnej. Dzwon modeluje się jako wahadło fizyczne, tj. ciało sztywne o masie m mogące swobodnie obracać się dookoła stałej poziomej osi obrotu O , na które działają jedynie siła ciężkości $G = mg$ oraz reakcje V i H łożysk w osi obrotu O (ryc. 1).

Położenie dzwonu w chwili t określone jest przez zmienny kąt obrotu φ . Równanie ruchu dzwonu wynika z drugiej zasady dynamiki Newtona i ma postać

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + p^2 \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

gdzie

$$p^2 = \frac{mgs}{J}, \quad (2)$$

oraz J oznacza moment bezwładności dzwonu względem osi obrotu O .

Równanie (1) można zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} (p^2 \cos \varphi), \quad (3)$$

zatem całką ruchu jest

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - p^2 \cos \varphi = C, \quad (4)$$

gdzie C jest stałą całkowania. Jeśli α oznacza maksymalny kąt wychylenia dzwonu, to kąt φ zmienia się w przedziale $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$. W punkcie $\varphi = \alpha$ prędkość kątowa dzwonu jest równa zero, tj. $d\varphi/dt = 0$, zatem z równania (4) otrzymuje się wartość stałej całkowania

$$C = -p^2 \cos \alpha. \quad (5)$$

Po podstawieniu tej wartości do równania (4) można otrzymać równanie

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2p^2 (\cos \varphi - \cos \alpha). \quad (6)$$

Równanie (6), ze względu na nieliniowość, jest trudne do rozwiązania w formie analitycznej o postaci $\varphi = \varphi(t)$. Można natomiast łatwo wyznaczyć zależność odwrotną $t = t(\varphi)$. W tym celu, stosując tożsamości

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

równanie (6) można przekształcić do postaci

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 4p^2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right), \quad (7)$$

As far as mechanics is concerned, the most complex and most interesting phenomenon is the emission of bell sound by its swinging. Vibrations resulting from this action can be divided into two groups – complex spatial vibration of the bell shell due to clapper strokes at the bell rim producing acoustic waves and plane pendulum rigid body vibrations of the bell about its axle.

The present paper is devoted to an analysis of rigid body bell vibrations. The bell is modelled as a physical pendulum, i.e. a rigid body with a mass m free to rotate about a fixed horizontal axis of rotation O . The body is subjected to a gravity force $G = mg$ and reactions V and H at bearings in the rotation axis O (fig. 1).

The bell position at a time t is determined by a variable angle of rotation φ . The equation of motion for the bell results from Newton's second principle and takes the form

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + p^2 \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

where

$$p^2 = \frac{mgs}{J}, \quad (2)$$

and J stands for the bell moment of inertia with respect to the rotation axis O .

Equation (1) can be rewritten to get

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} (p^2 \cos \varphi), \quad (3)$$

thus the motion integral is

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - p^2 \cos \varphi = C, \quad (4)$$

where C is an integration constant. If α denotes the maximum swinging angle, then φ is from the range $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$. For $\varphi = \alpha$ the bell angular velocity is equal to zero, i.e. $d\varphi/dt = 0$. Thus, the value of the integration constant

$$C = -p^2 \cos \alpha. \quad (5)$$

can be obtained from (4). Substituting (5) into (4) leads to the equation

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2p^2 (\cos \varphi - \cos \alpha). \quad (6)$$

which is difficult to solve in an analytical way $\varphi = \varphi(t)$ due to its nonlinearity. On the other hand, one can easily find the inverse relation $t = t(\varphi)$. To this end the following identities can be used

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

and (6) can be transformed to the form

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 4p^2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right), \quad (7)$$

skąd po rozdzieleniu zmiennych wynika równanie

$$dt = \frac{1}{2p} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (8)$$

Po scałkowaniu równania (8) stronami otrzymuje się

$$t = t(\varphi) = \frac{1}{2p} \int_0^\varphi \frac{du}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}}}. \quad (9)$$

Funkcja $t = t(\varphi)$ jest ściśle rosnąca, zatem istnieje i jest jednoznacznie określona również funkcja odwrotna $\varphi = \varphi(t)$ będąca rozwiązaniem równania ruchu (6).

Całkowanie w granicach od 0 do α we wzorze (9) daje $1/4$ okresu pełnego wahnięcia. Stąd okres T pełnego wahnięcia jest równy

$$T = \frac{2}{p} \int_0^\alpha \frac{du}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}}}. \quad (10)$$

Całkowanie można wykonać za pomocą rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg. W tym celu wprowadza się nową zmienną całkowania ψ za pomocą wzoru

$$\sin \frac{u}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \psi. \quad (11)$$

Zatem

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}} &= \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi} = \\ &= \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \cos \frac{u}{2} du = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi d\psi \Rightarrow du = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi}{\cos \frac{u}{2}} d\psi.$$

Wtedy wyrażenie podcałkowe we wzorze (10) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \frac{du}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}}} &= \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi}{\cos \frac{u}{2}} d\psi = \\ &= \frac{2 d\psi}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{2 d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{u}{2}}} = \frac{2 d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Wartościom $u = 0$ oraz $u = \alpha$ odpowiadają wartości $\psi = 0$ oraz $\psi = \pi/2$, zatem po uwzględnieniu (12) wzór (10) na okres T pełnego wahnięcia dzwonu przyjmuje postać

Separation of variables leads to

$$dt = \frac{1}{2p} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (8)$$

Integration of both sides of equation (8) results in

$$t = t(\varphi) = \frac{1}{2p} \int_0^\varphi \frac{du}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}}}. \quad (9)$$

The function $t = t(\varphi)$ is strictly increasing, thus there exists a unique inverse function $\varphi = \varphi(t)$ representing the solution of the equation of motion (6).

Determinate integration within the limits 0 and α of the formula (9) gives $1/4$ of the full swing period. Hence, the full swing period is

$$T = \frac{2}{p} \int_0^\alpha \frac{du}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}}}. \quad (10)$$

The integration can be carried out using a series expansion of the integrated function. To this end a new integration variable ψ is introduced

$$\sin \frac{u}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \psi. \quad (11)$$

Hence,

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}} &= \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi} = \\ &= \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \cos \frac{u}{2} du = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi d\psi \Rightarrow du = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi}{\cos \frac{u}{2}} d\psi.$$

Then the integrated function in (10) can be expressed as

$$\begin{aligned} \frac{du}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}}} &= \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \psi}{\cos \frac{u}{2}} d\psi = \\ &= \frac{2 d\psi}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{2 d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{u}{2}}} = \frac{2 d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi}}. \end{aligned} \quad (12)$$

The values $\psi = 0$ and $\psi = \pi/2$ correspond to $u = 0$ and $u = \alpha$, so taking (12) into account the formula (10) for the full swinging period T takes the form

$$T = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad (13)$$

gdzie $k = \sin \frac{\alpha}{2}$. Ze wzoru na rozwinięcie w szereg dwumianu Newtona $(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} &= 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \psi + \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \psi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \psi + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

i wzór (13) można przedstawić w postaci

$$T = \frac{4}{p} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cdot d\psi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \psi \cdot d\psi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \psi \cdot d\psi + \dots \right] \quad (15)$$

Całki występujące we wzorze (15) można określić za pomocą ogólnego wzoru

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \psi \cdot d\psi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2},$$

zatem okres T pełnego wahnięcia dzwonu jest równy

$$T = \frac{2\pi}{p} K(\alpha), \quad (16)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \\ &+ \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Dla danego wahadła fizycznego można określić zastępcze wahadło matematyczne o długości l_z wykonujące drgania identyczne jak wahadło fizyczne (ryc. 2).

Równanie ruchu wahadła matematycznego ma postać

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + p_z^2 \sin \varphi = 0, \quad (18)$$

gdzie

$$p_z^2 = \frac{g}{l_z}. \quad (19)$$

Równania (1) oraz (18) mają taką samą postać, zatem zastępcze wahadło matematyczne wykonuje ruch identyczny jak wahadło fizyczne, gdy $p^2 = p_z^2$ tj. gdy

$$T = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad (13)$$

where $k = \sin \frac{\alpha}{2}$. The formula for the Newton binomial expansion $(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$ yields

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} &= 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \psi + \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \psi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \sin^6 \psi + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

and the relation (13) can be given in the following form

$$T = \frac{4}{p} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cdot d\psi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \psi \cdot d\psi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \psi \cdot d\psi + \dots \right] \quad (15)$$

The integrals in (15) can be expressed in a general way as

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \psi \cdot d\psi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2},$$

thus, the bell full swinging period T is

$$T = \frac{2\pi}{p} K(\alpha), \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \\ &+ \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

For an arbitrary physical pendulum one can introduce an equivalent mathematical pendulum with length l_z which vibrates in the identical way (fig. 2).

The equation of motion for the mathematical pendulum takes the form

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + p_z^2 \sin \varphi = 0, \quad (18)$$

where

$$p_z^2 = \frac{g}{l_z}. \quad (19)$$

Equations (1) and (18) have the same form, thus the mathematical pendulum exhibits the same motion as the physical pendulum when $p^2 = p_z^2$, i.e. when

$$\frac{mgs}{J} = \frac{g}{l_z}. \quad (20)$$

Stąd długość zastępczego wahadła matematycznego jest równa

$$l_z = \frac{J}{ms}. \quad (21)$$

Moment bezwładności J dzwonu (wahadła fizycznego) względem osi obrotu O jest równy

$$J = J_0 + ms^2, \quad (22)$$

gdzie J_0 oznacza moment bezwładności dzwonu względem osi przechodzącej przez jego środek ciężkości S . Można zatem napisać

$$l_z = \frac{J_0 + ms^2}{ms} = \frac{J_0}{ms} + s, \quad (23)$$

co oznacza, że $l_z > s$. Długość l_z wyznacza na osi dzwonu punkt C , który nazywa się *środkiem wahan* (ryc. 3). Jeśli $J_0 = mr_0^2$, gdzie r_0 jest promieniem bezwładności, to wzór (23) można przedstawić w postaci

$$l_z = \frac{r_0^2}{s} + s. \quad (24)$$

Przedstawiając równanie (24) w postaci $s^2 - sl_z + mr_0^2 = 0$ widać, że jest ono spełnione przez dwie liczby s_1 i s_2 takie, że $s_1 + s_2 = l_z$. Jeśli zatem na ryc. 3 oznaczy się $s = s_1$, to $s_2 = l_z - s_1$. Stąd wynika, że jeśli wahadło zawieszono w punkcie O ma środek wahan w punkcie C , to nawzajem wahadło zawieszono w punkcie C ma środek wahan w punkcie O .

Dla dzwonów wprowadza się parametr c

$$c = \frac{s}{l_z} = \frac{ms^2}{J} \quad (25)$$

nazywany *współczynnikiem kształtu* dzwonu. Dla dzwonów o klasycznych proporcjach współczynnik kształtu jest równy $c = 0,75 \div 0,80$ [6].

Dynamiczna równoważność wahadła fizycznego i zastępczego wahadła matematycznego występuje wtedy, gdy moment bezwładności masy zastępczej m_z względem osi obrotu O jest równy momentowi bezwładności J wahadła fizycznego: $m_z l_z^2 = J$. Stąd i z (21) wynika, że

$$m_z = \frac{J}{l_z^2} = \frac{J}{l_z} \frac{1}{l_z} = \frac{J}{l_z} \frac{ms}{J} = m \frac{s}{l_z} = c \cdot m. \quad (26)$$

Dynamiczna równoważność wahadła fizycznego i zastępczego wahadła matematycznego oznacza, że siły bezwładności wywołane ruchem obu wahadeł są identyczne.

Reakcje podporowe w osi obrotu dzwonu można wyznaczyć z warunków równowagi sił czynnych i sił bezwładności działających na dzwon w trakcie jego ruchu.

$$\frac{mgs}{J} = \frac{g}{l_z}. \quad (20)$$

Hence, the length of the equivalent mathematical pendulum is given by

$$l_z = \frac{J}{ms}. \quad (21)$$

The bell (physical pendulum) moment of inertia J with respect to the rotation axis O is

$$J = J_0 + ms^2, \quad (22)$$

where J_0 denotes the bell moment of inertia with respect to its central axis (S is the bell centroid). One can write down the following relations

$$l_z = \frac{J_0 + ms^2}{ms} = \frac{J_0}{ms} + s, \quad (23)$$

It means that $l_z > s$. The length l_z defines a point C on the bell axis. It is the *swinging centre* (fig. 3). If $J_0 = mr_0^2$, where r_0 is the radius of gyration, then (23) can be given as

$$l_z = \frac{r_0^2}{s} + s. \quad (24)$$

Expressing (24) in the form $s^2 - sl_z + mr_0^2 = 0$ shows, that it is fulfilled by two such numbers s_1 and s_2 that $s_1 + s_2 = l_z$. Thus, if we denote $s = s_1$ in fig. 3, then $s_2 = l_z - s_1$. Hence, if a pendulum hanging at O has its swinging centre at C , then, mutually, a pendulum hanging at C has a swinging centre at O .

A certain parameter c is introduced as

$$c = \frac{s}{l_z} = \frac{ms^2}{J} \quad (25)$$

and it is called the bell *shape coefficient*. For classically shaped bells the shape coefficient $c = 0,75 \div 0,80$ [6].

The dynamic equivalence of physical and mathematical pendula occurs when the moment of inertia for the equivalent mass m_z with respect to the rotation axis O is equal to the moment of inertia J for the physical pendulum: $m_z l_z^2 = J$. Thus from (21) one gets

$$m_z = \frac{J}{l_z^2} = \frac{J}{l_z} \frac{1}{l_z} = \frac{J}{l_z} \frac{ms}{J} = m \frac{s}{l_z} = c \cdot m. \quad (26)$$

The dynamic equivalence of physical and mathematical pendula means, that the inertia forces due to the motion of both pendula are identical.

The support reaction at the rotation axis of the bell can be determined from the equilibrium of active and inertia forces acting on the bell during its motion.

There are two inertia forces (fig. 4):

Na dzwon będący w ruchu działają dwie siły bezwładności (ryc. 4):

- wypadkowa sił odśrodkowych działająca w osi dzwonu

$$N(\varphi) = ms\dot{\varphi}^2, \quad (27)$$

- wypadkowa stycznych sił bezwładności działająca prostopadle do osi dzwonu

$$T(\varphi) = ms\ddot{\varphi}. \quad (28)$$

Wypadkowy moment stycznych sił bezwładności względem osi obrotu O jest równy

$$M(\varphi) = J\ddot{\varphi}. \quad (29)$$

Na podstawie wzorów (28), (29) i (21) można obliczyć ramię działania siły $T(\varphi)$ względem O :

$$\frac{M(\varphi)}{T(\varphi)} = \frac{J\ddot{\varphi}}{ms\ddot{\varphi}} = \frac{J}{ms} = l_z.$$

To oznacza, że wypadkowa stycznej siły bezwładności $T(\varphi)$ przechodzi przez punkt C . Punkt C ma tę właściwość, że jakkolwiek siła zewnętrzna działająca na linii siły $T(\varphi)$ nie wywoła reakcji osi obrotu dzwonu, gdyż równoważy ona wypadkową stycznych sił bezwładności. Z tego powodu środek wahania nazywa się również *środkiem uderzenia*. Proporcje dzwonu są tak dobrane, by serce uderzało w dzwon w pobliżu punktu uderzenia. Interpretując znaczenie środka uderzenia można rozważyć pionowy pręt zawieszony na górnym końcu, ryc. 5.

Problem ten dotyczy nie tylko dzwonu, lecz również serca dzwonu, które często kształtuje się w postaci pręta przedłużonego poniżej punktu uderzenia.

Korzystając ze wzorów (1), (2), (6), (21), (26) oraz (27), (28), siły bezwładności można przedstawić w postaci

$$N(\varphi) = G \frac{2s}{l_z} (\cos \varphi - \cos \alpha) = 2cG(\cos \varphi - \cos \alpha), \quad (30)$$

$$T(\varphi) = -G \frac{s}{l_z} \sin \varphi = -cG \sin \varphi. \quad (31)$$

Z warunków równowagi sił działających na dzwon, zgodnie z ryc. 6, otrzymuje się

$$V = V(\varphi) = G + N(\varphi) \cos \varphi + T(\varphi) \sin \varphi, \quad (32)$$

$$H = H(\varphi) = N(\varphi) \sin \varphi - T(\varphi) \cos \varphi. \quad (33)$$

Stąd, po wstawieniu wzorów (30) i (31) otrzymuje się wzory określające reakcje osi dzwonu:

$$V = V(\varphi) = G + cGF_V(\alpha, \varphi), \quad (34)$$

$$H = H(\varphi) = cGF_H(\alpha, \varphi), \quad (35)$$

gdzie

- resultant of centrifugal forces acting along the bell axis

$$N(\varphi) = ms\dot{\varphi}^2, \quad (27)$$

- resultant of tangential forces acting perpendicularly to the bell axis

$$T(\varphi) = ms\ddot{\varphi}. \quad (28)$$

The resultant moment of tangential inertia forces with respect to the rotation axis O is

$$M(\varphi) = J\ddot{\varphi}. \quad (29)$$

From (28), (29) and (21) one can compute the arm of the force $T(\varphi)$ with respect to O :

$$\frac{M(\varphi)}{T(\varphi)} = \frac{J\ddot{\varphi}}{ms\ddot{\varphi}} = \frac{J}{ms} = l_z.$$

This means that the resultant of tangential inertia force $T(\varphi)$ passes through the point C . This point has such a property, that any external force acting along the line of action of the force $T(\varphi)$ does not yield any reaction of the bell rotation axis, because it is balanced with the resultant of tangential inertia forces. Thus, the swinging centre is also called the strike centre. The bell proportion is assumed in such a way, that the clapper strikes in the vicinity of the *strike centre*. To analyze the meaning of the strike centre one can consider a vertical rod hanging at its upper tip, fig. 5.

The problem at hand is not only related to bells but also to clatters, which are usually formed as rods extending below the strike centre.

Using the relations (1), (2), (6), (21), (26) and (27), (28), the inertia forces can be given in the following form

$$N(\varphi) = G \frac{2s}{l_z} (\cos \varphi - \cos \alpha) = 2cG(\cos \varphi - \cos \alpha), \quad (30)$$

$$T(\varphi) = -G \frac{s}{l_z} \sin \varphi = -cG \sin \varphi. \quad (31)$$

The equilibrium conditions for forces acting on the bell, according to fig. 6, are

$$V = V(\varphi) = G + N(\varphi) \cos \varphi + T(\varphi) \sin \varphi, \quad (32)$$

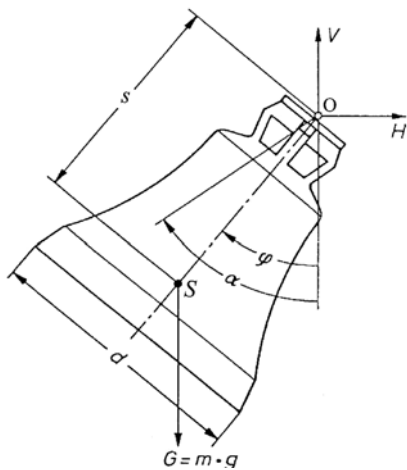
$$H = H(\varphi) = N(\varphi) \sin \varphi - T(\varphi) \cos \varphi. \quad (33)$$

Then, substituting the formulae (30) and (31), one gets the values of the reactions at the bell axis:

$$V = V(\varphi) = G + cGF_V(\alpha, \varphi), \quad (34)$$

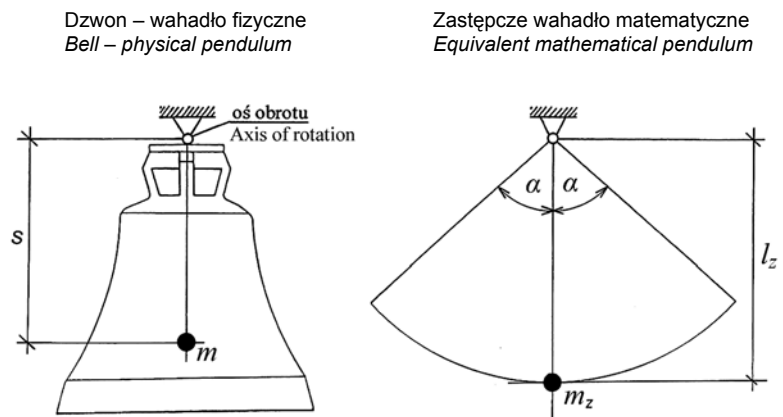
$$H = H(\varphi) = cGF_H(\alpha, \varphi), \quad (35)$$

where

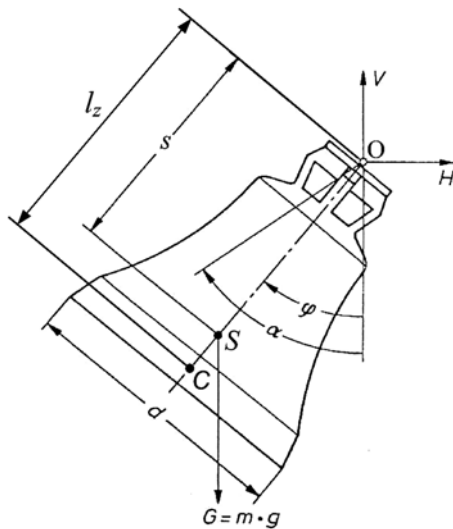


Ryc. 1. Wahadło fizyczne – model obliczeniowy dzwonu

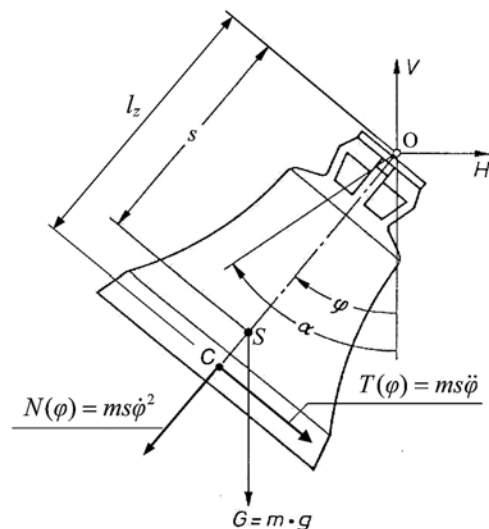
Fig. 1. Physical pendulum – calculation model of a bell



Ryc. 2. Zastępcze wahadło matematyczne
Fig. 2. Equivalent mathematical pendulum



Ryc. 3. Położenia środka ciężkości S i środka wahania C dzwonu
Fig. 3. Location of centroid S and swinging centre C for a bell



Ryc. 4. Siły czynne i siły bezwładności działające na dzwon
Fig. 4. Active and inertia forces acting on a bell

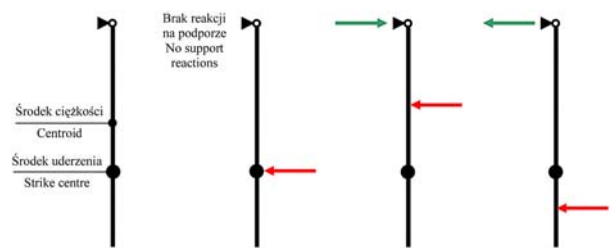
$$F_V(\alpha, \varphi) = (3 \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \cos \alpha - 1), \quad (36)$$

$$F_H(\alpha, \varphi) = \left(\frac{3}{2} \sin 2\varphi - 2 \sin \varphi \cos \alpha \right). \quad (37)$$

We wzorach (34) i (35) należy zauważyć, że $G \frac{s}{l_z} = m_z g$, zatem reakcje osi dzwonu od sił bezwładności są takie same jak reakcje osi od sił bezwładności zastępczego wahadła matematycznego.

Wykorzystując wzór (10) można również utworzyć wykresy reakcji osi oraz wychylenia φ dzwonu w zależności od czasu t .

Największa wartość bezwzględna reakcji pionowej V występuje dla $\varphi = 0$. Na przykład dla maksymalnego wychylenia dzwonu $\alpha = \pi/2$ otrzymuje się $|V| = (1 + 2c)mg$. Wartość ta może ponad dwukrotnie przekroczyć ciężar dzwonu. Dla $\alpha = \pi/2$ maksymalna wartość reakcji poziomej występuje przy wychyleniu $\varphi = \pi/4$ i jest równa $|H| = (3/2)cmg$. Jest to siła, która może znacznie przekroczyć ciężar dzwonu.



Ryc. 5. Wpływ punktu uderzenia na reakcje podporowe
Fig. 5. Influence of strike centre location on support reactions

$$F_V(\alpha, \varphi) = (3 \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \cos \alpha - 1), \quad (36)$$

$$F_H(\alpha, \varphi) = \left(\frac{3}{2} \sin 2\varphi - 2 \sin \varphi \cos \alpha \right). \quad (37)$$

Let us observe, that in the relations (34) and (35) $G \frac{s}{l_z} = m_z g$, hence, the reactions at the bell axis due to the inertia forces are the same as those due to the inertia forces in the equivalent mathematical pendulum.

Funkcje wychylenia φ oraz reakcji osi V i H osi obrotu dzwonu są funkcjami okresowymi, lecz nie harmonicznymi. Stąd, dla celów projektowych konstrukcji wsporczych oraz wież dzwonowych niezbędna jest analiza harmoniczna funkcji reakcji V i H .

Funkcje V i H można przedstawić w postaci nieskończonych rozwinięć w szereg Fouriera:

$$H(t, \alpha) = cG(\gamma_1(\alpha)\sin\omega t + \gamma_3(\alpha)\sin 3\omega t + \gamma_5(\alpha)\sin 5\omega t + \dots) = cG\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_{2i+1}(\alpha)\sin(2i+1)\omega t, \quad (38)$$

$$T = \frac{60}{n} = \frac{120}{a}, \quad (39)$$

gdzie ω oznacza pierwszą częstość kołową drgań dzwonu.

Wartości współczynników γ oraz β w zależności od kąta α maksymalnego wychylenia dzwonu przedstawione są na ryc. 6.

Po odlaniu dzwonu ludwisarz wykonuje badania i określa liczbę a uderzeń serca dzwonu w ciągu 1 minuty. W ciągu jednego pełnego wahnięcia serce uderza w dzwon 2 razy, zatem liczba n pełnych wahnięć dzwonu w ciągu 1 minuty (tj. częstość drgań) wynosi $n = a/2$ (częstotliwość drgań $f = 1/T$). Stąd można określić okres drgań dzwonu:

$$T = \frac{60}{n} = \frac{120}{a} \quad (40)$$

oraz pierwszą częstość kołową drgań dzwonu

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi a}{60} = \frac{\pi n}{30}. \quad (41)$$

Przeciwnie skierowane reakcje osi obrotu dzwonu stanowią obciążenie konstrukcji wsporczej, na której zawieszony jest dzwon i tym samym stanowią obciążenia wieży, na której dzwon jest umieszczony. Z wykresów przedstawionych na ryc. 6 wynika, że największy wpływ na wielkość tych obciążeń mają kilka pierwszych składowych harmonicznymi drgań dzwonu. Wyższe harmoniczne jako małe można pominąć. Z dostateczną dokładnością dla celów technicznych przyjmuje się, że obciążenie konstrukcji wsporczej oraz wieży od wahażącego się dzwonu określone jest wzorami

$$H(t, \alpha) = cG(\gamma_1(\alpha)\sin\omega_1 t + \gamma_3(\alpha)\sin 3\omega_1 t + \gamma_5(\alpha)\sin 5\omega_1 t), \quad (42)$$

$$V(t, \alpha) = G + cG(\beta_2(\alpha)\cos 2\omega_1 t + \beta_4(\alpha)\cos 4\omega_1 t + \beta_6(\alpha)\cos 6\omega_1 t). \quad (43)$$

Wprowadzając częstości kołowe dla harmonicznymi $i = 1, 2, 3, \dots$ według wzoru

$$\omega_i = i\omega \quad (44)$$

Taking advantage of (10) one can also find the distributions of the axis reactions and swinging angle φ of the bell as functions of time t .

The highest absolute value of the vertical reaction V is found for $\varphi = 0$. For instance, with the maximal swinging angle $\alpha = \pi/2$ one gets $|V| = (1 + 2c)mg$. This value can be twice as big as the bell weight. For $\alpha = \pi/2$ the maximum value of the horizontal reaction corresponds to the swinging angle $\varphi = \pi/4$ and reaches $|H| = (3/2)cmg$. This force can exceed the bell weight, too.

The functions of the swinging angle φ and the axis reactions V and H are periodic but not harmonic ones. Thus for design purposes related to supporting structures and belfries a harmonic analysis of the reaction functions V and H is necessary.

The functions V and H can be represented in the form of infinite Fourier series:

$$H(t, \alpha) = cG(\gamma_1(\alpha)\sin\omega t + \gamma_3(\alpha)\sin 3\omega t + \gamma_5(\alpha)\sin 5\omega t + \dots) = cG\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_{2i+1}(\alpha)\sin(2i+1)\omega t, \quad (38)$$

$$T = \frac{60}{n} = \frac{120}{a}, \quad (39)$$

where ω denotes the first natural frequency of the bell.

Values of the coefficients γ and β as functions of the maximum bell swinging angle α are depicted in fig. 6.

Having cast a bell a bellfounder carries out an analysis and determines the number of clapper strokes a per minute. During one full swing the clapper strikes the bell twice, so the number of full bell swings per minute n is $n = a/2$ (the vibrations frequency $f = 1/T$). Thus the vibrations period for the bell:

$$T = \frac{60}{n} = \frac{120}{a} \quad (40)$$

can be determined as well as the first natural frequency

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi a}{60} = \frac{\pi n}{30}. \quad (41)$$

Opposite reactions at the bell rotation axis form a loading acting on the supporting structure of the bell and, thus, are the loading for the belfry. It can be concluded from the distributions presented in fig. 6 that only a few first harmonic components of the bell vibration have the biggest influence on the loading magnitude. The higher harmonics can be neglected. It is assumed with a sufficient accuracy, that the loading acting on the supporting structure and the belfry due to the swinging bell can be given as

$$H(t, \alpha) = cG(\gamma_1(\alpha)\sin\omega_1 t + \gamma_3(\alpha)\sin 3\omega_1 t + \gamma_5(\alpha)\sin 5\omega_1 t), \quad (42)$$

funkcje (42) i (43) można przedstawić w postaci (ryc. 7)

$$H(t, \alpha) = cG(\gamma_1(\alpha)\sin\omega_1 t + \gamma_3(\alpha)\sin\omega_3 t + \gamma_5(\alpha)\sin\omega_5 t), \quad (45)$$

$$V(t, \alpha) = G + cG(\beta_2(\alpha)\cos\omega_2 t + \beta_4(\alpha)\cos\omega_4 t + \beta_6(\alpha)\cos\omega_6 t). \quad (46)$$

Dla poszczególnych harmonicznych wprowadza się również okresy drgań określone wzorem

$$T_i = \frac{1}{i} T. \quad (47)$$

Oddziaływania dzwonów na wieżę mają charakter dynamiczny. W praktyce wieże można obliczać na obciążenia statyczne, przyjmując zastępcze oddziaływania dzwonów. Siły zastępcze oblicza się przez pomnożenie amplitud sił rzeczywistych określonych wzorami (45) i (46) przez współczynnik dynamiczny.

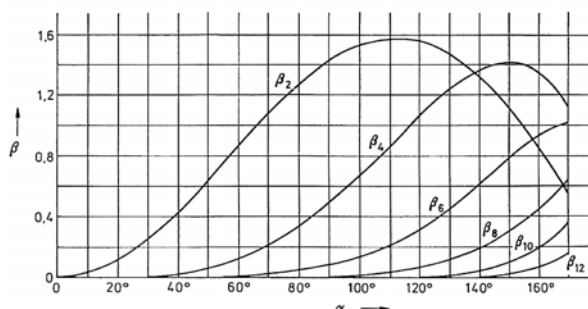
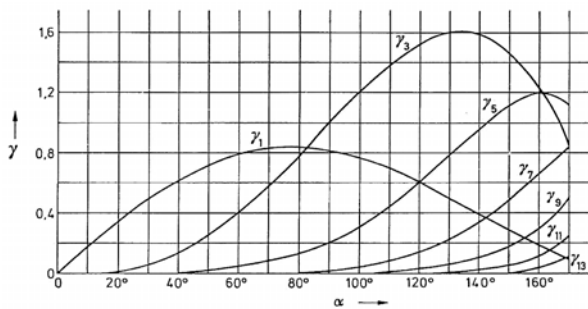
Obciążenia wywoływane przez dzwony można również wyznaczać ze wzorów uproszczonych. Według Neuferta [4], o ile nie wykonuje się dokładnych obliczeń, amplitudy sił pionowych i poziomych wywołanych przez dzwony można przyjmować następująco:

– zawieszenie dzwonu na jarzmie prostym (ryc. 8)

$$H = 1,55 \cdot G, \quad V = 3,1 \cdot G, \quad (48)$$

– zawieszenie dzwonu na jarzmie wykrębnym (ryc. 9)

$$H = 0,25 \cdot G, \quad V = 1,5 \cdot G. \quad (49)$$



Ryc. 6. Wartości współczynników γ oraz β w zależności od kąta α maksymalnego wychYLENIA dzwonu (wykresy z DIN 4178, April 2005 [6])

Fig. 6. Coefficients γ and β as functions of the maximum bell swing angle α (according to DIN 4178, April 2005 [6])

$$V(t, \alpha) = G + cG(\beta_2(\alpha)\cos2\omega_1 t + \beta_4(\alpha)\cos4\omega_1 t + \beta_6(\alpha)\cos6\omega_1 t). \quad (43)$$

Introducing the frequencies for the harmonics $i = 1, 2, 3, \dots$ according to the formula

$$\omega_i = i\omega \quad (44)$$

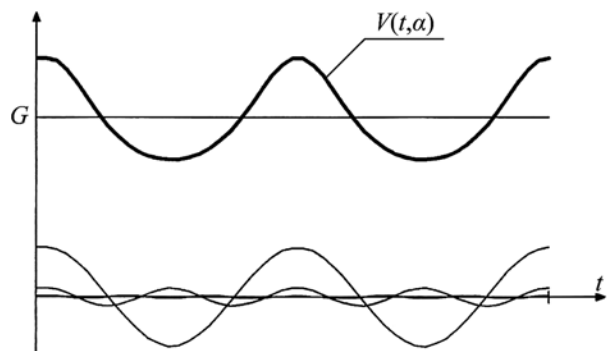
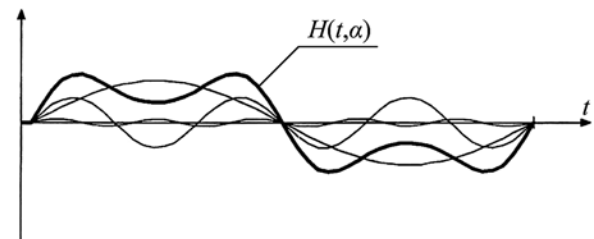
the functions (42) and (43) can be given in the form (fig. 7)

$$H(t, \alpha) = cG(\gamma_1(\alpha)\sin\omega_1 t + \gamma_3(\alpha)\sin\omega_3 t + \gamma_5(\alpha)\sin\omega_5 t), \quad (45)$$

$$V(t, \alpha) = G + cG(\beta_2(\alpha)\cos\omega_2 t + \beta_4(\alpha)\cos\omega_4 t + \beta_6(\alpha)\cos\omega_6 t). \quad (46)$$

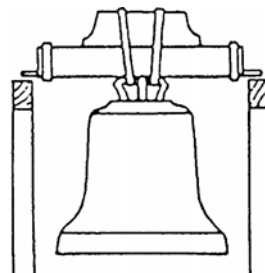
For the subsequent harmonics one can also introduce the vibration periods according to

$$T_i = \frac{1}{i} T. \quad (47)$$

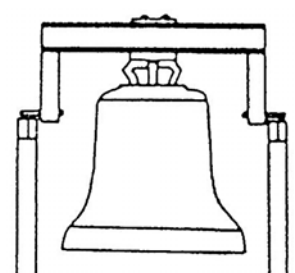


Ryc. 7. Wykresy funkcji $H(t, \alpha)$, $V(t, \alpha)$

Fig. 7. Plots of functions $H(t, \alpha)$, $V(t, \alpha)$



Ryc. 8. Jarzmo proste [4]
Fig. 8. Plain yoke [4]



Ryc. 9. Jarzmo wykrębnym [4]
Fig. 9. Cranked yoke [4]

Współczynnik dynamiczny określony jest wzorem

$$\eta = \frac{n_e^2}{n_e^2 - n_m^2}, \quad (50)$$

gdzie: n_e – częstość drgań własnych wieży,
 n_m – częstość danej składowej harmoniczej wymuszającej drgania.

W przypadku rezonansu współczynnik dynamiczny należy przyjmować $\eta = 10$.

Okres wahan dzwonu mieści się na ogół w granicach $1,5 \text{ s} \leq T_1 \leq 3 \text{ s}$. Dla dominującej trzeciej składowej harmoniczej mamy $0,5 \text{ s} \leq T_3 \leq 1 \text{ s}$, a dla piątej składowej $0,3 \text{ s} \leq T_5 \leq 0,6 \text{ s}$, gdzie $s = 1$ sekunda. Wymuszenia o okresach T_3 i T_5 leżą często w obszarze okresów drgań własnych wieży i powinny być brane pod uwagę w obliczeniach.

Z uwagi na stosunkowo niskie wartości tłumienia drgań należy zawsze sprawdzać możliwość powstania rezonansu dla trzeciej składowej harmoniczej wymuszenia drgań. W przypadku kilku dzwonów wymuszających drgania należy wyznaczyć widmo pierwszych kilku częstości drgań własnych wieży, najlepiej przez pomiar na obiekcie. Wielkości dzwonów należy tak dobierać, by pierwsza, trzecia i piąta częstości drgań wymuszających leżały poza widmem częstości drgań własnych wieży. Niebezpieczeństwo rezonansu występuje wtedy, gdy częstość drgań własnych wieży różni się od częstości najbliższej składowej harmoniczej o mniej niż 20%. Wymaganie to dotyczy przede wszystkim trzeciej składowej harmoniczej wymuszenia drgań przez dzwony.

Dla każdego odlanego dzwonu wytwórca powinien podać ton dzwonu oraz następujące parametry:

- d – średnica dzwonu,
- G – ciężar dzwonu,
- α – maksymalny kąt wychylenia dzwonu w stopniach,
- a – liczba uderzeń serca dzwonu na 1 minutę,
- c – parametr kształtu dzwonu.

Ze wzorów (48) i (49) wynika, że oddziaływania dzwonu zawieszonoego na jarzmie wykorbionym są znacznie mniejsze niż oddziaływania dzwonu na jarzmie prostym. Stare dzwony były bowiem na ogół zawieszane na jarzmach prostych, zatem wywoływały duże oddziaływania dynamiczne na konstrukcje wsporcze i nie były obojętne dla konstrukcji wieży. Często również przy dobrej koniunkturze ekonomicznej w trakcie rozwoju parafii na wieżach kościelnych zawieszano nowe dodatkowe dzwony, które wraz z dzwonami starymi zwiększają obciążenia dynamiczne wieży. W takiej sytuacji, w celu zmniejszenia oddziaływań dynamicznych, zarówno stare jak i nowe dzwony zawieszano na jarzmach wykorbionych.

Przy zmianie zawieszenia dzwonu z jarzma prostego na wykorbione zmniejszenie poziomych oddziaływań dynamicznych na ogół nie jest tak korzystne jak podaje pierwszy wzór Neuferta (49). Z doświadczenia autora niniejszej pracy wynika, że wielkość poziomych oddziaływań dzwonu zawieszonoego na jarzmie wykorbionym stanowi ok. 30–45% wielkości poziomych oddziaływań

Action of bells on its belfry is dynamic. In practice belfries can be analyzed as loaded statically with equivalent forces assumed. They are determined from a multiplication of real force amplitudes given by (45) and (46) by a dynamic coefficient.

The loading due to bells can also be found using simplified relations. According to Neufert [4], if the accurate computations are not performed, the amplitudes of vertical and horizontal forces evoked by bells can be taken as:

- for a bell hanging from a plain yoke (fig. 8)

$$H = 1,55 \cdot G, \quad V = 3,1 \cdot G, \quad (48)$$

- for a bell hanging from a cranked yoke (fig. 9)

$$H = 0,25 \cdot G, \quad V = 1,5 \cdot G. \quad (49)$$

The dynamic coefficient is given by

$$\eta = \frac{n_e^2}{n_e^2 - n_m^2}, \quad (50)$$

where: n_e – belfry natural frequency,
 n_m – frequency of a given harmonic excitation.

In a case of resonance the dynamic coefficient should be taken as $\eta = 10$.

The bell swinging period is usually in the range $1.5 \text{ s} \leq T_1 \leq 3 \text{ s}$. For the dominating third harmonic one gets $0.5 \text{ s} \leq T_3 \leq 1 \text{ s}$, and for the fifth component $0.3 \text{ s} \leq T_5 \leq 0.6 \text{ s}$, where $s = 1$ second. Excitation with the periods T_3 and T_5 are usually in the range of belfry natural frequencies and should be taken into account in computations.

Due to relatively low values of vibration damping one has always to check a possibility of resonance with the third harmonic of the excitation. In the case of several bells exciting vibrations a spectrum for a few first natural frequencies of belfry has to be determined, preferably by in-situ measurements. The bell dimensions should be adopted in such a way that the first, third and fifth excitation frequencies lay beyond the spectrum of belfry natural frequencies. Resonance danger takes place when a belfry natural frequency differs by less than 20% from the closest harmonic frequency. This requirement is especially valid for the third harmonic component of bell excitations.

For each bell cast, the bell founder should specify the bell note and the following parameters:

- d – bell diameter,
- G – bell weight,
- α – maximum bell swinging angle in degrees,
- a – number of clapper strokes per minute,
- c – bell shape parameter.

It turns out from the formulae (48) and (49) that bell excitations in a case of a cranked yoke are much smaller than in a case of a plain yoke. Old bells were usually hanging from plain yokes and exerted large excitations on their supporting structures. The excitations

dzwonu zawieszono na jarzmie prostym, gdyż w takim stopniu zmniejsza się współczynnik kształtu ϵ występujący we wzorze (45).

Dla nowo projektowanych dzwonnicy zawsze przyjmuje się dzwony zawieszono na jarzmach wykrębnionych. Zawieszenie na jarzmie wykrębnionym wymaga również mniej energii potrzebnej do wzbudzenia i podtrzymania wahań dzwonu.

Wprowadzone wyżej wzory określające ruch dzwonu oraz wielkości jego oddziaływań na konstrukcję wsporczą i wieżę pozostają słuszne, gdy dzwon wykonuje wahań swobodne. Wahań swobodne jednak szybko zanikają, zatem potrzebne są siły podtrzymujące ruch dzwonu. Dzwon w ruchu ustalonym wykonuje drgania wymuszone.

Czy wzory wprowadzone dla wahań swobodnych dzwonu mogą być słuszne dla dzwonu wykonującego ustalone drgania wymuszone? To zależy od sposobu podtrzymywania ruchu dzwonu.

Dzwonnicy, tj. osoby wzbudzające ruch dzwonu, nie mogą działać wbrew temu, co „chce” dzwon, lecz jedynie muszą go wspierać w podtrzymaniu ruchu. Dzwonnik musi współdziałać z dzwonem w rytmie jego wahań swobodnych. Podtrzymywanie wahań dzwonu w taki sposób sprowadza się do zrównoważenia tłumienia i można przyjąć, że dzwon wykonuje wahań wymuszone, które są równoważne wahań swobodnym bez tłumienia. W takiej sytuacji wzory określające wahań swobodne pozostają słuszne dla dzwonu wykonującego wahań ustalone wymuszone. Pociąganie przez dzwonnika (dzwonników) za linę (liny) w rytmie wahań swobodnych dzwonu jest najwłaściwszym naturalnym sposobem podtrzymania jego ruchu. Do tego potrzebne są wyczucie i doświadczenie.

Obecnie większość dzwonów jest napędzanych mechanicznie. Stosuje napęd łańcuchowy złożony z silnika elektrycznego z małym kołem zębatym na osi wirnika połączonym łańcuchem z dużym kołem zamocowanym do jarzma dzwonu z jednej lub z dwóch stron. Dzwony z napędem łańcuchowym są ruchome. Często jednak dzwony pozostają nieruchome, a dźwięk wydobywany jest przez ruchome serce pociągane liną. Przykłady takich mechanizmów zastosowanych w jednym z kościołów w Barcelonie pokazane są na ryc. 10 i 11.

Napęd łańcuchowy jest prosty w wykonaniu i stosunkowo tani. Jego wadą, szczególnie w przypadku dużych dzwonów, jest bardziej gwałtowne w porównaniu do napędu ręcznego oddziaływanie na dzwon, w wyniku czego powstają większe reakcje na podporach dzwonu. W pewnych przypadkach zamocowanie dzwonu na podporach może ulec zniszczeniu. Przykładem jest zniszczenie zamocowania podstawy łożysk podporowych największego w Polsce dzwonu Bogurodzica w Licheniu (14,7 tony) pokazanego na ryc. 12. Dzwon Bogurodzica jest zawieszony w jednej z wież Bazyliki w Licheniu, rys. 13 i 14.

Zniszczenie zamocowania dzwonu Bogurodzica polegało na ścięciu śrub mocujących podstawę łożyska do jednej z belek żelbetowych, na których dzwon jest ustawiony, ryc. 15.

were also important for belfry structures. Very often, in a situation of good economic conditions during the parish history, new additional bells were mounted which increased substantially the loading on the belfries. In such cases new and old bells were mounted using cranked yokes.

The change from a plain to a cranked yoke lead to a decrease of horizontal excitations which, however, is not so emphasized as the first Neufert formula suggests (49). The author's experience indicates that the magnitude of horizontal excitation in the case of the cranked yoke is usually equal to about 30–45% of the excitation in the plain yoke case. It is due to the respective change of the shape coefficient ϵ present in (45).

In the cases of newly designed belfries only cranked yokes are considered. Such a layout requires less energy necessary to start and sustain the bell swinging, too.

The formulae derived above determining the bell motion and magnitudes of its actions on the supporting structure and the belfry remain valid only when the bell undergoes free vibrations. However, the free vibrations decay rapidly and external forces are necessary to sustain the bell motion. So, the steady-state bell vibrations are actually forced.

Hence, the question arises, if the formulae derived for the case of free vibrations of a bell can be valid in the case of steady-state forced vibrations? It turns out that the answer depends on the method of motion sustaining.

The bell ringers who start the bell swinging cannot act against the “will” of the bell but have to assist in swinging sustainment only. The bell ringer must collaborate with the bell in the rhythm of its free vibrations. Swinging sustainment in this way leads to equilibrating of damping and it can be assumed that the bell undergoes forced vibrations equivalent to free undamped vibrations. In such a case the formulae describing the free vibrations remain valid in the forced vibration case. Pulling the rope by a bell ringer in the rhythm of the bell free vibrations is the most proper, natural way to sustain the bell motion. This requires experience and a feeling.

Nowadays the majority of bells is driven mechanically. Usually a chain drive is used with an electric engine and a small gear on the rotor axle connected by a chain to a large wheel mounted at a bell yoke on one or both sides. Bells with a chain drive are movable. However, quite often the bells remain fixed and the sound is made by a movable clapper driven by a rope. Examples of such layout in one of Barcelona churches are presented in figs. 10 and 11.

The chain drive is relatively easy and cheap to construct. Its drawback, especially in a case of large bells is a too rash action on the bell when compared to a manual drive. This results in larger reactions at bell supports. In some cases these supports can be destroyed. As an example the destruction of support bearing bases at the largest bell in Poland – *Bogurodzica* (Mother of God) bell in Licheń (14.7 tons) is presented



Ryc. 10-11. Napędy mechaniczne dzwonów w jednym z kościołów w Barcelonie

Fig. 10-11. Mechanical drives of bells in one of churches in Barcelona



Ryc. 12. Fragment napędu łańcuchowego dzwonu Bogurodzica w Licheniu

Fig. 12. Detail of chain drive of Bogurodzica bell in Licheń



Ryc. 13. Wieża dzwonowa w Licheniu

Fig. 13. Belfry in Licheń



Ryc. 14. Usytuowanie dzwonu wewnątrz wieży

Fig. 14. The bell location inside the belfry

W związku z zaistniałą awarią postanowiono zamienić napęd łańcuchowy na bardziej łagodny napęd elektromagnetyczny. Przykład napędu elektromagnetycznego przedstawiony jest na ryc. 16.

Silnik liniowy składa się z induktora oraz dwuwarstwowego bieznika z blachy stalowej i aluminiowej. W obwodzie magnetycznym silnika liniowego występują siła wywołująca ruch wzdłużny bieznika względem induktora oraz siła wzajemnego przyciągania

in fig. 12. This bell hangs in one of towers in Licheń Basilica, figs. 13 and 14.

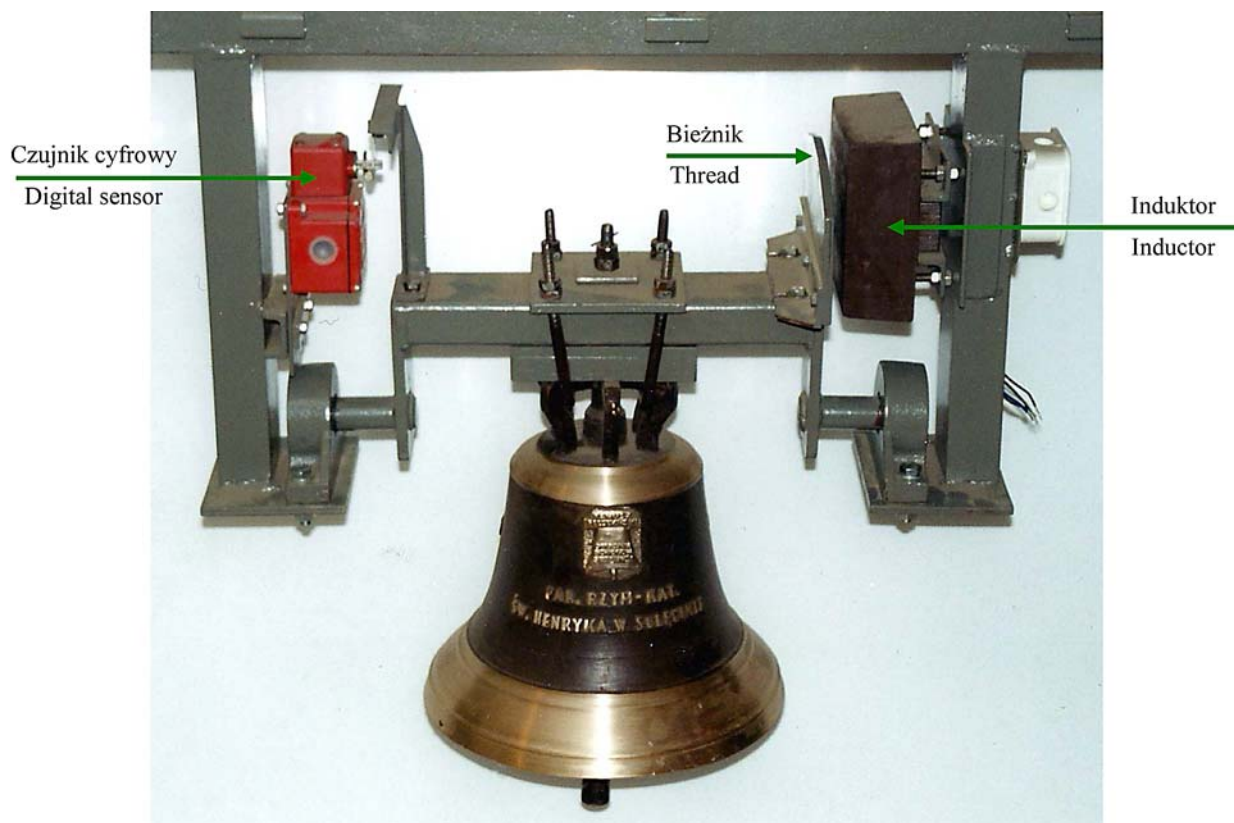
The bell mount was destroyed by shearing the screws fixing the bearing base to one of reinforced concrete beams supporting the bell, fig. 15.

Due to this situation it was decided to change the chain drive to a more delicate electromagnetic drive. An example of an electromagnetic drive is presented in fig. 16.



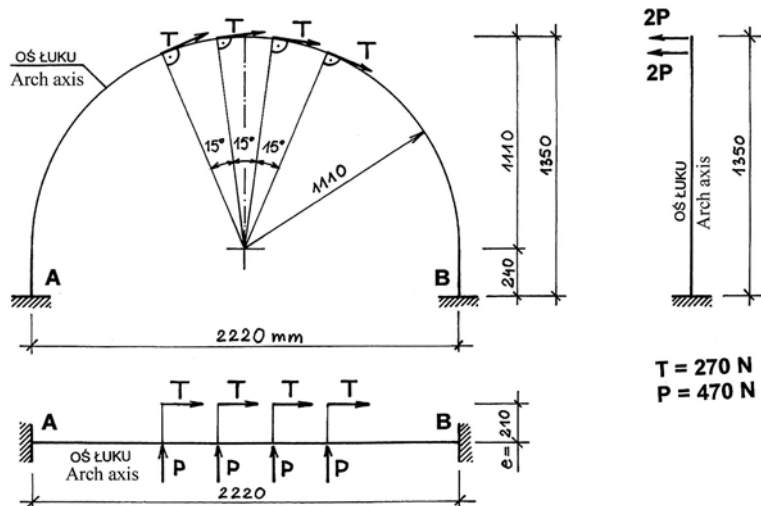
Ryc. 15. Ścięte śruby mocujące podstawę łożyska dzwonu do belki żelbetowej

Fig. 15. Sheared screws fixing the bell bearing base to a RC beam

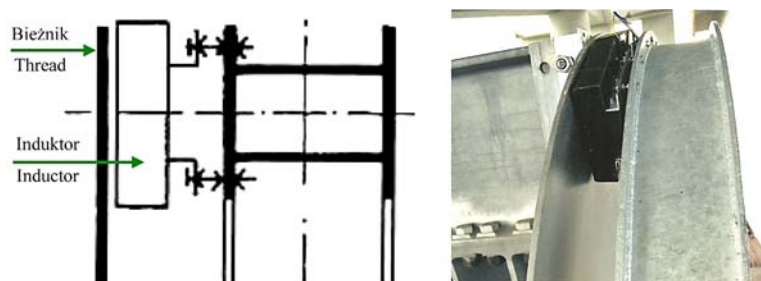


Ryc. 16. Elektromagnetyczny napęd dzwonu wykonany przez firmę PRAIS (za zgodą firmy PRAIS)

Fig. 16. Bell electromagnetic drive produced by PRAIS (courtesy of PRAIS)



Ryc. 17. Siły działające na łuk stalowy
Fig. 17. Forces acting on the steel arch



Ryc. 18. Detal mocowania induktora
Fig. 18. Detail of the inductor mount

bieżnika i induktora. Do uruchomienia i podtrzymania ruchu dzwonu tak dużego jak dzwon Bogurodzica potrzebnych jest kilka silników liniowych. W firmie PRAIS powstał projekt napędu dzwonu Bogurodzica składającego się z ośmiu silników liniowych. Dla uzyskania pełnej efektywności działania silników liniowych autor niniejszego artykułu we współpracy z firmą PRAIS zaproponował rozmieszczenie silników na okręgach symetrycznie po obu stronach jarzma i wykonał projekt konstrukcji wsporczej, na której zainstalowano silniki liniowe [7]. Siły działające na łuk stalowy przedstawione są na ryc. 17.

Dla efektywnego działania silnika liniowego szczelina między induktorem i bieżnikiem powinna wynosić ok. 2 mm (ryc. 18). Z tego powodu, dla uzyskania odpowiedniej sztywności, łuk wsporczy zaprojektowano jako utwierdzony na podporach w postaci spawanego profilu zamkniętego. Przemieszczenie poziome łuku w miejscu mocowania induktorów wynosi ok. 0,22 mm. W tych warunkach zapewniona jest właściwa praca silnika liniowego. Widok zrealizowanej konstrukcji przedstawiony jest na ryc. 19 i 20.

Napęd elektromagnetyczny jest łagodny i ma dynamikę zbliżoną do napędu ręcznego. Można zatem uznać, że wzory wyprowadzone dla wahań swobodnych dzwonu są słuszne dla dzwonu wykonującego ustalone drgania wymuszone napędem elektromagnetycznym.

Ze względu na dominującą masę dzwonu, traktowanie dzwonu jako wahadło fizyczne z pominięciem

A linear induction motor consists of an inductor and a two-layered tread made of steel and aluminum plates. In the magnetic circuit of the linear induction motor a force exciting the longitudinal motion of the thread with respect to the inductor is exerted as well as an attraction force between the thread and the inductor. To start and sustain the motion of the bell as large as *Bogurodzica* a number of linear induction motors is necessary. The design of *Bogurodzica* bell drive by the company PRAIS includes eight motors. In order to achieve the full effectiveness of the drive, the author collaborated with PRAIS in the design of location of the motors on perimeters at both sides of the bell yoke and designed the supporting structure on which the motors are located [7]. The forces acting on the steel arch are shown in fig. 17.

The gap between the inductor and the thread should be of about 2 mm to achieve the full effectiveness of the drive (fig. 18).

For this reason, to achieve the appropriate stiffness, the supporting arch was designed from a welded closed profile, fixed at the supports. The horizontal displacement of the arch at

the inductor locations is about 0.22 mm. In this way a correct functioning of the linear induction motor is ensured. The designed structure is presented in figs. 19 and 20.

The electromagnetic drive is steady and has the dynamic characteristics similar to the manual drive. So it can be concluded, that the relations derived for free vibrations of bells are valid also for a bell vibrating under an electromagnetic excitation.

Due to the dominant bell mass, analysis of the bell as a physical pendulum with the clapper mass neglected is justified to determine the dynamic influence of the bell on the supporting structure and the belfry where it is mounted. The dynamic action of the bell on the structure has to be taken into account for safety reasons. However, it is in fact a negative side effect when compared to the main role of the bell, i.e. the generation of sound. In this aspect the system bell-clapper is to be considered. The sound effects depend on the mutual correlation between the bell and the clapper. Thus, this system has to be modelled as a double pendulum, where the bell motion is evoked by the rotational moment M_d , and the clapper motion – by the bell motion at the point where the clapper is hung. Both motions are mutually interrelated.

A model of the bell-clapper system as a double pendulum is presented in fig. 21.

O_d – bell rotation axis
 m_d – bell mass



Ryc. 19. Konstrukcja łuku wsporczy dla silników liniowych
Fig. 19. Structure of the supporting arch for linear induction motors



Ryc. 20. Zrealizowany napęd elektromagnetyczny dzwonu Bogurodzica w Licheniu
Fig. 20. The electromagnetic drive for Bogurodzica bell in Licheń

serca jest uzasadnione z punktu widzenia określenia oddziaływań dynamicznych dzwonu na konstrukcję wsporczą oraz wieżę, na której jest on zainstalowany. Dynamiczne oddziaływanie dzwonu na konstrukcję, które ze względów bezpieczeństwa musi być brane pod uwagę, jest jednak negatywnym efektem ubocznym w porównaniu z podstawową funkcją dzwonu, jaką jest wydobywanie dźwięku. W tym aspekcie mamy do czynienia z układem dzwon-serce. Efekt dzwonienia jest zależny od wzajemnej korelacji dzwonu i serca. Układ dzwon-serce należy zatem modelować jako wahadło podwójne, w którym ruch dzwonu jest wymuszony obciążeniem momentem obrotowym M_d , a ruch serca jest wymuszony kinematycznie ruchem dzwonu w punkcie zawieszenia serca. Ruch dzwonu i ruch serca są z sobą sprzężone.

Model układu dzwon-serce jako wahadło podwójne przedstawiony jest na ryc. 21. Dla opisu tego układu wprowadzono następujące oznaczenia:

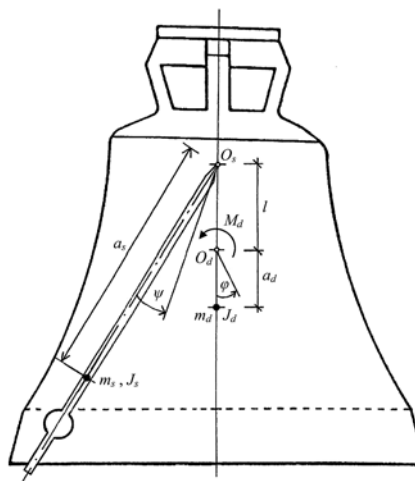
- O_d – oś obrotu dzwonu
- m_d – masa dzwonu
- J_d – moment bezwładności dzwonu względem osi O_d
- O_s – os obrotu serca
- m_s – masa serca
- J_s – moment bezwładności serca względem osi O_s
- M_d – moment obciążający dzwon
- φ – kąt obrotu dzwonu
- ψ – kąt obrotu serca

Równania opisujące ruch układu dzwon-serce modelowanego jako wahadło podwójne są następujące [5]:

$$(J_d + m_s l^2) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - m_s a_s l \cos(\psi - \varphi) \frac{d^2 \psi}{dt^2} + m_s a_s l \sin(\psi - \varphi) \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + g(m_d a_d + m_s l) \sin \varphi = -M_d \quad (51)$$

$$J_s \frac{d^2 \psi}{dt^2} - m_s a_s l \cos(\psi - \varphi) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - m_s a_s l \sin(\psi - \varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + g m_s a_s \sin \psi = 0.$$

- J_d – bell moment of inertia with respect to the axis O_d
- O_s – clapper rotation axis
- m_s – clapper mass
- J_s – clapper moment of inertia with respect to the axis O_s
- M_d – moment load acting on the bell
- φ – bell rotation angle
- ψ – clapper rotation angle



Ryc. 21. Układ dzwon-serce jako wahadło podwójne
Fig. 21. Bell-clapper system as a double pendulum

Equations describing the motion of the bell-clapper system modelled as a double pendulum take the following form [5]:

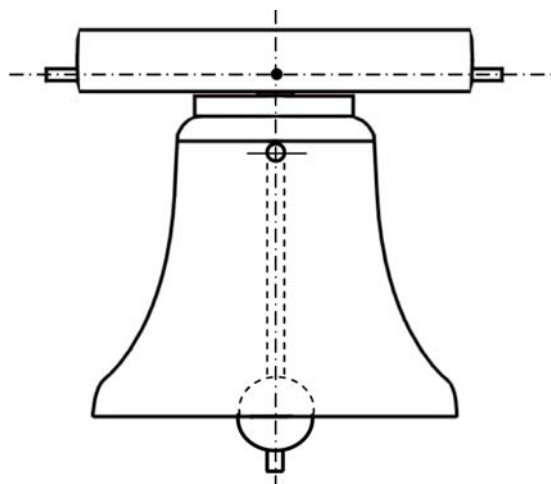
$$(J_d + m_s l^2) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - m_s a_s l \cos(\psi - \varphi) \frac{d^2 \psi}{dt^2} + m_s a_s l \sin(\psi - \varphi) \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + g(m_d a_d + m_s l) \sin \varphi = -M_d \quad (51)$$

$$J_s \frac{d^2 \psi}{dt^2} - m_s a_s l \cos(\psi - \varphi) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - m_s a_s l \sin(\psi - \varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + g m_s a_s \sin \psi = 0.$$

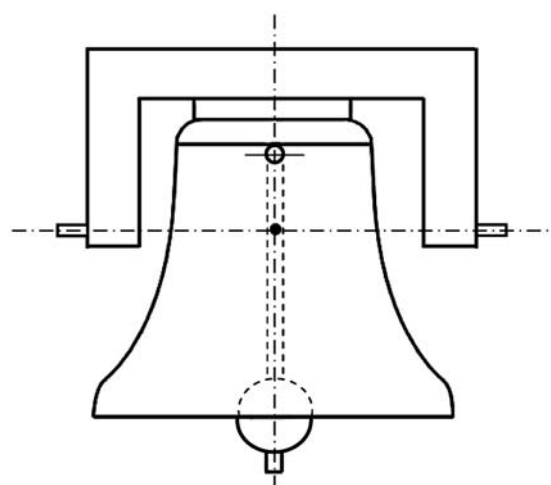
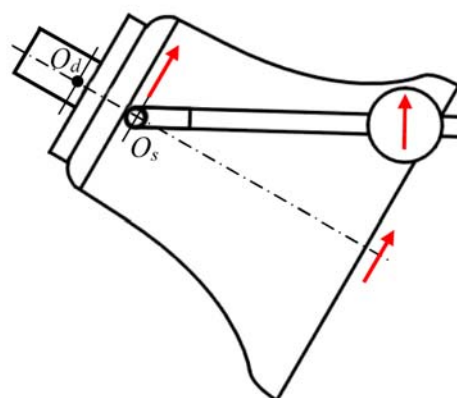
Jest to układ dwóch nieliniowych równań różniczkowych względem funkcji czasu $\varphi(t)$, $\psi(t)$.

Równania (51) nie stanowią jednak pełnego opisu układu dzwon-serce, gdyż nie jest w nich uwzględniony efekt odbicia serca o dzwon.

Układ dzwon-serce pracuje w odmienny sposób, w zależności od tego, czy dzwon jest zawieszony na jarzmie prostym, czy też na jarzmie wykrębnym. Te dwa przypadki różnią się położeniem punktu zawieszenia serca O_s względem osi obrotu O_d dzwonu (ryc. 21).



Ryc. 22. Jarzmo proste – serce dochodzące
Fig. 22. Plain yoke – approaching clapper



Ryc. 23. Jarzmo wykrębnione – serce opadające
Fig. 23. Cranked yoke – falling clapper

Jeśli dzwon jest zawieszony na jarzmie prostym, to punkt zawieszenia serca O_s znajduje się poniżej osi obrotu O_d dzwonu. Wtedy serce porusza się w tym samym kierunku co dzwon, szybciej niż dzwon. W pobliżu maksymalnego wychylenia dzwonu serce dogania dzwon i uderza w górną część wieńca dzwonu wydobywając dźwięk. Jest to tzw. *serce dochodzące* (ryc. 22).

Jeśli dzwon jest zawieszony na jarzmie wykrębnym, to punkt zawieszenia serca O_s znajduje się powyżej osi obrotu O_d dzwonu. Wtedy w pobliżu maksymalnego kąta wychylenia dzwonu serce porusza się w przeciw-

They represent a set of two non-linear differential equations with unknown functions of time $\varphi(t)$, $\psi(t)$.

Equations (51) do not cater for the full description of the bell-clapper system because they do not include the effect of clapper strikes on the bell.

The system consisting of the bell and the clapper exhibits different properties for plain and cranked yokes. These two cases differ in the relative position of the clapper hanging point O_s with respect to the bell rotation axis O_d (fig. 21).

If the bell is hanging from a plain yoke, then the clapper axis O_s is located below the bell rotation axis O_d . In this case the clapper moves in the same direction as the bell does, but it is faster. In the vicinity of the maximal bell swing angle the clapper overtakes the bell and strikes the upper part of the bell rim producing the sound. This layout is called as *approaching clapper* (fig. 22).

If the bell hangs from the cranked yoke, then the clapper axis of rotation O_s is located over the bell rotation angle. In this case, in the vicinity of the bell maxi-

nym kierunku niż dzwon. W momencie uderzenia serce opada na dolną część wieńca dzwonu. Jest to tzw. *serce opadające* (ryc. 23).

W trakcie eksploatacji dzwonu w czasie wielu, np. kilkuset lat, dzwony często pękają. Pęknięcia biorą swój początek w miejscach uderzenia serca w wieniec dzwonu. Po wielu latach eksploatacji, by zapobiec pęknięciu dzwonu, można zmienić miejsca uderzenia serca w wieniec przez obrót dzwonu o 90 stopni.

Pęknięcia dzwonu mogą być spowodowane również innymi przyczynami, np. przez zbyt ciężkie serce dzwonu.

Serca dzwonów również pękają, np. w XIX w. serce dzwonu Zygmunta pękało trzykrotnie. Obecne, nowe serce zainstalowano w roku 2001. Upadek odłamka pękniętego serca może być niebezpieczny i może wywrządzić poważne szkody. Z tego powodu elementy serca zabezpiecza się stalowymi linkami.

mum swinging angle the clapper moves in the opposite direction than the bell. The strike is produced by the clapper falling down on the lower part of the bell rim. This layout is called as *falling clapper* (fig. 23).

During their service in many years, sometimes during several hundreds of years, the bells break frequently. The cracks initiate at the spots where clappers strike bell rims. This can be prevented after some years of service by rotating the bell by 90 degrees and changing the striking spot. Breaking of bells can also be attributed to too heavy clappers.

Also the clappers do break, e.g. the clapper of *Zygmunt* bell (Cracow cathedral) broke thrice during the 19th century. The currently existing clapper was installed in 2001. Falling of the separated fragment of a clapper can be dangerous and may lead to a serious damage. To eliminate such a danger, clapper parts can be secured by steel cables.

LITERATURA

- [1] Januszajtis A.: *Gdańskie zegary, dzwony i kariliony*, Wyd. Diecezji Pelplińskiej „Bernardinum”, 2003.
- [2] Jaworski T., Nasieniewski M., Brzegietka K.: *Tajemnice starych dzwonów Torunia i Chełmna*, TONiK Toruń 2001.
- [3] Müller F.P.: *Berechnung und Konstruktion von Glockentürmen*, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin – München 1968.
- [4] Neufert E.: *Podręcznik projektowania architektonicznego*, Arkady, Warszawa 1980.
- [5] Huber M.T.: *Mechanika ogólna i techniczna*, PWN, Warszawa 1956.
- [6] DIN 4178. *Glockentürme. Berechnung und Ausführung*, April 2005.
- [7] Rapp P.: *Projekt konstrukcji wsporczej dla silników liniowych do napędu dzwonu Bogurodzica w świątyni Matki Bożej Licheńskiej*, Poznań, październik 2004.

Streszczenie

W prezentowanym artykule na wstępie przedstawiono nawiązanie do historii oraz krótki opis dzwonu jako instrumentu muzycznego. W głównym nurcie artykułu w sposób bardziej szczegółowy omówiono kilka podstawowych zagadnień, takich jak mechanika dzwonu traktowanego jako wahadło fizyczne wykonujące płaskie drgania wokół osi obrotu w miejscu oparcia jarzma na konstrukcji wsporczej, oddziaływanie dzwonu na konstrukcję wsporczą, sposoby wzbudzania i podtrzymywania drgań dzwonu, elektromagnetyczny napęd największego w Polsce dzwonu Bogurodzica w Licheniu oraz zawieszenia dzwonów na jarzmach prostych i wykorbionych. Omawiane zagadnienia mają istotne znaczenie nie tylko dla nowo projektowanych dzwonnicy, lecz w znacznie większym stopniu są ważne dla obiektów zabytkowych, w których dynamiczne oddziaływania dzwonów mogą mieć niekorzystny wpływ na ich konstrukcję.

Abstract

In the introduction to the paper a short historical background and a brief description of a bell as a musical instrument is presented. The main part of the paper is devoted to a few fundamental issues related to bell mechanics: bell analysis as a plane physical pendulum vibrating in about the axis passing through the point where yoke is fixed to the supporting structure, action of the bell on the supporting structure, methods of starting and sustaining the bell vibrations, electromagnetic drive of the largest bell in Poland – Bogurodzica and hanging the bells in plain and cranked yokes. These issues are of significant importance not only for newly designed belfries but even in a greater extent to monumental buildings where dynamic action of bells may have a negative influence on the structure.