

## PROGNOZA WYBRANYCH WSKAŹNIKÓW MOTORYZACJI W POLSCE W 2014 ROKU

### Streszczenie

W artykule wykonano prognozę wskaźnika motoryzacji (liczba samochodów osobowych przypadających na 1000 mieszkańców) oraz prognozę liczby samochodów ciężarowych i liczby motocykli. Wykorzystano trendy nieliniowe oraz funkcję logistyczną. Wykazano, że wyniki uzyskane dla funkcji logistycznej pokrywają się rezultatami optymalnego trendu nieliniowego.

### WSTĘP

W pracy wykonano prognozę wybranych wskaźników motoryzacji w Polsce wykonaną na 2014r. Rozpatrzono następujące wskaźniki motoryzacji: liczbę samochodów osobowych na 1000 osób, liczbę motocykli oraz liczbę samochodów ciężarowych.

Zagadnienie prognozowania wskaźnika motoryzacji w Polsce stanowi treść pracy [7, s. 143-158], gdzie w procesie prognostycznym wykorzystano funkcję logistyczną, której parametry były wyznaczone za pomocą dziewięciu metod przybliżonych.

Funkcję logistyczną wykorzystuje się do modelowania danych empirycznych odnoszących się do przypadków monotonicznego wzrostu obserwowanego zjawiska, przy czym, tempo wzrostu maleje do zera. Jak stwierdza Zeliaś [6], funkcja logistyczna jest przydatna do opisu popytu na dobra trwałego użytku, np. samochody, telewizory, motocykle, w krajach wysoko rozwiniętych z gospodarką ustabilizowaną.

Funkcja logistyczna jest opisana wzorem:

$$y(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-c \cdot t}} \quad (1)$$

gdzie :  $a > 0$  ,  $b > 1$  ,  $c > 0$ .

W niniejszej pracy estymację parametrów funkcji logistycznej wykonano metodą najmniejszych kwadratów (MNK). Stosując metodę najmniejszych kwadratów, należy zminimalizować wyrażenie :

$$H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{a}{1 + b \cdot e^{-c \cdot t_i}} - y_i \right)^2 \quad (2)$$

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum:

$$\frac{\partial H}{\partial a} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial b} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial c} = 0 \quad (3)$$

otrzymuje się układ równań:

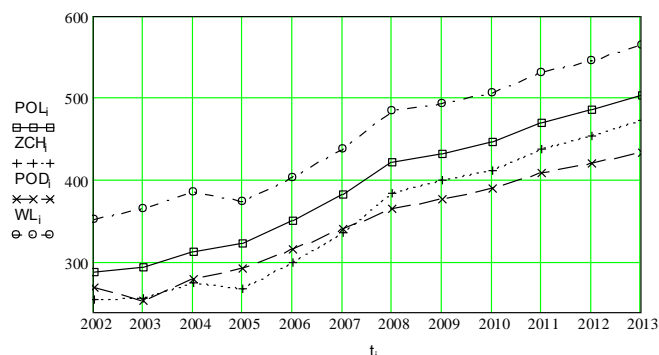
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left( \frac{a}{1 + b \cdot e^{-c \cdot t_i}} - y_i \right) \cdot \frac{1}{1 + b \cdot e^{-c \cdot t_i}} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left( \frac{a}{1 + b \cdot e^{-c \cdot t_i}} - y_i \right) \cdot \frac{e^{-c \cdot t_i}}{(1 + b \cdot e^{-c \cdot t_i})^2} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N \left( \frac{a}{1 + b \cdot e^{-c \cdot t_i}} - y_i \right) \cdot \frac{t_i \cdot e^{-c \cdot t_i}}{(1 + b \cdot e^{-c \cdot t_i})^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Układ równań (4) był rozwiązywany z wykorzystywaniem procedury z programu Mathcad, stanowiącą realizację metody Newtona – Raphsona. Jako wartości startowe parametrów  $a$ ,  $b$ ,  $c$  przyjmowano wynik estymacji wykonanej metodą Hotellinga [7].

Uznając zasadność stosowania funkcji logistycznej do prognozy wskaźnika motoryzacji, w pracy wykorzystano inne trendy nieliniowe. Rozpatrzono następujące trendy: liniowy, paraboliczny, wykładniczy, potęgowy, logarytmiczny i hiperboliczny. Obliczenia wykonano korzystając z programu: Trendy nieliniowe zamieszczonego na stronie internetowej Wydziału Zarządzania i Ekonomiki Usług US [5].

### 1. PROGNOZA WSKAŹNIKA MOTORYZACJI W POLSCE NA 2014 ROK

Wskaźnik motoryzacji (indywidualny wskaźnik motoryzacji) określa liczbę samochodów osobowych przypadających na 1000 mieszkańców. Prognozę wykonano dla danych dotyczących Polski oraz trzech województw: wielkopolskie (największa wartość wskaźnika), podlaskie (najmniejsza wartość wskaźnika) oraz zachodniopomorskie. Na rysunku 1 przedstawiono wartości wskaźnika motoryzacji dla Polski (linia ciągła z prostokątami POL) oraz województw: zachodniopomorskie (linia kropkowana z plusami ZCH), podlaskie (linia przerywana z iksami POD) oraz wielkopolskie (linia przerywana z kółkami WL).



**Rys.1.** Wartości wskaźnika motoryzacji dla Polski (linia ciągła z prostokątami POL) oraz województw: zachodniopomorskie (linia kropkowana z plusami ZCH), podlaskie (linia przerywana z iksami POD)

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych ze strony internetowej Banku Danych Lokalnych GUS <http://stat.gov.pl/bdl>.

Przyjęto, że prognoza zostanie wykonana dla modelu wykazującego się najlepszym dopasowaniem do danych empirycznych.

Jako mierniki jakości modelu przyjęto współczynnik zmienności resztowej  $v$ .

$$v = \frac{S}{\bar{y}} \quad (5)$$

gdzie:  $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - yt_i)^2}{N-3}}$

oraz współczynnik zbieżności  $\varphi^2$

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - yt_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \quad (6)$$

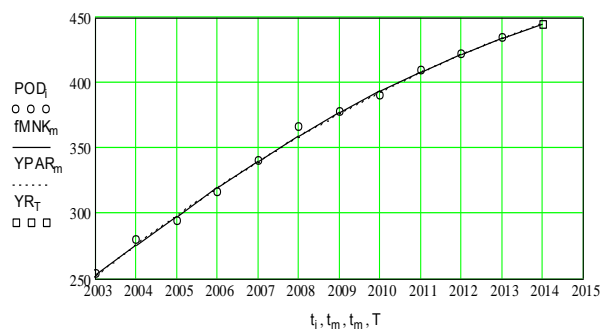
gdzie:  $y_i$  – dane empiryczne;  $yt_i$  – model teoretyczny;

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N y_i$$

Prognozę wykonano dla w/w trendów. W trakcie obliczeń zmieniano liczbę ostatnio uwzględnionych obserwacji – kolejno odrzucało obserwacje dotyczące roku 2002, 2003, itd. Spośród modeli wybierano ten trend oraz liczbę  $L$  ostatnio uwzględnionych obserwacji, które zapewniały najmniejszą wartość współczynnika zbieżności  $\varphi^2$ . W tabeli 1 zamieszczono wartości mierników jakości dla optymalnego trendu oraz optymalnej liczby  $L$ . Kolejne wartości  $L$  wynoszą: 5, 5, 6, 11. Jednocześnie podano wyniki dla wszystkich obserwacji ( $L=12$ ), przy czym dokonano wyboru trendu zapewniającego minimalną wartość  $\varphi^2$ .

Obliczenia dla trendu logistycznego zostały wykonane niezależnie od w/w trendów - w tabeli 1 podano wyniki dla  $L$  optymalnego oraz wszystkich obserwacji ( $L=12$ ). Na uwagę zasługuje fakt, że optymalna wartość  $L$  dla trendów nieliniowych pokrywa się z optymalną wartością  $L$  dla funkcji logistycznej. Ponadto, występuje duża zgodność wartości mierników jakości wyznaczonych dla optymalnego  $L$ . Obserwuje się zbliżone wartości prognozy YP. Przedostatnia kolumna zawiera wartość realizacji zmiennej prognozowanej oznaczonej YR, która została zaczerpnięta z [4]. Na tej podstawie wyznaczono wartość błędu względnego *ex post* wyrażonego w procentach.

(ostatnia kolumna). Znajdują się tam [4] również dane dotyczące wcześniejszych lat (2002-2013), jednakże posiadają taką wadę, że wartości wskaźnika motoryzacji podane są z dokładnością do liczby całkowitej – z tego powodu korzystano ze źródła [1]. Również w przypadku błędu *ex post* obserwuje się zbliżone wartości dla funkcji logistycznej i optymalnego trendu nieliniowego. Wyniki te świadczą o celowości stosowania trendu logistycznego do prognozy wskaźnika motoryzacji – w każdym z rozpatrzonych przypadków trend logistyczny prowadził do tych samych wyników, co optymalny trend nieliniowy. Można by postawić pytanie: po co szukać optymalnego trendu nieliniowego, skoro jeden rodzaj trendu (funkcja logistyczna) zapewnia nam te same wyniki. Powód jest taki, że wykorzystanie funkcji logistycznej oznacza rozwiązanie układu równań (4), co wymaga specjalistycznego oprogramowania. Natomiast, stosowanie trendów nieliniowych wymaga prostych obliczeń, które można wykonać na kalkulatorze obliczeniowym. Można również posłużyć się programem obliczeniowym [5], który wyznacza wartość prognozy dla wymienionych trendów nieliniowych, przy czym użytkownik wprowadza jedynie dane wejściowe. W tabeli 1 zamieszczono wyniki prognozy uzyskanej dla  $L=12$  (wszystkie obserwacje). Jest to dość popularne podejście wynikające z przekonania: im dłuższy szereg czasowy, tym dokładniejsza prognoza. Z tabeli 1 wynika, że wartości mierników jakości oraz błędu *ex post* dla  $L=12$  są kilkakrotnie większe, niż uzyskane dla optymalnej wartości  $L$ . Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 2. Wyniki prognozy wartości wskaźnika motoryzacji dla województwa podlaskiego. Zastosowano oznaczenia: zaobserwowane wartości POD (kółka), funkcja logistyczna fMNK (linia ciągła), trend paraboliczny YPAR (linia kropkowana) oraz realizacja YR (prostokąt).

Źródło: Opracowanie własne.

Tab. 1. Wyniki prognozy wskaźnika motoryzacji dla Polski oraz wybranych województw

Województwo	Trend	Liczba obserwacji L	Współczynnik zbieżności $\varphi^2$	Współczynnik zmienności $v$	Wartość Prognozy YP	Wartość Realizacji YR	Błąd <i>ex post</i> [%]
Polska	paraboliczny	L=5	0,00345	0,00511	521,3	520	0,25
	logistyczny	L=5	0,00339	0,00507	521,24	520	0,24
	liniowy	L=12	0,0150	0,02533	531,42	520	2,20
	logistyczny	L=12	0,0135	0,02530	528,9	520	1,71
Wielkopolskie	paraboliczny	L=5	0,00627	0,00613	582,4	581	0,24
	logistyczny	L=5	0,00624	0,00621	582,56	581	0,27
	paraboliczny	L=12	0,0283	0,0313	595,26	581	2,45
	logistyczny	L=12	0,0277	0,0310	594,37	581	2,30
Zachodniopomorskie	paraboliczny	L=6	0,00565	0,00765	493,89	490	0,79
	logistyczny	L=6	0,00595	0,00785	491,82	490	0,37
	liniowy	L=12	0,0340	0,04457	499,19	490	1,88
	logistyczny	L=12	0,0307	0,04463	507,63	490	3,60
Podlaskie	paraboliczny	L=11	0,00317	0,01085	445,66	447	-0,30
	logistyczny	L=11	0,00284	0,01026	444,37	447	-0,59
	liniowy	L=12	0,0213	0,0278	457,7	447	2,39
	logistyczny	L=12	0,0248	0,0316	466,92	447	-4,46

Źródło: Opracowanie własne.

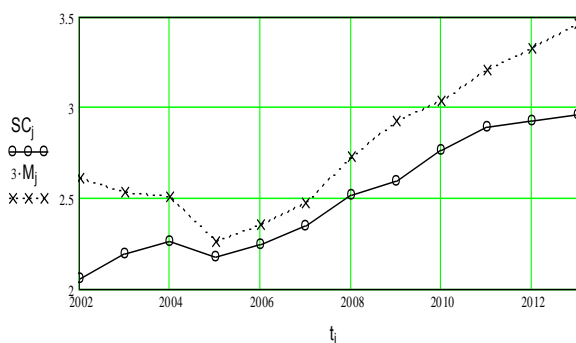
Zgodność wyników uzyskanych dla trendów nieliniowych oraz funkcji logistycznej znajduje potwierdzenie na rysunku 2, który odnosi się do wskaźnika motoryzacji dla województwa podlaskiego.

Optymalnym (ze względu na minimalną wartość współczynnika zbieżności) okazał się trend paraboliczny. Optymalna liczba obserwacji wyniosła  $L=11$ , zarówno dla trendu parabolicznego, jak również funkcji logistycznej. Uzyskany trend paraboliczny YPAR pokrywa się z trendem logistycznym fMNK.

## 2. PROGNOZA LICZBY SAMOCHODÓW CIĘŻAROWYCH ORAZ LICZBY MOTOCYKLI W POLSCE

Kolejna prognoza dotyczyła liczby samochodów ciężarowych oraz liczby motocykli w Polsce w 2014r.

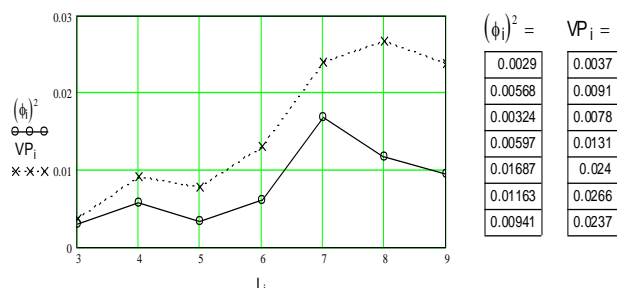
Na rysunku 3 przedstawiono dane dotyczące lat 2002-2013. Linia ciągła z kółkami SC ilustruje liczbę samochodów ciężarowych (w mln). Linia kropkowana z iksami 3M oznacza przeskalowaną liczbę motocykli (w mln), gdzie M-liczba motocykli. Począwszy od 2005r. obserwuje się systematyczny wzrost liczby obydwu rodzajów pojazdów, przy czym, charakter krzywych sugeruje funkcję logistyczną. Mając na uwadze wniosek zawarty w rozdziale 1 dotyczący równoważności funkcji logistycznej i trendów nieliniowych, zdecydowano się na zastosowanie tych ostatnich.



**Rys. 3.** Liczba samochodów ciężarowych (w mln) w latach 2002-2013 w Polsce – linia ciągła z kółkami SC. Przeskalowana liczba motocykli (w mln) – linia kropkowana z iksami 3M.

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych ze strony internetowej Banku Danych Lokalnych GUS <http://stat.gov.pl/bdl>.

Podobnie jak w rozdziale 1, rozpatrywano modele dla zmieniającej się liczby ostatnio uwzględnionych obserwacji  $L$ . W przypadku liczby motocykli, optymalny okazał się trend liniowy – prowadził do mniejszych wartości mierników jakości, niż pozostałe trendy.



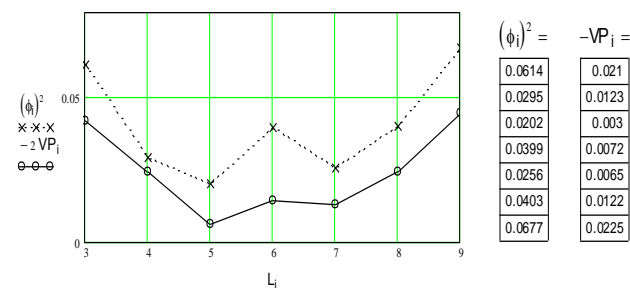
**Rys. 4.** Wyniki prognozy liczby motocykli w Polsce w funkcji liczby uwzględnionych ostatnich lat  $L$ - obliczenia wykonano z użyciem trendu liniowego. Linia ciągła z kółkami  $\phi_i^2$  - współczynnik zbieżności. Linia kropkowana z iksami  $VP_i$  - błąd względny prognozy ex post.

Źródło: Opracowanie własne.

Na rysunku 4 zamieszczono wyniki prognozy liczby motocykli w Polsce w 2014r, uzyskanej dla trendu liniowego, w funkcji liczby uwzględnionych ostatnich lat  $L$ . Linia ciągłą z kółkami  $\phi_i^2$  oznaczono współczynnik zbieżności; linia kropkowana z iksami  $VP_i$  oznacza błąd względny prognozy ex post. Z rysunku 4 wynika, że wzrost liczby uwzględnionych obserwacji  $L$  powoduje pogorszenie jakości modelu - wzrost wartości współczynnika zbieżności. Najmniejszą wartość współczynnika zbieżności odnotowano dla  $L=3$ .

Wartość prognozy dla tego modelu wynosi  $YP=1,1938$  mln. Na dzień 31.12.2014r. odnotowano liczbę motocykli  $YR=1,1985$  mln [4]. Dla tej samej wartości  $L$  uzyskuje się najmniejszy błąd względny prognozy ex post wynoszący zaledwie 0,37%. Można zauważyć, że krzywa  $VP$  stanowi „przeskalowaną” zależność współczynnika zbieżności.

W przypadku prognozy liczby samochodów ciężarowych optymalny okazał się trend potęgowy. Najmniejsza wartość współczynnika zbieżności występuje dla  $L=5$ . Dla tej liczby obserwacji model trendu potęgowego prowadzi do prognozy  $YP=3,0284$  mln. Uwzględniając wartość realizacji zmiennej prognozowanej  $YR=3,0374$  mln [4] uzyskuje się błąd względny prognozy ex post wynoszący - 0,30%.



**Rys. 5.** Wyniki prognozy liczby samochodów ciężarowych w Polsce w funkcji liczby uwzględnionych ostatnich lat  $L$ - obliczenia wykonano z użyciem trendu potęgowego. Linia ciągła z kółkami  $\phi_i^2$  - współczynnik zbieżności. Linia kropkowana z iksami  $VP_i$  - błąd względny prognozy ex post.

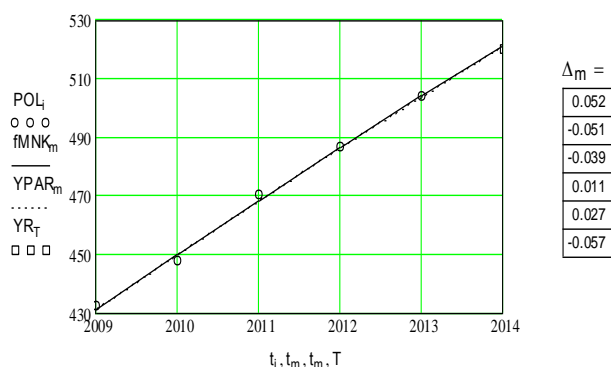
Źródło: Opracowanie własne.

## PODSUMOWANIE

Najważniejszym wnioskiem uzyskanym w pracy jest stwierdzenie równoważności wyników uzyskanych dla funkcji logistycznej oraz dla trendu nieliniowego. Przyczyny należy upatrywać w procesie optymalizacyjnym. Jako kryterium modelu optymalnego przyjęto minimalną wartość współczynnika zbieżności  $\phi^2$ . W przypadku trendu logistycznego optymalizacja ograniczała się do wyboru odpowiedniej wartości liczby uwzględnionych lat  $L$ . Dla trendów nieliniowych, obok wyboru liczby  $L$ , dochodzi dodatkowo wybór optymalnego trendu. W efekcie takiego postępowania uzyskuje się dwa modele charakteryzujące się zbliżonymi wartościami współczynnika zbieżności, co prowadzi do zbliżonych krzywych teoretycznych.

W celu sprawdzenia powyższego rozumowania wykonano rysunek 6, na którym dokonano porównania wyników modelowania wskaźnika motoryzacji w Polsce. Zastosowano oznaczenia: zaobserwowane wartości POL (kółka), funkcja logistyczna fMNK (linia ciągła), trend paraboliczny YPAR (linia kropkowana) oraz realizacja YR (prostokąt). Obydwie krzywe: fMNK oraz YPAR pokrywają się. Wyznaczono różnicę wartości obydwu trendów:

$$\Delta = fMNK - YPAR \quad (7)$$



**Rys.6.** Wyniki prognozy wartości wskaźnika motoryzacji dla Polski. Zastosowano oznaczenia: zaobserwowane wartości POL (kółka), funkcja logistyczna  $fMNK$  (linia ciągła), trend paraboliczny  $YPAR$  (linia kropkowana) oraz realizacja  $YR$  (prostokąt).

Źródło: Opracowanie własne.

Wartości różnicy  $\Delta$  stanowią około 0,01% wartości funkcji. Jest to potwierdzenie faktu, że zastosowanie procesu optymalizacyjnego spowodowało ujednoczenie wyników obydwu trendów.

## BIBLIOGRAFIA

1. Bank Danych Lokalnych, Główny Urząd Statystyczny, <http://stat.gov.pl/bdl> (dostęp: 25.09.2015).
2. Rocznik Statystyczny 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, GUS, Warszawa.
3. Stanisław T., *Funkcje jednej zmiennej w badaniach ekonomicznych*, PWN, Warszawa, 1986.
4. Transport, Wyniki działalności w 2014r., GUS, Warszawa 2015.
5. www.wzieu.pl, Student, Materiały dydaktyczne, prof. Jan Purczyński, Trendy nieliniowe.
6. Zeliaś A., *Teoria prognozy*, PWE, Warszawa 1997.
7. Żurowska J., *Zastosowanie modelu trendu logistycznego do prognozowania wskaźnika motoryzacji w Polsce*, Archiwum Motoryzacji nr 2, 2007.

## FORECAST OF SELECTED MOTORIZATION INDEXES IN POLAND IN 2014

### Abstract

*In the paper the forecast of vehicle motorization index (number of registered motor vehicles per 1000 people) as well as the forecasts of the truck number and motorbike number were carried out. Nonlinear trends and logistic function were used. It was shown that the results obtained for the logistic function were the same as the results for the optimum nonlinear trend.*

Autorzy:

prof. dr hab. inż. **Jan Purczyński** – Uniwersytet Szczeciński  
mgr **Kamila Bednarz-Okrzyńska** – Uniwersytet Szczeciński