**Archives of Photogrammetry, Cartography and Remote Sensing**
**Vol. 11, Cracow 2001**
**ISBN 83-915723-0-7**

# Аналіз коваріаційної матриці координат точок місцевості, визначених за елементами зовнішнього орієнтування аерокосмічного знімка

***Міщенко І.І.***

Національний університет
"Львівська політехніка"

## Analysis of covariation matrix of coordinates of terrain points determined by image elements of exterior orientation.

***Mishchenko I. I.***

***Abstract***

*Analytical analysis of covariational matrix under condition of preliminary determination of image is given. Expressions for all elements of covariational matrix of coordinates of terrain points are received. Covariations are represented as matrixes in which the sum of elements is equal to corresponding covariation.*

*It is shown when there is symmetric allocation of points on the image for determination of elements of exterior orientation the structure of covariational matrix of elements of exterior orientation causes the specific structure of covariational matrix of coordinates of terrain points. The covariations of this matrix do not depend of focal distance of aerial camera.*

Коваріаційну матрицю координат точок місцевості при відомій коваріаційній матриці елементів зовнішнього орієнтування аерокосмічного знімка можна представити як:

$$K_{X,Y} = C_{X,Y} \cdot K_{EЗO} \cdot C^{T}_{X,Y}, \tag{1}$$

де

$C_{(X,Y)} = \dfrac{\partial(X,Y)}{\partial(X_S,Y_S,Z_S,\alpha,\omega,\kappa)}$ - матриця часткових похідних від координат точок місцевості X, Y по ЕЗО знімка; $K_{EЗO}$ – коваріаційна матриця елементів зовнішнього орієнтування знімка.

При умові визначення коваріацій матриці (1) $K_{X,Y}$ в масштабі знімка та малих значеннях кутів нахилу знімка структура матриці $C_{X,Y}$ аналогічна структурі матриці часткових похідних від координат x, y точок знімка, тобто:

$$C_{(X,Y)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(X_S,Y_S,Z_S,\alpha,\omega,\kappa)}. \tag{2}$$

При визначені ЕЗО знімка за опорними точками матрицю $K_{X,Y}$ з точністю до $\sigma^2$ можна визначити за формулою (Міщенко І.І., 2000):

(3)

(4)

$$K_{x,y} = C_\xi \cdot Q_\xi \cdot C_\xi^t ,$$

де

$$Q_\xi = (A_\xi^t \cdot A_\xi)^{-1} ,$$

для i-тої точки знімка:

$$A_{\xi_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_i & (\frac{f^2}{c^2} + \xi_i^2) & \xi_i \cdot \eta_i & -\eta_i \\ 0 & 1 & \eta_i & \xi_i \cdot \eta_i & (\frac{f^2}{c^2} + \eta_i^2) & \xi_i \end{bmatrix},$$

при чому

$$\xi_i = \frac{x_i}{c}; \qquad \eta_i = \frac{y_i}{c}; \qquad c = |x_{\max}| = |y_{\max}| .$$

Структура матриці $C_\xi$ відповідно умові (2) аналогічна структурі матриці $A_\xi$, але занисується для j-тих точок знімка, координати яких визначаються.

Властивості матриці $Q_\xi$ описані в роботах (Міщенко І.І., 2000). Тут представимо $Q_\xi$ у вигляді:

$$Q_\xi = Q_\xi^{(f,c)} + Q_\xi^{(\xi,\eta)} ,$$

де

$$Q_\xi^{(f,c)} = \frac{1}{D} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{f^4}{c^4} \cdot n + 2 \cdot \frac{f^2}{c^2} \cdot \sum_1^n \xi_i^2\right) & 0 & 0 & -\frac{f^2}{c^2} \cdot n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{f^4}{c^4} \cdot n + 2 \cdot \frac{f^2}{c^2} \cdot \sum_1^n \xi_i^2\right) & 0 & 0 & -\frac{f^2}{c^2} \cdot n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{f^2}{c^2} \cdot n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f^2}{c^2} \cdot n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$Q_\xi^{(\xi,\eta)} = \begin{bmatrix} \frac{\left(\sum_1^n \xi_i^2 \cdot \eta_i + \sum_1^n \xi_i^2\right)}{D} & 0 & 0 & \frac{-\sum_1^n \xi_i^2}{D} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sum_1^n \xi_i^2 \cdot \eta_i + \sum_1^n \xi_i^2}{D} & 0 & 0 & \frac{-\sum_1^n \xi_i^2}{D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sum_1^n (\xi_i^2 + \eta_i^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sum_1^n \xi_i^2}{D} & 0 & 0 & \frac{n}{D} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sum_1^n \xi_i^2}{D} & 0 & 0 & \frac{n}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sum_1^n (\xi_i^2 + \eta_i^2)} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$D = n \cdot \left[\sum_1^n \xi_i^2 \cdot \eta_i^2 + \sum_1^n \eta_i^4\right] - \left(\sum_1^n \xi_i^2\right)^2 . \tag{10}$$

n – кількість точок на знімку, за якими визначаються елементи зовнішнього орієнтування.

Нагадаємо, що структура матриці $Q_\xi$ є справедливою для симетричної схеми розташування точок на знімку (Міщенко І.І., 1996; Doroshynskiy A., Mischenko I., 1997), а коваріації $Q_{\xi_{ij}}$ відповідають вектору невідомих:

$$\delta = \left[\delta X_S, \delta Y_S, \delta Z_S, \delta\alpha, \delta\omega, \delta\kappa\right]^t . \tag{11}$$

Матриця $Q_\xi^{\left(f/c\right)}$ для даної кількості точок характеризує вплив типу об'єктива (величини f/c) на точність визначення ЕЗО знімка. Матриця $Q_\xi^{(\xi,\eta)}$ в свою чергу характеризує вплив кількості точок та схеми їх розташування.

Таке представлення матриці $Q_\xi$ дає можливість в подальшому при визначенні $K_{x,y}$ за формулою (3) проаналізувати вплив вказаних параметрів на значення відповідних коваріацій.

З метою даного аналізу отримаємо матриці $K_{X_jX_k}, K_{X_jY_k}, K_{Y_jY_k}, K_{Y_jX_k}$, суми елементів яких дорівнюють відповідним коваріаціям:

$$\left.\begin{array}{ll} K_{X_jX_k} = L_{X_j}\cdot\left(Q_\xi^{\left(f/c\right)} + Q_\xi^{(\xi,\eta)}\right)\cdot L_{X_k} & K_{Y_jY_k} = L_{Y_j}\cdot\left(Q_\xi^{\left(f/c\right)} + Q_\xi^{(\xi,\eta)}\right)\cdot L_{Y_k} \\ K_{X_jY_k} = L_{X_j}\cdot\left(Q_\xi^{\left(f/c\right)} + Q_\xi^{(\xi,\eta)}\right)\cdot L_{Y_k} & K_{Y_jX_k} = L_{Y_j}\cdot\left(Q_\xi^{\left(f/c\right)} + Q_\xi^{(\xi,\eta)}\right)\cdot L_{X_k} \end{array}\right\}, \tag{12}$$

де $L_{X_j}, L_{Y_k}$ - діагональні матриці, елементами яких є елементи j-го та (j+1)-го рядків матриці $C_\xi$. Структура відповідних рядків описується (5).

По аналогії з (7), наприклад для $K_{X_jX_k}$, запишемо:

$$K_{X_jX_k} = K_{X_jX_k}^{\left(f/c\right)} + K_{X_jX_k}^{(\xi,\eta)}, \tag{13}$$

де елементи матриці $K_{X_jX_k}^{\left(f/c\right)}$ будуть характеризувати вплив на коваріацію $K_{X_jX_k}$ величини f/c, а елементи матриці $K_{X_jX_k}^{(\xi,\eta)}$ - залежність відповідної коваріації від кількості точок при визначенні ЕЗО знімка.

З врахуванням (12) та (13) отримаємо:

$$K_{X_jX_k}^{\left(f/c\right)} = L_{X_j}\cdot Q_\xi^{\left(f/c\right)}\cdot L_{X_k} + L_{X_j}\cdot Q_\xi^{(\xi,\eta)}\cdot L_{X_k}^{\left(f/c\right)} + L_{X_j}^{\left(f/c\right)}\cdot Q_\xi^{(\xi,\eta)}\cdot L_{X_k}, \tag{14}$$

$$K_{X_jX_k}^{(\xi,\eta)} = L_{X_j}^{(\xi,\eta)}\cdot Q_\xi^{(\xi,\eta)}\cdot L_{X_k}^{(\xi,\eta)}, \tag{15}$$

де

$$L^{(\xi,\eta)}_{X_{j(k)}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & \xi_j & & & \\ & & & \xi_j^2 & & \\ & 0 & & & \xi_j \cdot \eta_j & \\ & & & & & -\eta_j \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$L^{\left(\frac{f}{c}\right)}_{X_j} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ & & & \frac{f^2}{c^2} & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Або

$$K^{\left(\frac{f}{c}\right)}_{X_j X_k} = \frac{1}{D} \cdot \begin{bmatrix} \frac{f^4}{c^4} \cdot n + 2 \cdot \frac{f^2}{c^2} \cdot \sum_1^n \xi_i^2 & 0 & 0 & -\frac{f^4}{c^4} \cdot n - \frac{f^2}{c^2} \cdot n \cdot \xi_k^2 - \frac{f^2}{c^2} \cdot \sum_1^n \xi_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{f^4}{c^4} \cdot n - \frac{f^2}{c^2} \cdot n \cdot \xi_j^2 - \frac{f^2}{c^2} \cdot \sum_1^n \xi_i^2 & 0 & 0 & \frac{f^4}{c^4} \cdot n + \frac{f^2}{c^2} \cdot n \cdot \xi_k^2 + \frac{f^2}{c^2} \cdot n \cdot \xi_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tag{18}$$

Не важко помітити, що сума елементів матриці $K^{\left(\frac{f}{c}\right)}_{X_j X_k}$ дорівнює нулю. Така особливість зберігається для всіх матриць $K^{\left(\frac{f}{c}\right)}_{X_j Y_k}$, $K^{\left(\frac{f}{c}\right)}_{Y_j Y_k}$, $K^{\left(\frac{f}{c}\right)}_{Y_j X_k}$. Це означає, що при умові симетричного розташування точок на знімку при визначенні ЕЗО знімка тип об'єктиву (відношення f/c) не впливає на значення елементів коваріаційної матриці $K_{XY}$ (3). Кожний елемент даної матриці є фактично сумою елементів матриць вигляду (15). Тобто матриці (12) обгрунтовано можуть бути замінені матрицями:

$$\left.\begin{aligned} K_{X_j X_k} &= L^{(\xi,\eta)}_{X_j} \cdot Q^{(\xi,\eta)}_{\xi} \cdot L^{(\xi,\eta)}_{X_k} \\ K_{X_j Y_k} &= L^{(\xi,\eta)}_{X_j} \cdot Q^{(\xi,\eta)}_{\xi} \cdot L^{(\xi,\eta)}_{Y_k} \\ K_{Y_j Y_k} &= L^{(\xi,\eta)}_{Y_j} \cdot Q^{(\xi,\eta)}_{\xi} \cdot L^{(\xi,\eta)}_{Y_k} \\ K_{Y_j X_k} &= L^{(\xi,\eta)}_{Y_j} \cdot Q^{(\xi,\eta)}_{\xi} \cdot L^{(\xi,\eta)}_{X_k} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

І як наслідок, визначення коваріайної матриці координат точок місцевості за формулою (3) фактично означає визначення її за формулою:

$$K_{XY} = C^{(\xi,\eta)}_{\xi} \cdot Q^{(\xi,\eta)}_{\xi} \cdot (C^{(\xi,\eta)}_{\xi})^{t}, \tag{20}$$

де

$$C^{(\xi,\eta)}_{\xi_{(i)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_i & \xi_i^2 & \xi_i \cdot \eta_i & -\eta_i \\ 0 & 1 & \eta_i & \xi_i \cdot \eta_i & \xi_i^2 & \xi_i \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$Q^{(\xi,\eta)}_{\xi}$ описується (9).

Аналітичний аналіз структури коваріаційної матриці $K_{XY}$ (20) приводить до наступних рекомендацій:

- При визначенні ЕЗО знімка за опорними точками необхідно зберігати симетричне розташування точок на знімку. Це обумовлює особливу структуру коваріаційної матриці ЕЗО. В цьому випадку при подальшому визначенні координат точок місцевості за знайденими ЕЗО зберігається структура коваріаційної матриці координат точок місцевості вигляду (20). Коваріації цієї матриці не залежать від значення фокусної відстані об'єктива знімальної камери.
- Елементи зовнішнього орієнтування знімка, які знаходяться за опорними точками, повинні використовуватись в таких задачах, де задіяні всі шість елементів. Тільки в цьому випадку зберігаються всі властивості коваріаціної матриці ЕЗО. Це особливо стосується аерокосмічних знімків, які отримані довгофокусними знімальними камерами.

Рецензію на статтю склав проф., д.т.н. Дорожинський О.Л.

**Література:**

1. Doroshynskiy A., Mischenko I. Mathematical models of the a priori accuracy estimation in photogrammetry. Геодезія, карторафія і аерофотознімання. Наук.-техн. зб. –1997, вип. 58. с. 187-198.
2. Міщенко І.І. Можливості апріорної оцінки впливу систематичних спотворень знімків на фотограмметричні побудови. Вісник геодезії та картографії. – 1996. №2 (6) – с. 58-67.
3. Міщенко І.І. Властивості коваріаційних матриць при використанні фотограмметричних рівнянь колінеарності. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва (погляд у XXI століття). Ювілейний збірник наукових праць, присвячений 5-ій річниці професійного свята працівників геології, геодезії та картографії, Ліга-Прес, Львів, 2000, с.248-256.
4. Міщенко І.І. Про алгоритм апріорної оцінки точності результатів врівноваження фотограмметричних вимірювань. "Кадастр, фотограмметрія, геоінформатика – сучасні технології і перспективи розвитку". Матеріали 2-ої Міжнародної науково-практичної конференції. 17-19 жовтня 2000 р., НУ "Львівська політехніка" Львів – Краків 2000., с. 181-184.

***Анотація***

*Приведено аналітичний аналіз коваріаційної матриці координат точок місцевості, які отримані за попередньо визначеними елементами зовнішнього орієнтування знімка. Отримані аналітичні вирази для елементів коваріаційної матриці.*

*Показано, що при симетричному розташувнні точок на знімку при визначенні ЕЗО знімка структура коваріаційної матриці ЕЗО обумовлює специфічну структуру коваріаційної матриці координат точок місцевості. Коваріації даної матриці не залежать від фокусної відстані знімальної камери.*