

Kamil CZAPLA¹, Mariusz PLESZCZYŃSKI²

¹Akademickie Liceum Ogólnokształcące Politechniki Śląskiej, ul. Rudzka 13, 44–200 Rybnik

²Katedra Zastosowań Matematyki i Metod Sztucznej Inteligencji, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44–100 Gliwice

Pewne formuły wyznaczania pól i objętości, część I: obszary w przestrzeni \mathbb{R}^2

Streszczenie. Stykając się z całką oznaczoną dowiadujemy się, że jednym z jej zastosowań jest wyznaczanie pól figur płaskich i objętości brył. Standardowo mówi się również o długości łuku krzywej, polu powierzchni i objętości bryły obrotowej. Rzadko już wprowadza się na podstawowym kursie matematyki wzory na pola czy objętości dla obszarów zadanych parametrycznie czy biegunowo. W niniejszej pracy chcemy zaprezentować wybrane formuły na obliczanie wspomnianych wielkości.

Słowa kluczowe: całka oznaczona, współrzędne parametryczne, współrzędne biegunowe, współrzędne sferyczne.

1. Obszary na płaszczyźnie

Rozpoczynając przygodę z całką oznaczoną Riemanna dowiadujemy się, że jej interpretacją geometryczną, o ile ciągła funkcja f jest nieujemna dla $x \in \langle a, b \rangle$, jest wartość pola zawartego pomiędzy wykresem tej funkcji, a osią Ox , dla $x \in \langle a, b \rangle$ (zobacz rysunek 1), tzn.:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

Jak wiemy, krzywa $y = f(x)$ może być zdefiniowana również w inny sposób, parametrycznie lub biegunowo.

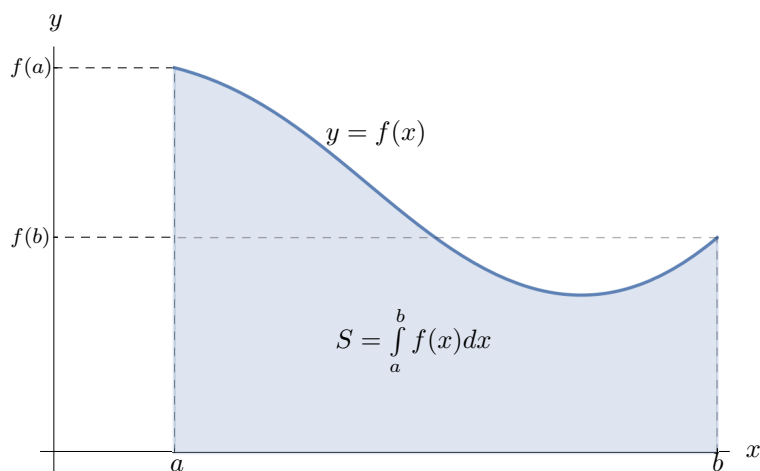
1.1. Pole pod krzywą zadaną parametrycznie

Zastanówmy się, w jaki sposób obliczyć pole S przedstawione na rysunku 1, jeśli krzywa ograniczająca to pole dana jest w postaci parametrycznej. Przypomnijmy najpierw, że parametryczna postać krzywej

określona jest formułą:

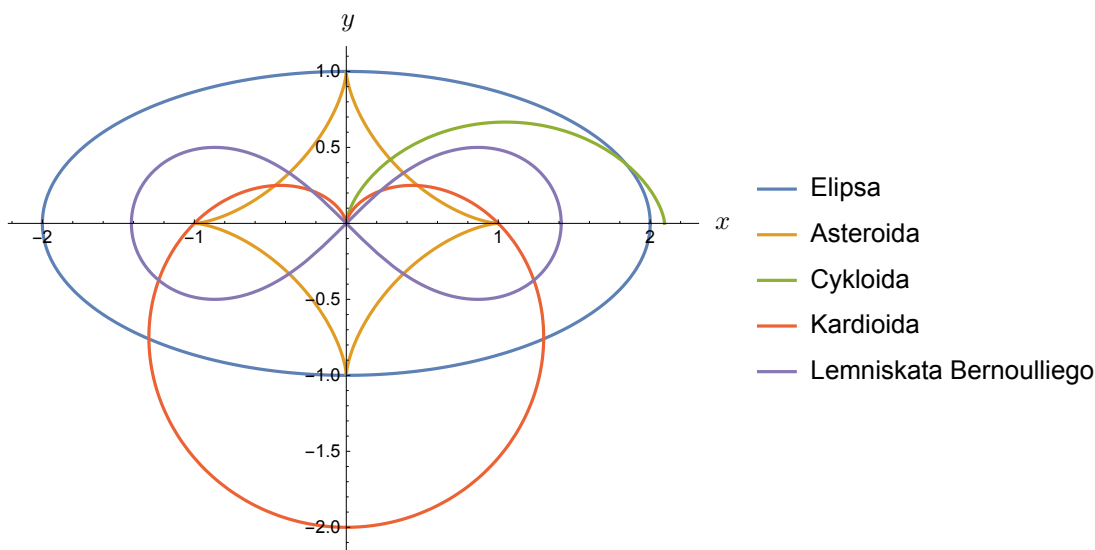
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in \langle t_1, t_2 \rangle, \quad (2)$$

gdzie funkcje φ i ψ są określone w przedziale $\langle t_1, t_2 \rangle$ (jeśli są tam funkcjami ciągłymi, to krzywa zadana w ten sposób też jest ciągła).



Rysunek 1. Geometryczna interpretacja całki oznaczonej

Na rysunku 2 przedstawione są wybrane krzywe, które można, i często jest to robione w ten sposób, przedstawić parametrycznie.



Rysunek 2. Przykłady krzywych zadanych parametrycznie

Zauważmy, że krzywą $y = f(x)$ łatwo jest przedstawić parametrycznie, wystarczy przyjąć:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = t, \\ y = \psi(t) = f(\varphi(t)) = f(t). \end{cases}$$

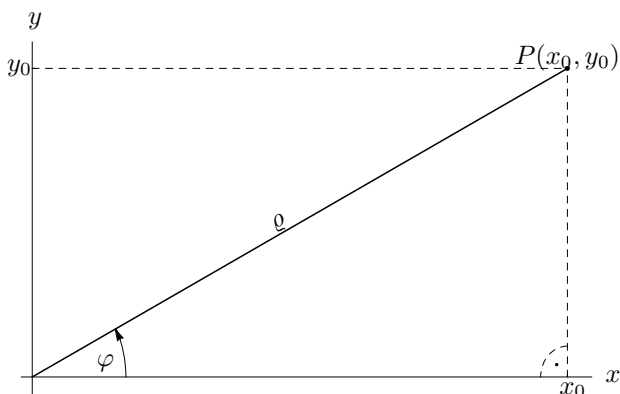
Można teraz dokonać podstawienia (2) do całki (1), przy czym $dx = \varphi'(t)dt = dt$, otrzymując w ten sposób $S = \int_a^b \psi(t)dt = \int_a^b f(t)dt$, co oczywiście jest tylko zwykłym zastąpieniem w całce (1) zmiennej x zmienną t , niewpływającym w żaden sposób na wyznaczenie tej całki. Ciekawsza sytuacja jest w przypadku gdy $\varphi(t) \neq t$. Otrzymujemy wtedy $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$, a całka (1) przyjmie postać:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt, \quad (3)$$

przy czym zakładamy, że $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$, że funkcja φ jest różniczkowalna w przedziale $\langle t_1, t_2 \rangle$ oraz, ponieważ $f(x) \geq 0$ w przedziale $\langle a, b \rangle$, a zmienna x rośnie od a do b , że funkcja φ jest rosnąca w przedziale $\langle t_1, t_2 \rangle$, a funkcja ψ jest nieujemna w przedziale $\langle t_1, t_2 \rangle$.

1.2. Krzywa zadana biegunowo

Łatwo można zauważyć, że współrzędne dowolnego punktu na płaszczyźnie (specyficznym punktem jest początek układu współrzędnych) można przedstawić w inny sposób, gdzie zamiast współrzędnych x i y podać można kąt φ , jaki tworzy dodatnia półoś Ox z odcinkiem łączącym początek układu współrzędnych i dany punkt oraz długość ρ tego odcinka (zob. rys. 3).



Rysunek 3. Współrzędne biegunowe

Korzystając z zależności trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym (zob. rys. 3), mamy:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{\rho}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\rho}, \end{cases} \implies \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad (4)$$

gdzie $\rho \geq 0$, a $0 \leq \varphi < 2\pi$ (można oczywiście rozpatrywać inne przedziały

zmiennej φ).

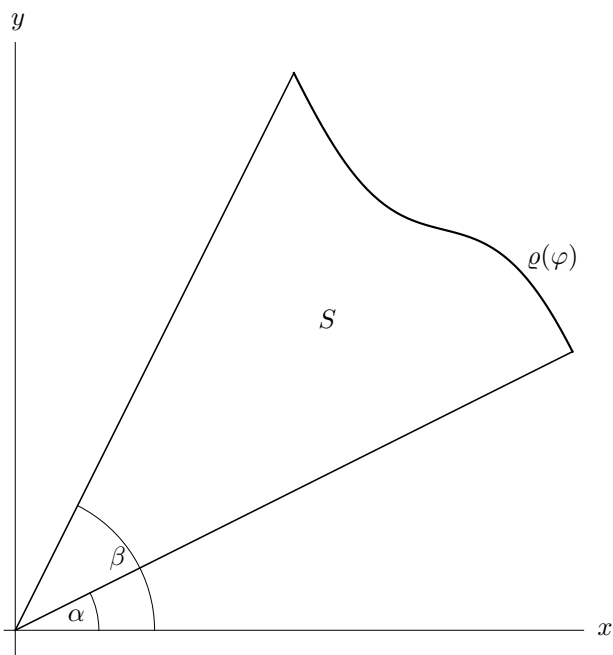
Jeśli dla pewnych wartości φ określimy nieujemną funkcję ρ , otrzymamy wówczas pewną krzywą na płaszczyźnie i ciekawym jest w jaki sposób można wyrazić odpowiednie pole S (zobacz rysunek 4).

Odpowiedni wzór możemy znaleźć różnymi sposobami, my jednak zdecydowaliśmy się na nie najprostszyszy z nich, ale jak się nam wydaje, najbardziej bliski idei całki oznaczonej Riemanna.

Przypominamy, że w klasycznym przypadku całki oznaczonej Riemanna mamy:

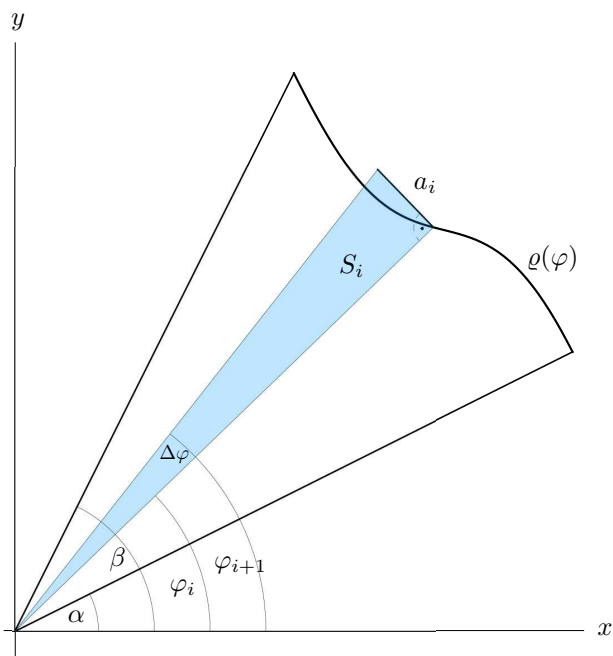
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

gdzie ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, jest dowolnym punktem każdego z podprzedziałów podziału normalnego przedziału $\langle a, b \rangle$, a Δx_i , $i = 1, 2, \dots, n$, jest długością tego podprzedziału (oczywiście granica musi istnieć i mieć tę samą wartość dla każdego podziału normalnego i każdego wyboru punktów ξ_i). Istnieje twierdzenie mówiące o tym, że jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$ lub ma tam skończoną liczbę punktów nieciągłości typu luka lub skok (a tylko takimi funkcjami będziemy się zajmować), to wówczas wystarczy wybrać jeden podział normalny i jeden wybór punktów ξ_i [3].



Rysunek 4. Pole S wyznaczone funkcją $\varrho(\varphi)$ dla $\alpha \leq \varphi \leq \beta$

My postąpimy podobnie – ponieważ ϱ jest funkcją zmiennej φ , dokonamy podziału normalnego: $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$, gdzie $\varphi_i = \alpha + i\Delta\varphi$, $i = 0, 1, \dots, n$, natomiast $\Delta\varphi = \frac{\beta - \alpha}{n}$ oraz $\xi_i = \varphi_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Po takim zabiegu obszar, którego pole chcemy wyznaczyć, podzielone zostanie na podobzary (wycinki), których pola przybliżać będziemy polami S_i trójkątów prostokątnych (zobacz rysunek 5).



Rysunek 5. Pole S_i przybliżające pole wycinka wyznaczonego funkcją $\varrho(\varphi)$ dla $\varphi_i \leq \varphi \leq \varphi_{i+1}$

Zauważmy, że długość dłuższej (na rysunku 5) przyprostokątnej takiego trójkąta jest wartością funkcji ϱ dla kąta φ_i , a długość krótszej przyprostokątnej a_i jest zależna od długości dłuższej przyprostokątnej i od miary kąta $\Delta\varphi$, mianowicie: $a_i = \varrho(\varphi_i) \operatorname{tg} \Delta\varphi$. Zatem, wprowadzając oznaczenie $\varrho_i = \varrho(\varphi_i)$, pole S_i takiego trójkąta wynosi:

$$S_i = \frac{1}{2} \varrho_i a_i \operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{1}{2} \varrho_i^2 \operatorname{tg} \Delta\varphi.$$

W takim razie pole S_n przybliżające pole S tego obszaru wyniesie:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \varrho_i^2 \operatorname{tg} \Delta\varphi,$$

a przechodząc z granicą przy n dążącym do nieskończoności, mamy:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varrho_i^2 \operatorname{tg} \Delta\varphi. \quad (5)$$

Korzystając z tego, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1,$$

możemy równanie (5) napisać w postaci:

$$S = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varrho_i^2 \frac{\operatorname{tg} \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \Delta\varphi = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varrho_i^2 \Delta\varphi,$$

otrzymując ostatecznie, po skorzystaniu z definicji całki oznaczonej Riemanna:

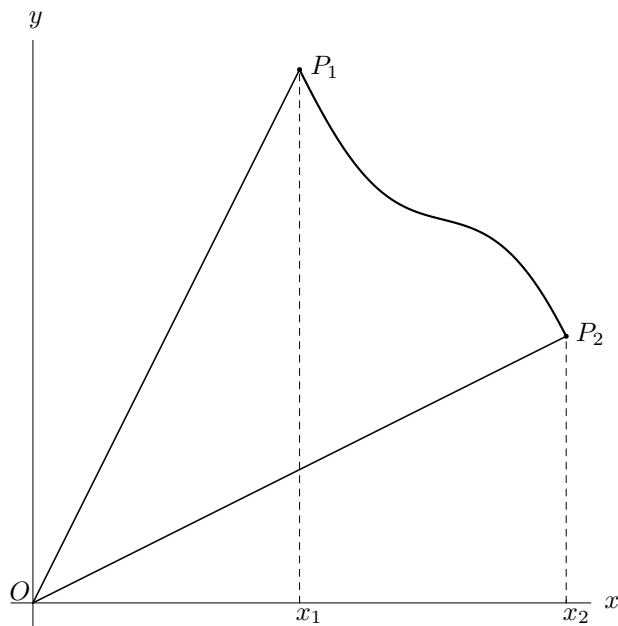
$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varrho_i^2 \Delta\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varrho^2(\varphi) d\varphi, \quad (6)$$

co jest poszukiwanym wzorem.

1.3. Związek pomiędzy polem wycinka i polem pod krzywą

Zauważmy, że to samo pole można również wyznaczyć dla współrzędnych kartezjańskich oraz dla funkcji zadanej parametrycznie, w tym celu zauważmy związek między polami (zob. rys. 6): „biegunowym” $S_b = S_{O\widetilde{P_2P_1}}$, „tradycyjnym” $S_t = S_{x_1x_2\widetilde{P_2P_1}}$, $S_1 = S_{\Delta O x_1 P_1}$ i $S_2 = S_{\Delta O x_2 P_2}$ (zakładamy różniczkowalność funkcji f oraz, że jak na rys. 6, pole te zawarte są w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych):

$$\begin{aligned} S_b &= S_1 + S_t - S_2 = \frac{1}{2} x_1 f(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \frac{1}{2} x_2 f(x_2) = \frac{1}{2} x f(x) \Big|_{x_2}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \frac{1}{2} x f(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (x f(x))' dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(f(x) - \frac{1}{2} (x f(x))' \right) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(f(x) - \frac{1}{2} (f(x) + x f'(x)) \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} x f'(x) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - x f'(x)) dx. \end{aligned} \quad (7)$$



Rysunek 6. Związek pomiędzy polem wycinka a polem pod krzywą

Dla funkcji zadanej parametrycznie w łatwy sposób można przedstawić odpowiednik wzoru (6) lub (7). Zauważmy, że korzystając ze współrzędnych biegunowych mamy $x^2 + y^2 = \varrho^2$, oraz że $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$,¹ a stąd mamy (pamiętając, że x i y są funkcjami zmiennej t):

$$d\varphi = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y'x - yx'}{x^2} dt = \frac{y'x - yx'}{y^2 + x^2} dt,$$

czyli, przy założeniu, że $x(\alpha) = t_1$ i $x(\beta) = t_2$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varrho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x^2 + y^2) \frac{y'x - yx'}{y^2 + x^2} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (xy' - yx') dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

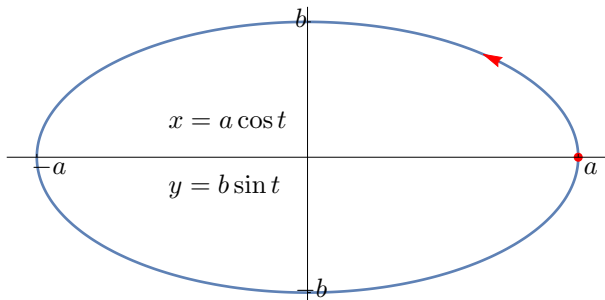
2. Przykłady

W rozdziale tym wyznaczmy pola obszarów ograniczonych krzywymi przedstawionymi na rysunku 2. W tym celu wykorzystamy wzory wyprowadzone w poprzednim rozdziale. Na rysunkach przedstawiających te krzywe czerwoną kropką zaznaczyliśmy początkowy punkt tej krzywej (dla $t = 0$), a czerwoną strzałką kierunek obiegu (orientację) danej krzywej.

¹Zależność ta zachodzi w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, w pozostałych ćwiartkach różnica może być jedynie stałą, jednak w tych rozważaniach nie ma to znaczenia.

2.1. Elipsa

Elipsa jest zbiorem punktów płaszczyzny, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów (ognisk) jest stała. Środek odcinka łączącego ogniska jest środkiem elipsy. Jeśli przyjmiemy, że środkiem



Rysunek 7. Elipsa wraz z jej orientacją

elipsy jest początek układu współrzędnych, to jej równanie, jeśli półosie będą miały długości a i b , ma postać:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (9)$$

Ta sama elipsa w postaci parametrycznej (zob. rys. 7) ma równanie:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in (0, 2\pi).$$

2.1.1. Pole ograniczone elipsą we współrzędnych kartezjańskich

Zauważmy, że osie układu współrzędnych dzielą obszar ograniczony elipsą (9) na cztery części o równych polach. Wystarczy więc rozpatrzyć przypadek $x, y \geq 0$, w którym $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Mamy więc:

$$\begin{aligned} S &= 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \sin u \\ dx = a \cos u du \end{array} \right|_{\substack{x=0 \\ u=0}}^{\substack{x=a \\ u=\frac{\pi}{2}}} = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 u} \cos u du = \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 u} \cos u du \stackrel{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}}{=} 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2u}{2} du = \\ &= 2ab \left(u + \frac{1}{2} \sin 2u \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab, \end{aligned}$$

co, jak dobrze wiemy, jest polem ograniczonym elipsą o półosiach a i b .

2.1.2. Pole ograniczone elipsą zadaną parametrycznie

Jeśli wykorzystując wzór (3) chcemy obliczyć pole ograniczone elipsą, to podobnie jak poprzednio, możemy rozpatrzyć tę samą jej ćwiartkę. Należy jednak zwrócić uwagę, że dla $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ funkcja φ jest malejąca, musimy więc zmienić znak całki opisującej to pole. Mamy więc:

$$\begin{aligned} S &= -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t (-a \sin t) dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \\ &= 2ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

2.1.3. Pole ograniczone elipsą we współrzędnych biegunowych

Aby otrzymać równanie biegunowe elipsy, wprowadźmy do równania (9) współrzędne (4), otrzymując:

$$\frac{\varrho^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\varrho^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1 \implies \varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Możemy teraz skorzystać ze wzoru (6):

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2 d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = 2a^2 b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}. \quad (10)$$

Tak otrzymaną całkę możemy w miarę łatwo wyznaczyć w oparciu o całkę niewłaściwą, pokażemy jednak najpierw, jak można dokonać tego bez odwoływania się do całki niewłaściwej. W tym celu wykorzystamy standardowe podstawienie trygonometryczne [5]:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = u, \quad d\varphi = \frac{2du}{1+u^2}, \quad \sin \varphi = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos \varphi = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \frac{\varphi}{2} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right| \frac{\pi}{2} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right|.$$

Otrzymamy w ten sposób:

$$\begin{aligned} S &= 2a^2 b^2 \int_0^1 \frac{1}{a^2 \left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2 + b^2 \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2} \frac{2du}{1+u^2} = 4a^2 b^2 \int_0^1 \frac{1+u^2}{4a^2 u^2 + b^2(1-u^2)^2} du = \\ &= 4a^2 b^2 \int_0^1 \frac{1+u^2}{b^2 u^4 + (4a^2 - 2b^2)u^2 + b^2} du = 4a^2 b^2 \int_0^1 \frac{1+u^2}{b^2 u^4 + 2(2a^2 - b^2)u^2 + b^2} du. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ma miejsce następujący rozkład:²³

$$b^2 u^4 + 2(2a^2 - b^2)u^2 + b^2 = b^2 \left(u^2 + \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right)^2 \right) \left(u^2 + \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right)^2 \right).$$

Oznaczmy, dla uproszczenia zapisu: $p = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$, $q = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$. Dzięki temu możemy napisać:

$$S = 4a^2 \int_0^1 \frac{1+u^2}{(u^2 + p^2)(u^2 + q^2)} du = \int_0^1 \left(\frac{A + Bu}{u^2 + p^2} + \frac{C + Du}{u^2 + q^2} \right) du.$$

Do znalezienia nieznanymi współczynników A , B , C i D skorzystamy z równości:

$$4a^2(1+u^2) = (A + Bu)(u^2 + q^2) + (C + Du)(u^2 + p^2). \quad (11)$$

Wstawiając do równości (11) $u = pi$, otrzymamy, po porównaniu części rzeczywistych i urojonych obydwu stron równania, $A = \frac{4a^2(p^2-1)}{p^2-q^2}$, $B = 0$, wstawiając $u = qi$, otrzymamy podobnie: $C = \frac{4a^2(1-q^2)}{p^2-q^2}$, $D = 0$. Zauważmy, że $\frac{4a^2}{p^2-q^2}(p^2-1) = 2abp$ oraz $\frac{4a^2}{p^2-q^2}(1-q^2) = 2abq$, stąd formuła na pole elipsy przyjmie postać:

$$\begin{aligned} S &= \frac{4a^2}{p^2 - q^2} \int_0^1 \left(\frac{p^2 - 1}{u^2 + p^2} + \frac{1 - q^2}{u^2 + q^2} \right) du = 2ab \int_0^1 \left(\frac{p}{u^2 + p^2} + \frac{q}{u^2 + q^2} \right) du = \\ &= 2ab \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{p} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{q} \right) \Big|_0^1 = 2ab \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{p} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{q} \right). \end{aligned}$$

²Warto podkreślić, że program Mathematica [6], nawet w wersji 12.2, nie potrafi znaleźć tego rozkładu, nie potrafi również znaleźć tej całki.

³Zwróćmy również uwagę, że w tym przykładzie $a > b$, więc rozkład ten ma współczynniki rzeczywiste.

Zauważmy teraz, że:

$$p \cdot q = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \cdot \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} = \frac{a^2 - (a^2 - b^2)}{b^2} = 1.$$

Stąd i ze znanej tożsamości cyklotometrycznej

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

otrzymujemy wzór na pole elipsy:

$$S = 2ab \left(\operatorname{arc\,tg} p + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{p} \right) = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

Pozostaje nam jeszcze wyznaczenie tego pola z wykorzystaniem całki niewłaściwej. W tym celu w całce (10) wykonajmy przekształcenie:

$$S = 2a^2b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi (a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2)} = 2a^2b^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi (a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2)},$$

a w tak przekształconej całce podstawienie:

$$\operatorname{tg} \varphi = u, \quad \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = du, \quad \begin{array}{c|c|c} \varphi & 0 & \frac{\pi}{2} - \varepsilon \\ \hline u & 0 & \infty \end{array},$$

uzyskując:

$$\begin{aligned} S &= 2a^2b^2 \int_0^\infty \frac{du}{a^2u^2 + b^2} = 2b^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{du}{u^2 + \frac{b^2}{a^2}} = 2b^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{au}{b} \Big|_0^T = \\ &= 2ab \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{aT}{b} - \operatorname{arc\,tg} 0 \right) = 2ab \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi ab. \end{aligned}$$

2.1.4. Pole ograniczone elipsą jako pole wycinka we współrzędnych kartezjańskich

Sposób ten najczęściej jest trudniejszy (szczególnie jeśli wycinek i pole pod krzywą są tożsame, a tak jest w tym przypadku). Wykorzystując wzór (7), otrzymujemy:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^a \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - x \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)' \right) dx.$$

Łatwo można zauważyć, że pierwszy składnik powyższej całki przedstawia połowę pola rozpatrywanej elipsy, zatem składnik drugi musi dać tę samą wartość:

$$\begin{aligned} \int_0^a -2bx \cdot \frac{\frac{-2x}{a^2}}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dx &= \frac{2b}{a^2} \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} dx = \left| \begin{array}{c|c|c} x = a \sin u & & x \\ dx = a \cos u du & & u \end{array} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{2b}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sin^2 u}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} a \cos u du \stackrel{0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}}{=} 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2u) du = \\ &= ab \left(u - \frac{1}{2} \sin 2u \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = ab \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi - 0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) = \frac{\pi ab}{2}, \end{aligned}$$

co jest oczekiwanym rezultatem.

2.1.5. Pole ograniczone elipsą jako pole wycinka danego parametrycznie

Chcąc skorzystać ze wzoru (8), wyznaczmy najpierw pomocniczo:

$$\varphi\psi' - \psi\varphi' = a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t(-a \sin t) = ab \cos^2 t + ab \sin^2 t = ab,$$

a stąd mamy:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab dt = 2ab \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

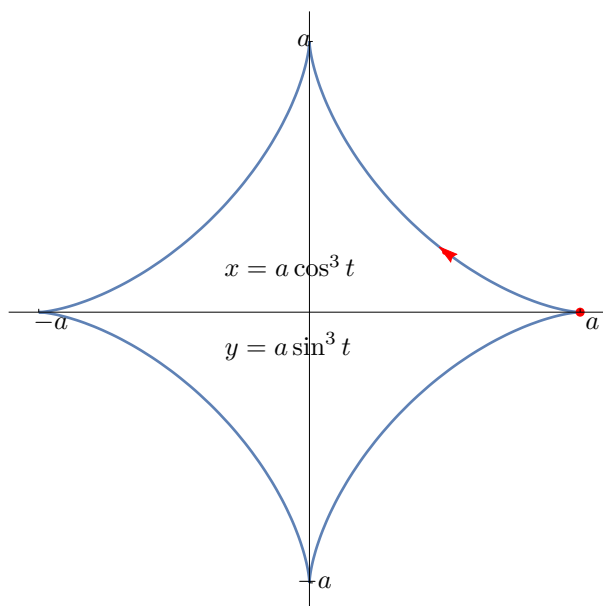
2.2. Asteroida

Asteroida jest krzywą, jaką zakreśla wybrany punkt okręgu o promieniu $\frac{a}{4}$ tocącego się wewnątrz po okręgu o promieniu a . Jeśli przyjmiemy, że środkiem okręgu o dłuższym promieniu jest początek układu współrzędnych, to jej równanie ma postać:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1. \quad (12)$$

Ta sama asteroida w postaci parametrycznej (zob. rys. 8) ma równanie:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



Rysunek 8. Asteroida wraz z jej orientacją

2.2.1. Pole ograniczone asteroidą we współrzędnych kartezjańskich

Podobnie jak w przypadku elipsy możemy rozpatrzyć tylko pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych, w której możemy wyznaczyć:

$$y = a \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Dzięki temu pole ograniczone asteroidą opiszemy całką:

$$\begin{aligned} S &= 4a \int_0^a \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \sin^3 u \\ dx = 3a \sin^2 u \cos u du \end{array} \right|_{\substack{x=0 \\ u=0}}^{\substack{x=a \\ u=\frac{\pi}{2}}} = \\ &= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 u)^{\frac{3}{2}} \sin^2 u \cos u du \stackrel{0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}}{=} 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \cos^4 u du = \\ &= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2u}{2} \left(\frac{1 + \cos 2u}{2} \right)^2 du = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u - \cos^2 2u - \cos^3 2u) du = \\ &= \frac{3a^2}{2} \left(\left(u + \frac{1}{2} \sin 2u \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 4u}{2} + \cos 2u(1 - \sin^2 2u) \right) du \right) = \\ &= \frac{3a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{4} \sin 4u \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2u(1 - \sin^2 2u) du \right) = \\ &= \left| \begin{array}{l} \sin 2u = v \\ \cos 2u du = \frac{1}{2} dv \end{array} \right|_{\substack{u=0 \\ v=0}}^{\substack{u=\frac{\pi}{2} \\ v=0}} = \frac{3a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^0 (1 - v^2) dv \right) = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

2.2.2. Pole ograniczone asteroidą zadaną parametrycznie

Jeśli wykorzystując wzór (3) chcemy obliczyć pole ograniczone asteroidą, to zauważmy, że funkcja φ jest malejąca dla $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, musimy zatem zmienić znak całki opisującej to pole. Mamy więc:

$$S = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t (a \cos^3 t)' dt = -4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t (-3 \cos^2 t \sin t) dt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt. \quad (13)$$

Otrzymaliśmy całkę bardzo podobną do jednej z postaci całki z poprzedniej metody. Postępując podobnie jak wówczas otrzymamy w podobny sposób ten sam wynik (tutaj zmieni się znak drugiego i czwartego składnika: $1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t$, ale obydwa te składniki dawały wynik zero).

Uwaga 1. Próba wyznaczenia pola ograniczonego asteroidą we współrzędnych biegunowych kończy się doprowadzeniem do całki, która nie wyraża się poprzez funkcje elementarne za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych. Nie jesteśmy więc w stanie skorzystać ze wzoru (6).

2.2.3. Pole ograniczone asteroidą jako pole wycinka we współrzędnych kartezjańskich

Wykorzystanie wzoru (7) nie upraszcza rachunków. Podobnie jak dla elipsy, otrzymamy całkę składającą się z dwóch części. Pierwsza opisuje połowę pola asteroidy, a druga ma postać:

$$-2a \int_0^a x \left(\left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \right)' dx = a \int_0^a \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

Stosując takie samo jak w pierwszej metodzie podstawienie $x = a \sin^3 u$, otrzymamy podobnie całkę:

$$6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u \cos^2 u \, du,$$

która pojawiła się (zob. wzór (13)) przy okazji wyznaczania pola ograniczonego asteroidą. Tym razem całka ma dwukrotnie mniejszy mnożnik, więc jej wartość, co było oczekiwane, jest poszukiwanym polem.

2.2.4. Pole ograniczone asteroidą jako pole wycinka danego parametrycznie

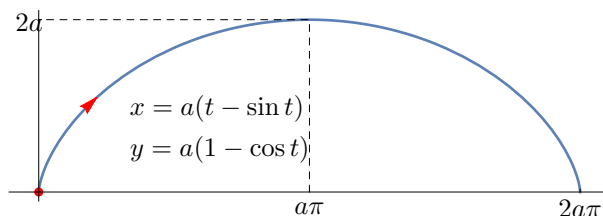
Wykorzystując wzór (8), otrzymamy:

$$\begin{aligned} S &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos^3 t (a \sin^3 t)' - a \sin^3 t (a \cos^3 t)') \, dt = \\ &= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t + a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t \sin t) \, dt = \\ &= 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t)) \, dt = 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \sin t \cos t \right)^2 \, dt = \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} \, dt = \frac{3a^2}{4} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

2.3. Cykloida

Cykloida jest krzywą, jaką zakresła wybrany punkt okręgu o promieniu a toczącego się po prostej. Jeśli punkt ten będzie początkiem układu współrzędnych, a okrąg toczył się będzie w kierunku dodatniej półosi Ox , to parametryczne równanie cykloidy będzie miało postać (zob. rys. 9):

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = a(t - \sin t), \\ y = \psi(t) = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



Rysunek 9. Cykloida wraz z jej orientacją

2.3.1. Pole ograniczone cykloidą zadaną parametrycznie

Ponieważ przedstawienie parametryczne jest domyślnym dla cykloidy, dlatego wyznaczanie pola pod cykloidą zaczniemy właśnie od wzoru (3):

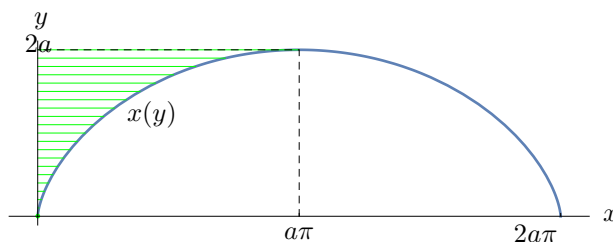
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t)(a(t - \sin t))') dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\right) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t\right) dt = \\ &= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t\right) \Big|_0^{2\pi} = a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3a^2\pi. \end{aligned}$$

2.3.2. Pole ograniczone cykloidą we współrzędnych kartezjańskich

Z równania parametrycznego cykloidy można uzyskać jej postać parametryczną. W tym celu z funkcji ψ należy wyznaczyć parametr t i, wykorzystując wzór $\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$, dla $0 \leq x \leq 1$, z równania funkcji φ , dla pierwszego łuku cykloidy, czyli dla $0 \leq t \leq 2\pi$, otrzymamy:

$$x = a \left(\arccos \left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{y}{a}\right)^2} \right) = a \arccos \left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{y(2a - y)}. \quad (14)$$

Zauważmy teraz, że aby skorzystać ze wzoru (14), możemy na podstawie całki $\int_0^{2a} x(y) dy$ wyznaczyć pole zakresowane na zielono (zob. rys. 10).



Rysunek 10. Wyznaczanie pola cykloidy

Zauważmy, że drugi składnik w równaniu (14), po scałkowaniu w przedziale od 0 do $2a$ da wartość połowy pola koła o promieniu a , czyli $\frac{\pi a^2}{2}$. Pozostaje więc wyznaczyć całkę:

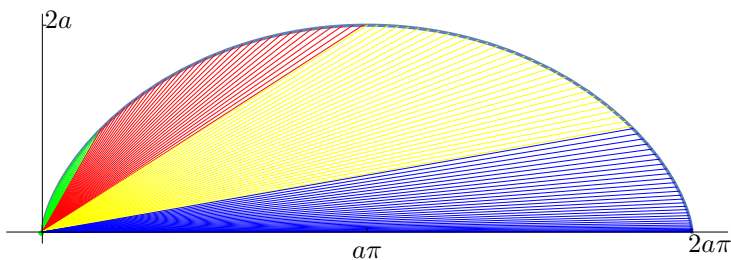
$$\begin{aligned} a \int_0^{2a} \arccos \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy &= \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{y}{a} = u \\ dy = -a du \end{array} \right|_{\substack{y=0 \\ u=1}}^{\substack{y=2a \\ u=-1}} = \\ &= a^2 \int_{-1}^1 \arccos u du = \left| \begin{array}{l} f(u) = \arccos u \\ f'(u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \end{array} \right|_{-1}^1 \begin{array}{l} g'(u) = 1 \\ g(u) = u \end{array} = a^2 u \arccos u \Big|_{-1}^1 + a^2 \int_{-1}^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du = \\ &= a^2(\arccos 1 + \arccos(-1)) + 0 = a^2(0 + \pi) = \pi a^2 \end{aligned}$$

(wartość drugiej całki wynosi zero, bo całkujemy funkcję nieparzystą na przedziale symetrycznym, dodatkowo, formalnie, jest to całka niewłaściwa, jednak nie wpływa to na końcowy wynik). Tym samym pole zakresowanego na zielono obszaru wynosi $\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi a^2}{2}$, a pole połowy obszaru pod cykloidą, jako różnica pola prostokąta o bokach długości πa i $2a$, wynosi $2a^2\pi - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$, a stąd poszukiwane pole wynosi $3a^2\pi$, co jest oczekiwanym wynikiem.

Uwaga 2. Pola pod cykloidą, podobnie jak dla asteroidy, nie da się wyznaczyć korzystając ze współrzędnych biegunowych. Wyznaczanie pola ograniczonego cykloidą jako pola wycinka we współrzędnych kartezjańskich nie przyniesie żadnych korzyści. Ciekawym natomiast jest skorzystanie ze wzoru (8).

2.3.3. Pole ograniczone cykloidą jako pole wycinka we współrzędnych parametrycznych

Chcąc zastosować tę metodę, po pierwsze zauważmy, że połowienie zakresu kąta t nie połowi pola pod cykloidą. Na rysunku 11 przedstawione jest pole wycinków dla kątów $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (kolor zielony), $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ (kolor czerwony), $\pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ (kolor żółty) i $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$ (kolor niebieski).



Rysunek 11. Obszary cykloidy dla różnych zakresów kąta t

Po drugie, co również widoczne jest na rysunku 11, kąt t zmieniając się od 0 do 2π powoduje przeciwną orientację krzywej, co nakazuje zmianę znaku przed całką. Uwzględniając powyższe uwagi możemy, na podstawie wzoru (8), zapisać:

$$S = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)) dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (2 - 2 \cos t - t \sin t) dt.$$

Całkę $\int x \sin x dx$ łatwo można wyznaczyć całkując przez części, otrzymując wynik $\sin x - x \cos x + c$. Dlatego możemy napisać:

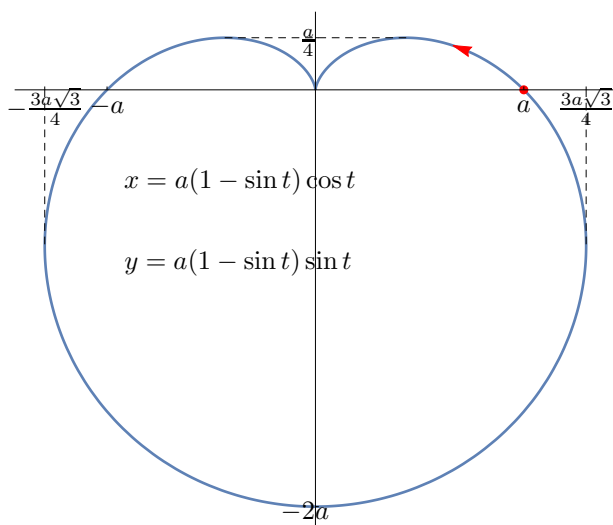
$$S = \frac{a^2}{2} (2t - 2 \sin t - \sin t + t \cos t) \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} (4\pi + 2\pi) = 3a^2\pi.$$

Widzimy więc, że wybór metody często ma duże znaczenie – część zadań rozwiązać można bez trudu wybierając odpowiedni sposób, a część jest bardzo trudna lub niemożliwa do realizacji przy nieodpowiednim wyborze metody. Dobrym przykładem (choć pokazały to również poprzednie przykłady) jest kolejna krzywa.

2.4. Kardioda

Kardioda jest krzywą, jaką zakreśla ustalony punkt okręgu o promieniu a toczący się po okręgu o takim samym promieniu. W zależności od początkowego położenia okręgu toczącego się i wyboru punktu otrzymać możemy różne położenia kardiody. My przedstawimy kardiodę w położeniu niestandardowym, ale najbardziej przypominającym serce (zob. rys. 12). W takim przypadku równanie kardiody ma postać:

$$(x^2 + y^2 + ay)^2 = a^2 (x^2 + y^2), \quad a > 0. \tag{15}$$



Rysunek 12. Kardioda wraz z jej orientacją

stawić kardiodę we współrzędnych parametrycznych, to wystarczy jeszcze raz w otrzymanej postaci biegunowej skorzystać z zależności (4):

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi, \\ y = \varrho \sin \varphi, \end{cases} \implies \begin{cases} x = a(1 - \sin \varphi) \cos \varphi, \\ y = a(1 - \sin \varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

2.4.1. Pole ograniczonego kardiodą zadaną parametrycznie

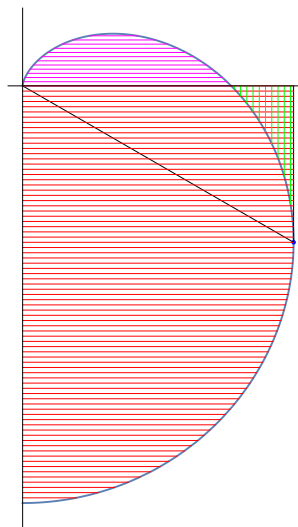
Wyznaczenie pola w ten sposób będzie trudniejsze, bo należy uwzględnić założenia i sprawdzić, w jakim podzbiórze zbioru $\langle 0, 2\pi \rangle$ funkcja φ jest rosnąca, a funkcja ψ nieujemna. Zauważmy wcześniej, że kardioda jest symetryczna względem osi Oy , więc wystarczy rozpatrzyć albo zbiór $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \cup \langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \rangle$, albo, co jest równoważne, przedział $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Łatwo można pokazać, badając funkcję φ' , że w przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} \rangle$ funkcja φ jest rosnąca, a w przedziale $\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle$ – malejąca. Jeszcze prościej jest zauważyć, że funkcja ψ jest nieujemna w przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle$, a niedodatnia w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Kolejny problem to różnica obszarów przedstawionych za pomocą współrzędnych biegunowych i parametrycznych. W tym przypadku tylko w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ obszary te się pokrywają (kolor różowy na rys. 13). Widzimy tam również, że połowa pola ograniczonego kardiodą S przedstawiać się będzie zależnością $S = S_1 - S_2 + S_3$, gdzie S_1 to obszar dla $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq -\frac{\pi}{6}$ (kolor czerwony na rys. 13), S_2 – dla $-\frac{\pi}{6} \leq t \leq 0$ (kolor zielony na rys. 13), a S_3 dla $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (kolor różowy na rys. 13).

Z postaci tej nie sposób użytecznie wyznaczyć pola ograniczonego kardiodą, dlatego przedstawimy teraz ją we współrzędnych biegunowych. W tym celu do równania (15) wstawmy zależności (4):

$$\begin{aligned} (\varrho^2 + a\varrho \sin \varphi)^2 &= a^2 \varrho^2, \\ (\varrho + a \sin \varphi)^2 &= a^2, \\ \varrho + a \sin \varphi &= a, \\ \varrho &= a(1 - \sin \varphi). \end{aligned}$$

Drugie rozwiązanie $\varrho = -a(1 + \sin \varphi) < 0$ odrzucamy.

Zdecydowanie najczęstszą postacią kardiody jest jej postać we współrzędnych biegunowych, jeżeli chcielibyśmy jednak przed-

Rysunek 13. Pola S_1 , S_2 i S_3 określające pole kardiody

Pozostaje już tylko ustalić znaki dla poszczególnych całek:

	$\langle -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} \rangle$	$\langle -\frac{\pi}{6}, 0 \rangle$	$\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
φ	$\nearrow (+)$	$\searrow (-)$	$\searrow (-)$
ψ	-	-	+
f	-	+	-

oraz wyznaczyć funkcję podcałkową:

$$\begin{aligned}\psi\varphi' &= a(1 - \sin t) \sin t (a(1 - \sin t) \cos t)' = a^2(1 - \sin t) \sin t (-\sin t - \cos^2 t + \sin^2 t) = \\ &= a^2 \sin t (1 - \sin t) (2 \sin^2 t - \sin t - 1) = a^2 (3 \sin^3 t - \sin t - 2 \sin^4 t)\end{aligned}$$

i całkę:

$$\begin{aligned}\int (3 \sin^3 t - \sin t - 2 \sin^4 t) dt &= \int \left(3 \sin t (1 - \cos^2 t) - \sin t - 2 \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \right) dt = \\ &= \int \left(3 \sin t (1 - \cos^2 t) - \sin t - \frac{1}{2} \left(1 - 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) \right) dt = \\ &= \int \left(3 \sin t (1 - \cos^2 t) - \sin t - \frac{3}{4} + \cos 2t - \frac{1}{4} \cos 4t \right) dt = \\ &= \cos^3 t - 2 \cos t - \frac{3}{4}t + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{16} \sin 4t + c.\end{aligned}$$

Zatem pole ograniczone kardioidą wyraża się zależnością:

$$\begin{aligned}S &= 2(S_1 - S_2 + S_3) = 2a^2 \left(- \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \psi\varphi' dt - \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \psi\varphi' dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi\varphi' dt \right) = \\ &= -2a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \psi\varphi' dt = 2a^2 \left(\cos^3 t - 2 \cos t - \frac{3}{4}t + \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{16} \sin 4t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -2a^2 \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi a^2}{2}.\end{aligned}$$

2.4.2. Pole ograniczone kardioidą we współrzędnych biegunowych

Tym razem rachunki będą zdecydowanie prostsze, wystarczy skorzystać ze wzoru (6):

$$\begin{aligned}S &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \sin \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \sin \varphi + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2} \varphi + 2 \cos \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi + 2 - 2 \right) = \frac{3\pi a^2}{2}.\end{aligned}$$

2.4.3. Pole ograniczone kardioidą jako pole wycinka danego parametrycznie

Tym razem obieg krzywej jest dodatni dla $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, więc obliczając:

$$\varphi\psi' - \psi\varphi' = a^2(1 - \sin t)^2,$$

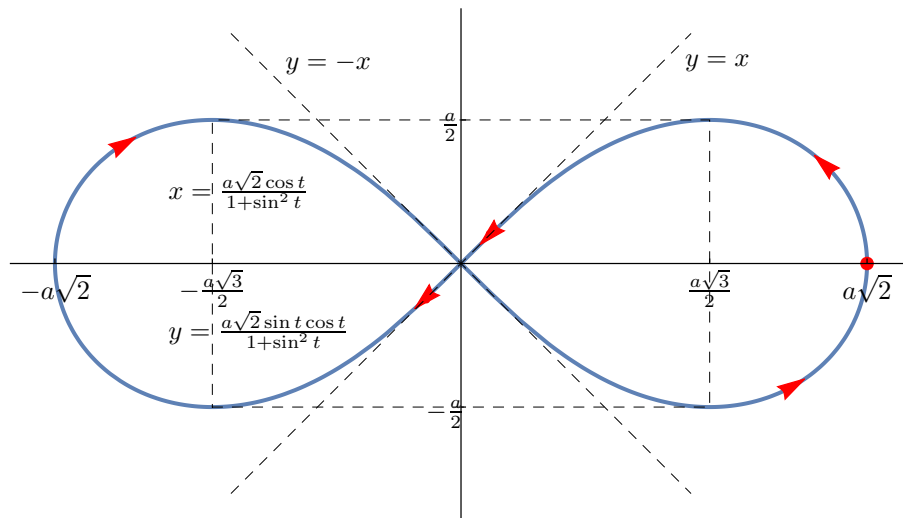
łatwo stwierdzimy, że uzyskamy ten sam wynik (a nawet tę samą całkę do niego prowadzącą), co w poprzedniej metodzie.

2.5. Lemniskata Bernoulliego

Lemniskata Bernoulliego jest krzywą, jaką we współrzędnych kartezjańskich przedstawia równanie [12]:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad a > 0, \quad (16)$$

a jej interpretacja geometryczna jest następująca: jest to zbiór punktów płaszczyzny, których iloczyn odległości od dwóch ustalonych punktów (ognisk) oddalonych od siebie o $2a$ jest stały i równy a^2 .



Rysunek 14. Lemniskata Bernoulliego wraz z jej orientacją

Z definicji tej łatwo wynika postać (16). Równie łatwo można otrzymać równanie biegunowe lemniskaty Bernoulliego, wystarczy do równania (16) wstawić formuły (4):

$$\begin{aligned} (\rho^2)^2 &= 2a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi), \\ \rho^2 &= 2a^2\cos 2\varphi, \\ \rho &= a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\varphi}. \end{aligned}$$

Aby spełniony był warunek nieujemności ρ , musimy założyć, że $\cos 2\varphi \geq 0$, skąd łatwo dostajemy:

$$\cos 2\varphi \geq 0 \iff 0 \leq \varphi \leq 2\pi \implies \varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right\rangle.$$

Lemniskata Bernoulliego ma zastosowanie m.in. przy projektowaniu torów kolejowych lub tramwajowych na łukach [11].

Uwaga 3. Pola ograniczonego przez lemniskatę Bernoulliego nie można wyznaczyć korzystając z jej postaci (16) i ze wzoru (1) a tym samym nie skorzystamy również ze wzoru (7).

2.5.1. Pole ograniczone lemniskatą Bernoulliego we współrzędnych biegunowych

W tym przypadku wyznaczenie pola będzie bardzo proste, wykorzystując wzór (6) oraz symetrię lemniskaty Bernoulliego względem obydwu osi układu współrzędnych, mamy:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 4a^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2 \sin \frac{\pi}{2} = 2a^2.$$

2.5.2. Pole ograniczone lemniskatą Bernoulliego zadanej parametrycznie

Równanie parametryczne lemniskaty Bernoulliego można otrzymać podobnie jak w przykładzie dotyczącym kardioidy. Okazuje się, że równanie takie może również przyjąć nieco inną formę [8]:

$$\begin{cases} x = \frac{a\sqrt{2} \cos t}{1 + \sin^2 t}, \\ y = \frac{a\sqrt{2} \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (17)$$

Ponieważ funkcja ψ jest nieujemna, gdy $\sin t \cos t \geq 0$, co jest równoważne z tym, że $\sin 2t \geq 0$, czyli ograniczając się do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$, mamy $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \cup \langle \pi, \frac{3\pi}{2} \rangle$, a funkcja φ jest rosnąca, co łatwo pokazać na podstawie jej pochodnej, gdy $t \in \langle \pi, 2\pi \rangle$, więc pole ograniczone lemniskatą Bernoulliego wyrazić można całką (korzystamy z symetrii lemniskaty i ze wzoru (3)):

$$S = 4 \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \psi(t) \varphi'(t) dt = -8a^2 \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin^2 t (3 - \sin^2 t) \cos t}{(1 + \sin^2 t)^3} dt.$$

Całkę tę, przez podstawienie $\sin t = u$, $\frac{t}{u} \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \Big|_{-1}^{-1}$ sprowadzić można do całki wymiernej:

$$S = 8a^2 \int_{-1}^0 \frac{u^2(3 - u^2)}{(1 + u^2)^3} du.$$

Zauważmy, że licznik całkowanego ułamka możemy przekształcić do postaci:

$$3u^2 - u^4 = -(1 + u^2)^2 + 5u^2 + 1 = -(1 + u^2)^2 + 5(1 + u^2) - 4,$$

dlatego możemy zapisać:

$$S = 8a^2 \int_{-1}^0 \left(\frac{-1}{1 + u^2} + \frac{5}{(1 + u^2)^2} - \frac{4}{(1 + u^2)^3} \right) du.$$

Korzystając z rekurencyjnego wzoru dotyczącego ułamków prostych czwartego rodzaju [7] dla $1 < n \in \mathbb{N}$:

$$\int \frac{dx}{(1 + x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1 + x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1 + x^2)^{n-1}} \quad (18)$$

otrzymamy, najpierw pomocniczo:

$$\int \frac{-4}{(1 + u^2)^3} du = -\frac{u}{(1 + u^2)^2} - 3 \int \frac{du}{(1 + u^2)^2}$$

oraz:

$$\int \frac{2}{(1+u^2)^2} du = \frac{u}{1+u^2} + \int \frac{du}{1+u^2},$$

a stąd ostatecznie:

$$S = 8a^2 \left(-\frac{u}{(1+u^2)^2} + \frac{u}{1+u^2} \right) \Big|_{-1}^0 = 8a^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = 8a^2 \cdot \frac{1}{4} = 2a^2.$$

2.5.3. Pole ograniczone lemniskatą Bernoulliego jako pole wycinka danego parametrycznie

Rozpatrując tę część lemniskaty Bernoulliego, która znajduje się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, w celu wykorzystania wzoru (4) wyznaczmy najpierw:

$$\varphi\psi' - \psi\varphi' = \frac{2a^2 \cos^3 t}{(1 + \sin^2 t)^2},$$

a potem pole:

$$\begin{aligned} S &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^2 \cos^3 t}{(1 + \sin^2 t)^2} dt = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 t) \cos t}{(1 + \sin^2 t)^2} dt = \left| \begin{array}{c|c|c} \sin t = u & t & 0 \\ \cos t dt = du & u & 0 \end{array} \right| \frac{\frac{\pi}{2}}{1} \Big| = \\ &= 4a^2 \int_0^1 \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2} du = 4a^2 \int_0^1 \frac{-(1 + u^2) + 2}{(1 + u^2)^2} du = 4a^2 \int_0^1 \left(\frac{2}{(1 + u^2)^2} - \frac{1}{1 + u^2} \right) du \stackrel{(18)}{=} \\ &= 4a^2 \frac{u}{1 + u^2} \Big|_0^1 = 4a^2 \cdot \frac{1}{2} = 2a^2. \end{aligned}$$

Gdybyśmy sparametryzowali lemniskatę Bernoulliego tak jak w przykładzie z kardioidą, to jej równanie przyjęłoby postać:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2t} \cos t, \\ y = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2t} \sin t, \end{cases} \quad (19)$$

gdzie $t \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \rangle \cup \langle \frac{7\pi}{4}, 2\pi \rangle$. Obliczając stąd pole z wykorzystaniem wzoru (3) otrzymalibyśmy (minus przed całką wynika z monotoniczności funkcji φ w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$):

$$\begin{aligned} S &= -4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \psi(t)\varphi'(t) dt = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3 \sin^2 t - 4 \sin^4 t) dt = \\ &= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2}(1 - \cos 2t) - 4 \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \right) dt = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2t - \cos 4t) dt = \\ &= a^2 (2 \sin 2t - \sin 4t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 (2 - 0 - 0 + 0) = 2a^2. \end{aligned}$$

Jeszcze łatwiej byłoby, wykorzystując tę parametryzację, skorzystać ze wzoru (8). Mielibyśmy wówczas:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)) dt = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = 2a^2 \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$

Okazuje się, że równanie lemniskaty Bernoulliego można, przekształcając formuły (19), przedstawić również w innej postaci (podobnie, jak zrobiono to w [11]):

$$\begin{cases} x = \frac{t+t^3}{1+t^4}a\sqrt{2}, \\ y = \frac{t-t^3}{1+t^4}a\sqrt{2}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pierwszą ćwiartkę lemniskaty Bernoulliego otrzymamy dla $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Gdybyśmy teraz chcieli wykorzystać wzór (8) (można również skorzystać ze wzoru (3), ale prowadzi to do znacząco trudniejszej całki wymiernej), to otrzymalibyśmy (minus przed całką wynika z ujemnego obiegu tej części lemniskaty przy tej parametryzacji):

$$\begin{aligned} S &= -4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)) dt = 16a^2 \int_0^1 \frac{t^3}{(1+t^4)^2} dt = \\ &= \left| \begin{array}{c|c|c} 1+t^4 = u & t & 0 \\ t^3 dt = \frac{1}{4} du & u & 1 \\ & & 2 \end{array} \right| = 4a^2 \int_1^2 \frac{du}{u^2} = -4a^2 \frac{1}{u} \Big|_1^2 = -4a^2 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 2a^2. \end{aligned}$$

Podsumowanie

W pracy pokazaliśmy, jak w mniej intuicyjny, czy w mniej powszechny sposób można obliczać pola (w części pierwszej) i objętości (w części drugiej) pewnych obszarów. Wybrane przez nas przykłady miały pokazać, że wybór metody często znacząco skraca czas obliczeń i znacząco ułatwia rachunki. Przykłady staraliśmy się (bogaty opis krzywych znaleźć można m.in. w [1, 2]) dobrać również pod kątem dydaktycznym, chcieliśmy aby były one niebanalne, a rozwiązania zawierały miejsca, w których łatwo można popełnić błąd, dzięki czemu takie ćwiczenia rachunkowe były dobrym przypomnieniem metod wyznaczania całek nieoznaczonych i oznaczonych (w tym całki niewłaściwej).

Pierwotnie praca omawiała zarówno obszary płaskie i przestrzenne, jednak objętość całości skłoniła nas do podzielenia jej na dwie części. W części drugiej wyprowadzamy wzór na objętość bryły, która ograniczona jest powierzchnią zadaną sferycznie (odpowiednik przestrzenny wzoru (6)) i wyznaczamy w ten sposób objętości wybranych brył.

Podziękowania

Autorzy pragną podziękować recenzentom za trud włożony w recenzje.

Literatura

1. A. Bryll, R. Sochacki, *Interesujące krzywe płaskie*, Wydawnictwo Wydziału Zarządzania Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2015.
2. A. Bryll, R. Sochacki, *Krzywe o sławnych nazwiskach*, Wydawnictwo Uniwersytetu Opolskiego, Opole 2013.
3. G.M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy Tom 2*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2011.

4. G.N. Frederickson, *Hinged Dissections: Swinging & Twisting*, Cambridge University Press, Nowy Jork 2002.
5. R. Grzymkowski, *Matematyka dla studentów wyższych uczelni technicznych*, WPKJS, Gliwice 2002.
6. C. Hastings, K. Mischo, M. Morrison, *Hands-on Start to Wolfram Mathematica and Programming with the Wolfram Language, Third Edition*, Wolfram Media, Inc. 2020.
7. W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
8. J.D. Lawrence, *A catalog of special plane curves*, Dover Publications, Inc., Nowy Jork 1972.
9. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
10. I.A. Maron, *Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego, funkcje jednej zmiennej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1974.
11. E. Niczyporowicz, *Krzywe płaskie, wybrane zagadnienia z geometrii analitycznej i różniczkowej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.
12. M. Stark, *Geometria analityczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1967.