

ANALIZA WYTRZYMAŁOŚCI PŁYTY LODOWEJ NA ZBIORNIKU WODNYM

Streszczenie

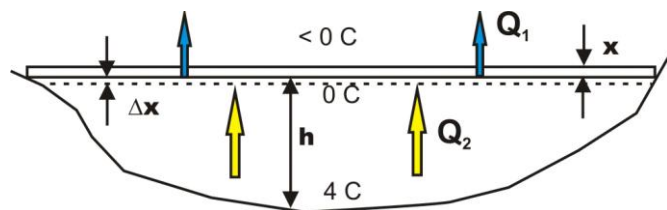
W pracy przedstawiono model komputerowy obciążonej płyty lodowej. Założono obciążenia rozłożone i siły skupione. Pole naprężenia zostało wyznaczone dla potrzeb analizy wytrzymałościowej. Uwzględniono siłę hydrostatycznego wyporu wody działająca na lód. Wyniki zostały uzyskane metodą elementów skończonych z wykorzystaniem systemu programowania ABAQUS. System Abaqus jest wykorzystywany na Wydziale Zarządzania i Modelowania Komputerowego przy wspomaganii zajęć dydaktycznych z wytrzymałości materiałów.

WSTĘP

W czasie zimy często można widzieć osoby spacerujące z dziećmi po tafli lodowej na naturalnych zbiornikach wodnych. Osoby te nie zdają sobie sprawy z niebezpieczeństwa na jakie narażają siebie oraz swoich bliskich. Wejście na lód zamrożonego zbiornika jest zawsze związane z ryzykiem możliwości załamania się lodu. Praca ma na celu pokazanie grożącego niebezpieczeństwa związanego z wejście na lód otwartego zbiornika wodnego. Na wstępie pracy krótko omówiono proces zamarzania wody na zbiorniku.

1. PRZYROST GRUBOŚCI PŁYTY LODOWEJ NA ZBIORNIKU WODNYM

Można obliczyć orientacyjną grubość pokrywy lodowej jako funkcję temperatury powietrza i czasu zamarzania. Przyrost cienkiej warstewki Δx na lodzie o grubości x następuje zgodnie z bilansem cieplnym określonym strumieniami ciepła Q_1 i Q_2 (rys. 1).



Rys. 1. Model zamarzania lodu na zbiorniku wodnym

Ciepło przemiany fazowej wody w lód w warstewce Δx wynosi

$$Q = L \cdot \rho \cdot S \cdot \Delta x \quad (1)$$

gdzie L jest ciepłem krzepnięcia wody równym 334000 J/kg, ρ jest gęstością wody równą 1000 kg/m³, S jest powierzchnią tafli lodowej, a ΔT jest różnicą temperatur pomiędzy dolną i górną powierzchnią lodu. Strumień ciepła przez warstwę lodu x w czasie Δt wynosi

$$Q_1 = C_L \cdot \frac{\Delta T}{x} \cdot S \cdot \Delta t \quad (2)$$

gdzie C_L jest przewodnictwem cieplnym lodu równym 0,92 J/(s·m·K). Ciepło dostarczane z głębi wody do warstwy lodu Δx w czasie Δt

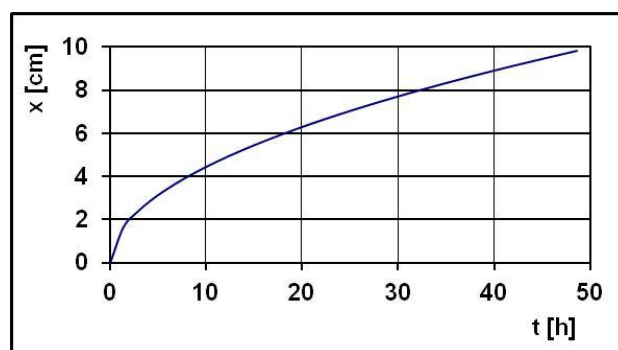
$$Q_2 = C_w \cdot \frac{\Delta T}{h} \cdot S \cdot \Delta t \quad (3)$$

gdzie C_w jest przewodnictwem cieplnym wody równym 0,58 J/(s·m·K), ΔT_2 jest różnicą temperatur pomiędzy dnem zbiornika i powierzchnią, czyli 4 K. Ostatecznie bilans cieplny w cienkiej warstwie Δx przedstawia się następująco

$$-Q = -Q_1 + Q_2 \quad (4)$$

Przy dostatecznie dużej głębokości h ciepło Q_2 jest małe w porównaniu z Q_1 i może być pominięte. Rozwiązanie prowadzi do parabolicznej zależności grubości warstwy lodu x od czasu

$$x = \sqrt{\frac{2C_L \Delta T}{L \cdot \rho}} \sqrt{t} \quad (5)$$



Rys. 2. Przyrost grubości płyty lodowej w zależności od czasu, czas w godzinach

Powyższy bardzo prosty model daje zawyżone wartości grubości tafli lodowej. W rzeczywistości przyrost grubości lodu na ogół jest nieznacznie wolniejszy [1]. Najważniejszym wnioskiem z przyjętego z modelu jest paraboliczna zależność grubości lodu od czasu. W miarę upływu czasu przyrost warstwy lodu jest coraz wolniejszy.

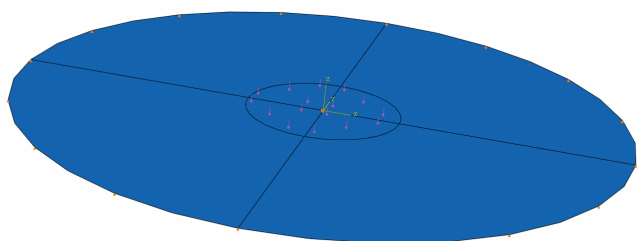
W prezentowanej analizie przyjęto następujące parametry lodu [2]: moduł sprężystości równy 1 GPa, liczba Poissona równa 0,2, wytrzymałość na rozerwanie 0,1 - 0,2 MPa.

2. WYTRZYMAŁOŚĆ PŁYTY LODOWEJ PRZY OBCIĄŻENIU ROZŁOŻONYM

Założono model płyty lodowej o średnicy 20 m (promień $R = 10$ m) i grubości $x = 8$ cm. Przyjęto równomierny nacisk na płytę odpowiadający obciążeniu przez 10 osób każda o masie $m = 50$ kg.

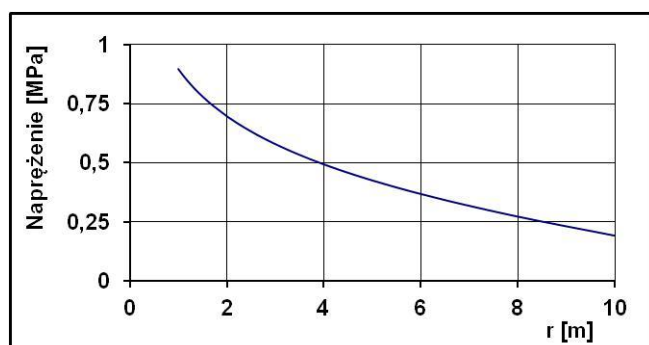
Przyjęto model o symetrii osiowej, w którym płyta kołowa podparta jest na obwodzie, a obciążenie jest równomiernym ciśnieniem p na powierzchni koncentrycznego koła o średnicy $2 \cdot r$ (rys. 3). Wtedy maksymalne naprężenie rozciągające w warstwie lodu będzie określone wzorem analitycznym [3,4]

$$\sigma_{\max} = \frac{3pr^2}{2x^2} \left[1 + 1,2 \cdot \ln \frac{R}{r} - 0,8 \cdot \frac{r^2}{4R^2} \right] \quad (6)$$



Rys. 3. Płyta kołowa obciążona ciśnieniem w środku

Wzór (6) pokazuje szybki wzrost naprężenia ze zmniejszającym się promieniem koła, w którym jest przyłożone równomierne ciśnienie (Rys. 4).



Rys. 4. Zależność naprężenia od promienia obszaru działania obciążenia.

Rozwiązanie analityczne ma tę słabą stronę, że nie uwzględnia wyporu hydrostatycznego wody. Aby uwzględnić wypór wody został zbudowany model numeryczny w programie Abaqus (rys. 5) Tafla lodowa została zamodelowana elementami powłokowymi 4-węzłowymi typu S4R [5], liczba elementów wynosiła 156. Model warstwy wody składał się z elementów przestrzennych 8-węzłowych typu C3D8RH [5] w liczbie 468.

Efekt siły wyporu uzyskano przez odpowiednie określenie stałych sprężystych warstwy wody. Dla słupa wody o przekroju S obniżenie warstwy lodu o wysokość y spowoduje powstanie siły wyporu równej

$$F = S \cdot y \cdot \rho \cdot g \quad (7)$$

gdzie ρ jest gęstością wody, a g jest przyspieszeniem ziemskim. Sprężyste ściśnięcie słupa wody o y musi spowodować siłę spręży-

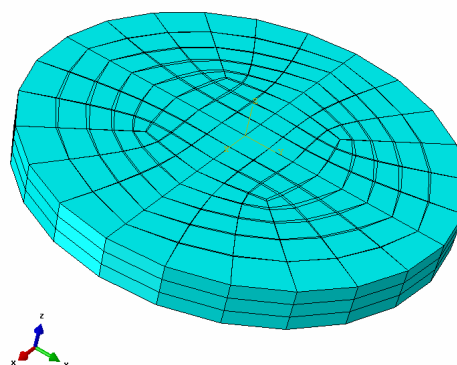
stą o tej samej wartości co siła wyporu. Siła sprężysta F określona jest prawem Hooke'a

$$\frac{F}{S} = E \frac{y}{h} \quad (8)$$

gdzie E jest modułem sprężystości tak dobranym, aby spełnić jednocześnie (7) i (8). Stąd przez porównanie siły F z (7) i (8) otrzymuje się

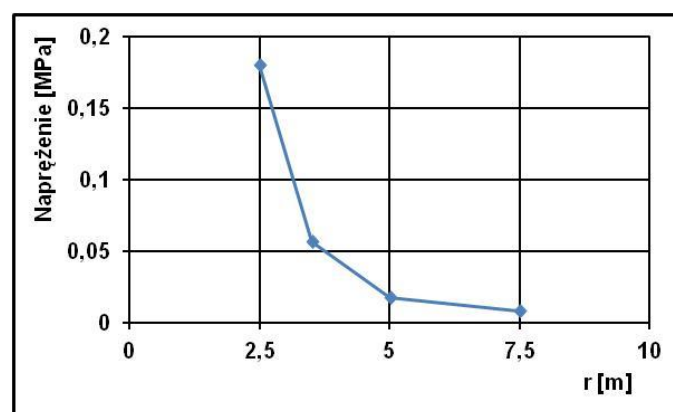
$$E = h \cdot \rho \cdot g \quad (9)$$

Moduł sprężystości E obliczony z (9) zapewni prawidłową symulację siły wyporu wody.



Rys. 5. Model kołowej tafli lodowej o średnicy 20 m spoczywającej na warstwie wody o głębokości 2 m.

Po uwzględnieniu siły wyporu wody, obliczone naprężenie rozciągające ma już wyraźnie mniejsze wartości (Rys. 6), ale też silniejszą zależność od promienia r . Naprężenie rośnie bardzo szybko ze zmniejszającym się promieniem, szybciej niżeli odwrotnie proporcjonalne. Zmiana promienia koła obciążenia r z 7,5 m na 2,5 m zwiększa naprężenie 21 razy i osiąga krytyczne naprężenie 0,1 - 0,2 MPa [2].

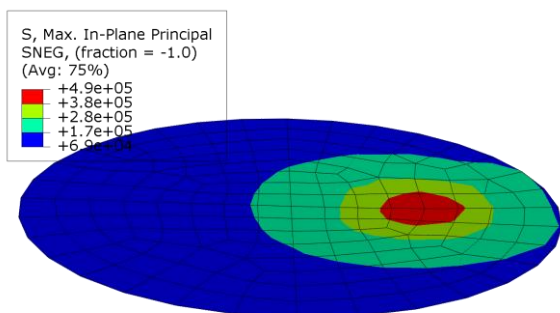


Rys. 6. Naprężenie w płycie przy obciążeniu rozłożonym w kole o promieniu r

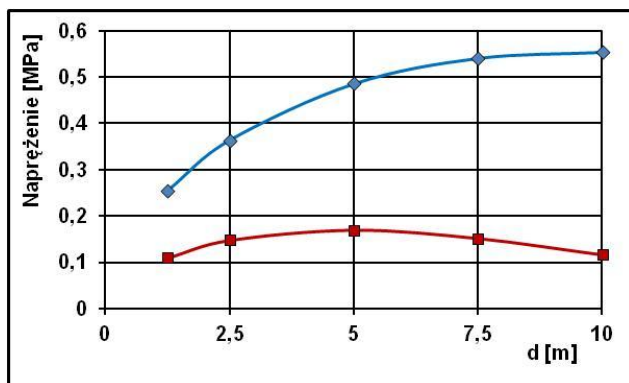
3. WYTRZYMAŁOŚĆ PŁYTY LODOWEJ POD OBCIĄŻENIEM SKUPIONYM

Ponownie została wykonana analiza przy obciążeniu skupionym w odległości od brzegu odpowiednio: 1,25 m, 2,5 m, 5 m, 7,5 m i 10

m (środek tafli). Wstępnie obliczenia przeprowadzono bez uwzględnienia siły wyporu wody (rys. 7). Maksymalne naprężenie rozciągające w lodzie wykazuje silną zależność od odległości d siły skupionej od brzegu (krzywa niebieska na rysunku 8). Naprężenie wyraźnie rośnie z odległością d .



Rys. 7. Naprężenia rozciągające w lodzie przy obciążeniu skupionym w odległości 5 m od brzegu.



Rys. 8. Zależność naprężenia w lodzie od odległości d od brzegu, krzywa niebieska - bez siły wyporu wody, krzywa czerwona - z siłą wyporu wody

Następnie została wykonana analiza dla obciążenia skupionego przy uwzględnieniu siły wyporu wody. W tym przypadku maksymalne naprężenie rozciągające w lodzie nie wykazuje już tak silnej zależności od odległości (krzywa czerwona na rysunku 8). Przy przesunięciu od 1,25 m do 5 m naprężenie wzrasta o ok. 50%.

Dolna krzywa na rys. 8 pokazuje naprężenia przy założeniu, że rozkład ciśnienia spełnia prawo Pascala (układ statyczny). Nie uwzględnia przepływów wody pod lodem i zakłada, że lód nie jest zawieszony (gdy woda w przerębli jest niższej niż 0,9 grubości lodu). Rzeczywista zależność naprężenia będzie umiejscowiona pomiędzy dolną i górną krzywą (rys. 8). Można się spodziewać, że przy poruszaniu się od brzegu do środka płyty, naprężenie na pierwszych kilku metrach będzie wzrastało i może przekroczyć krytyczną wartość 0,1 - 0,2 MPa [2].

PODSUMOWANIE

Z pracy wynikają zasadnicze wnioski końcowe:

1. przypadkowe skupianie się osób spacerujących po zamrożonym zbiorniku może powodować duży wzrost naprężenia w lodzie i niebezpieczeństwo załamania tafli,
2. przy poruszaniu się od brzegu w głąb tafli lodowej naprężenie wzrasta. Badanie wytrzymałości lodu przy brzegu nie daje pewności, że wartość krytyczna nie będzie przekroczona kilka metrów dalej, gdy nie ma możliwości wycofania się.

Pokrywa lodowa, w zależności od warunków atmosferycznych - słońca, opadów śniegu, deszczu, różnicy temperatur ulega najróżniejszym przemianom zmieniającym jej wytrzymałość. Dodatkowym niebezpieczeństwem jest śnieg zalegający na pokrywie lodowej. Zalegający mokry śnieg znacznie dodatkowo obciąża tafle lodową.

W podsumowaniu pracę należy zakończyć stwierdzeniem:

1. zawsze ryzykujesz wchodząc na lód!
2. jedynym rozwiązaniem jest korzystanie z bezpiecznych sztucznych lodowisk.

BIBLIOGRAFIA

1. "Niebezpieczny lód - bezpieczne lodowiska", Wodne Ochotnicze Pogotowie Ratunkowe w Dąbrowie Górniczej, strona internetowa www.woprpdg.com, dostęp 20wrz2015.
2. *Encyclopedic dictionary of condensed matter physics*, ed. Charles R. Poole jr., Elsevier Academic Press, Amsterdam 2004.
3. Niezgodziński M.E., Niezgodziński T., *Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.
4. Bruhns O.T., *Advanced Mechanics of Solids*, Springer-Verlag, Berlin 2003.
5. SIMULIA Dassault System, *Abaqus analysis user's manual*, version 6.14 (2014).

STRENGTH ANALYSIS OF ICE PLATE ON WATER RESERVOIR

Abstract

In the paper the computer model of an ice plate on a natural water reservoir has been presented. The plate was loading with pressure and concentrated force. It has been assumed buoyancy force acting upon the plate. The stress field in the ice plate was calculated for the strength analysis. The results have been obtained with the finite element method using the Abaqus programming system. The Abaqus system is utilized in Faculty of Management and Computer Modelling during lessons of strength materials.

Autorzy:

dr Jan Lachowski – Politechnika Świętokrzyska w Kielcach, Faculty of Management and Computer Modelling, E-mail: jlach@tu.kielce.pl

dr inż. Joanna Borowiecka-Jamrozek – Politechnika Świętokrzyska w Kielcach, Faculty of Mechatronics and Machine Engineering, E-mail: jamrozek@tu.kielce.pl