ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2013
Seria: ORGANIZACJA I ZARZĄDZANIE z. 64 Nr kol. 1894

Adam SOJDA
Politechnika Śląska
Wydział Organizacji i Zarządzania

ZASTOSOWANIE MODELU DWUMIANOWEGO I TROJMIANOWEGO DO WYCENY OPCJI RZECZOWYCH[1]

Streszczenie. W artykule przedstawiono model dwuminowy i trójmianowy wyceny opcji rzeczowych. Zastosowanie opcji rzeczowych pozwala na uwzględnienie w wycenie wartości inwestycji bądź przedsiębiorstwa elastyczności decyzyjnej. W artykule pokazano zastosowanie dwóch modeli wyceny opcji rzeczowych do oceny projektu inwestycyjnego w kopalni węgla kamiennego. Dla tych modeli rozważono amerykańską opcję odroczenia inwestycji. Jako instrument podstawowy, z którym związane jest ryzyko inwestycji wybrano cenę surowca.

PRICING REAL OPTIONS USING BINOMINAL AND TRINOMIAL MODEL

Summary. This paper presents a binominal and trinominal model princing real options. The use of real options can be incorporated in the valuation of investments, the company's decision-making flexibility. The article demonstrates the use of two real options valuation models to assess the investment project in a coal mine. For these models is considered an American call option postpone investments. As the basic instrument, which is related to the risk of investment chosen raw material prices.

1. Wstęp

Jedną z podstawowych kategorii w gospodarce rynkowej jest wartość. Jej kreowanie w przypadku przemysłu górniczego odbywa się poprzez inwestycje dotyczące odkrywania, rozpoznania i eksploatacji złóż, a następnie przez przerób i sprzedaż wydobytej kopaliny. Wydobyciu kopaliny umiejscowionej w złożu towarzyszy ryzyko wynikające z jego specyfiki

[1] Praca powstała w ramach realizacji projektu badawczego nr N N524 341640 „Metoda wyznaczania wartości kopalni węgla kamiennego” finansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki

związanej z nieodnawialnością, wyjątkowością, niepowtarzalnością występowania. Złoże może być charakteryzowane przez kształt, budowę geologiczną, głębokość, warunki zalegania, parametry jakościowe kopaliny. Wielkości tych czynników są przeważnie dokładnie poznawane dopiero wraz z eksploatacją złoża. W początkowej fazie oceny inwestycji dopuszczalny błąd rozpoznania, zgodnie z polskimi normami, wynosi 10%. Inwestycje w przemyśle górniczym charakteryzują się typowymi cechami inwestycji:

- nieodwracalnością - poniesionych nakładów nie można odzyskać,
- niepewnością - nie istnieje pewność odnośnie przyszłych zysków,
- swobodą w podejmowaniu decyzji o momencie rozpoczęcia przedsięwzięcia.

Dynamika życia gospodarczego w połączeniu z globalizacją i zwiększającym się poziomem konkurencyjności wymusza podjęcie przez organizację dodatkowego wysiłku, mającego na celu zapewnienia sobie narzędzi do szybkiego reagowania na dynamicznie zmieniającą się rzeczywistość. Ważne jest stosowanie metod mogących uwzględniać dostosowywanie się przedsiębiorstwa do zmieniających się warunków, ekonomicznych zarówno jak i technologicznych. Zastosowanie opcji rzeczowych do oceny wartości przedsiębiorstwa oraz do oceny poszczególnych projektów inwestycyjnych [2], [3], [4] pozwala na uwzględnienie (wśród wielu czynników elastyczności decyzyjnej), polegającej na możliwości adaptacji przedsiębiorstwa do zmieniających się warunków.

2. Model dwumianowy

Model dwumianowy zwany również modelem drzewa decyzyjnego zaprezentowany został przez J. Coxa, S. Rossa, M. Rubinsteina[2]. W modelu tym czas dzielony jest na określoną liczbę krótkich okresów Δt, w każdym z tych okresów cena instrumentu podstawowego z poziomu S może zmienić się w sposób następujący:

- może wzrosnąć do wartości Su z prawdopodobieństwem p,
- może spaść do wartości Sd z prawdopodobieństwem $1-p$.

Przyjęcie, że $u>1, 0<d<1$ pozwala wartość Su uznać, za proporcjonalny wzrost wartości instrumentu podstawowego w przedziale Δt, natomiast Sd uznać za proporcjonalny spadek wartości instrumentu podstawowego.

Dodatkowe założenia o obojętności inwestorów względem ryzyka oznaczają, że wartość oczekiwana stopy zwrotu z akcji w okresie Δt musi być równa stopie wolnej od ryzyka r_f. Wartość instrumentu podstawowego na koniec okresu Δt wynosi:

---

[2] Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M.: Options Princing. A Simplefied Approach, Journal of Financial Economics, nr 7, 1979.

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1-p)Sd \tag{1}$$

Stąd

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d \tag{2}$$

Założymy, że odchylenie standardowe ceny instrumentu podstawowego w przedziale Δt jest równe $S\sigma\sqrt{\Delta t}$, a wariancja $S^2\sigma^2\Delta t$, stąd:

$$S^2\sigma^2\Delta t = pS^2u^2 + (1-p)S^2d^2 - S^2(pu-(1-p)d)^2 \tag{3}$$

Po podzielaniu przez S^2 otrzymamy:

$$\sigma^2\Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - (pu-(1-p)d)^2 \tag{4}$$

Zakładając, że $u = \frac{1}{d}$ i gdy Δt jest dostatecznie małe, otrzymujemy[3]:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tag{5}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tag{6}$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{7}$$

Należy zauważyć, że w chwili $t = 0$ cena instrumentu podstawowego jest znana i równa S, w chwili Δt możliwe są dwa poziomy cen: Su, Sd, w chwili $2\Delta t$ są już trzy możliwości: Su^2, $Sud = S = Sdu$, Sd^2. Uogólniając, w chwili $i\Delta t$ można zaobserwować $i+1$ poziomów cen Su^jd^{i-j}, $j = 0,1,...,i$. Stan ten wynika z przyjęcia założenia, że $u = \frac{1}{d}$. Drzewo ulega rekombinacji, co oznacza, że wzrost ceny po spadku prowadzi do tej samej ceny jak spadek po wzroście. Cena instrumentu w przyszłości nie zależy od kolejności występowania spadków i wzrostów, a tylko od liczby wzrostów. Przez węzeł (i, j) rozmieć będziemy stan, w którym cena instrumentu w i okresach wzrosła dokładnie j razy. Węzeł może być określany poprzez parę liczb (i, j) a także również poprzez podanie ścieżki dotarcia do węzła za pomocą symboli *u* i *d*, oznaczających wzrost i spadek wartości ceny instrumentu.

Chcąc wycenić opcję należy rozpocząć wycenę od węzła końcowego dla danej opcji, czyli od ustalonej chwili T, cofając się do początku. Opcja amerykańskiej, może być zrealizowana w dowolnym momencie od chwili początkowej do ustalonej chwili T. Przy warunku obojętności wobec ryzyka wartość opcji, w każdym węźle w chwili $T - k\Delta t$, $k = 0,1,...,T$ można wyznaczyć jako wartość oczekiwaną w chwili T, dyskontowaną po stopie wolnej od ryzyka. Jednakże w przypadku opcji amerykańskiej dodatkowo należy sprawdzić, co jest korzystniejsze: wykonanie wcześniejsze opcji czy też posiadanie jej przez kolejny okres Δt.

[3] Wyznaczenie wartości *u*, *d*, *p* można znaleźć w przy [1], [4].

Dla opcji amerykańskich w węzłach wcześniejszych niż końcowe, chcąc wyznaczyć wartość opcji należy porównać ze sobą:

- wartość przy założeniu, że jest ona wykonywana w tym momencie,
- wartość przy założeniu, że nie zostanie ona wykonana przez następny okres. Wartość ta jest równa zdyskontowanej wartości oczekiwanej opcji na koniec tego okresu.

Zakładamy, że mamy wycenić opcję amerykańską z czasem T. Oznaczmy przez $f_{i,j}$ wartość opcji w węźle (i, j). Wartość ta jest wyznaczona w chwili $i\Delta t$, przy cenie $Su^j d^{i-j}$, $j = 0,1,...,i$, $i = 0,1,...,T$. Jeśli prawdopodobieństwo przejścia z węzła (i, j) w chwili $i\Delta t$ do węzła $(i+1, j+1)$ w chwili $(i+1)\Delta t$ jest równe p oraz jeśli prawdopodobieństwo przejścia z węzła (i, j) w chwili $i\Delta t$ do węzła $(i+1, j)$ w chwili $(i+1)\Delta t$ jest równe $1-p$, to zakładając, że opcja nie zostanie wcześniej wykonana otrzymujemy, że wartość opcji jest równa (rys.1):

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t}\left(pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}\right) \text{ dla } 0 \le i \le T-1,\ 0 \le j \le i. \tag{8}$$

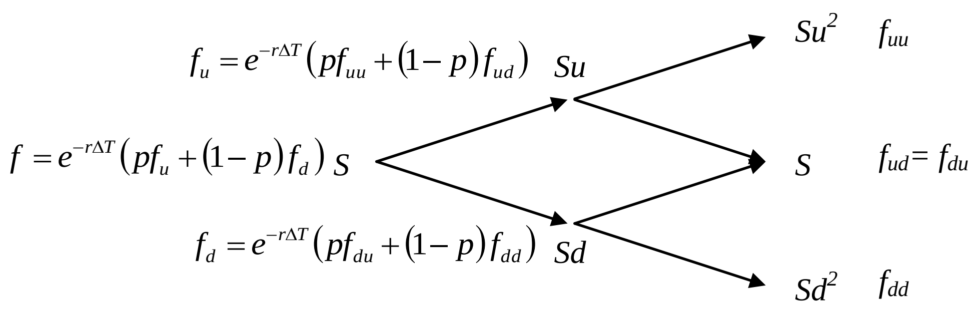
Jeśli jednak założymy, że opcja może być wcześniej wykonana, to należy porównać wartość $f_{i,j}$ z wewnętrzną wartością opcji:

$$f_{i,j} = \max\left\{X - Su^j d^{i-j}, e^{-r\Delta t}\left(pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}\right)\right\} \tag{9}$$

Dla każdego węzła w momencie T wartość opcji jest wyznaczana na podstawie wzoru:

$$f_{T,j} = \max\left\{X - Su^j d^{T-j}, 0\right\} \tag{10}$$

Obliczenia przebiegają wstecz, wartość w chwili $i\Delta t$ oznacza możliwość przedterminowego wykonania opcji zarówno w tym, jak i w każdym następującym po nim węźle.



Rys. 1. Drzewo dwumianowe dla formuły CCR (cena i wartość opcji)
Fig. 1. Binomial lattice (tree) with CRR formulae (price, real option value)
Źródło: Opracowanie własne

3. Model trójmianowy

W modelu trójmianowym zakłada się, że w danym momencie Δt możliwe są trzy ruchy aktywa podstawowego: wartość może wzrosnąć, pozostać na tym samym poziomie, spaść. Zatem w węźle (i, j) przy wartości $S_{i,j}$ w momencie $j+1$ wartość może wzrosnąć do $S_{i+1,j+1} = S_{i,j}u = S_{i,j}e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$, spaść do wartości $S_{i+1,j-1} = S_{i,j}d = S_{i,j}e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$ bądź utrzymać się na tym samym poziomie $S_{i+1,j} = S_{i,j}m = S_{i,j}$, przy założeniach, że $ud = 1$ oraz $m = 1$.

Prawdopodobieństwa zmian określone są następująco:

$$p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\lambda\sigma}\sqrt{\Delta t}, \tag{11}$$

$$p_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1}{2}\frac{\mu}{\lambda\sigma}\sqrt{\Delta t}, \tag{12}$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d = 1 - \frac{1}{\lambda^2}, \tag{13}$$

gdzie $\mu = r - q - \frac{\sigma^2}{2}$. Występujący parametr λ jest tak dobrany, aby prawdopodobieństwa były nieujemne. Dla $\lambda = \sqrt{1{,}5}$ uzyskuje się najszybszą zbieżność ceny opcji do ceny wyliczonej analitycznie. Dla $\lambda = 1$ otrzymany model jest modelem dwumianowym, bowiem $p_m = 0$.

Cenę opcji $f_{i,j}$ wyznacza się w analogiczny sposób do modelu dwumianowego. Należy pamiętać, że jeśli opcja nie zostanie wcześniej wykonana, to otrzymujemy, że wartość opcji jest równa:

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t}\left(p_u f_{i+1,j+1} + p_m f_{i+1,j} + p_d f_{i+1,j-1}\right) \tag{14}$$

Oba modele dwumianowy i trójmianowy zbliżają się do dokładnej wartości opcji wraz ze zmniejszaniem się Δt. W praktyce można przyjąć $N = 30$ [5].

4. Zastosowanie modeli

Poniżej przedstawiony został hipotetyczny przykład dla opcji odroczenia. Zakładamy, że kopalnia może odkładać w czasie rozpoczęcie wydobycia z pewnej ściany przez okres 3 lat. Nakłady potrzebne na inwestycję wynoszą 4 000 000 zł, pierwszy strumień gotówki nastąpi po roku od poniesienia nakładów. Roczne wydobycie (W) wynosi 11 000 Mg, przy koszcie stałym (KS) 500 000 zł rocznie, koszcie zmiennym (KZ) 400 zł/Mg. Obecnie cena surowca wynosi 500 zł/Mg, przewidywany czas trwania eksploatacji 6 lat. Zakładana zmienność ceny to 10% przy stopie wolnej od ryzyka 5%. Cena jest źródłem ryzyka i przyszłe przepływy pieniężne zależą od zmiany ceny.

Tabela 1

Dane i oznaczenia

Parametr	Oznaczenie	Wartość	Jednostka
cena początkowa surowca	S_0	500	zł/Mg
nakłady inwestycyjne	X	4 000 000	zł
czas dzierżawy	t	6	rok
zmienność cen	σ	10	%
stopa wolna od ryzyka	r_f	4	%
krok czasowy	Δt	1	rok
wydobycie	*W*	11 000	Mg
koszty stałe	*KS*	500 000	zł/rok
koszty zmienne	*KZ*	400	zł/Mg

Źródło: opracowanie własne

Tabela 2

Wyznaczone parametry dla modelu dwumianowego

Parametr	Oznaczenie	Wartość
$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$	u	1,1052
$\frac{1}{u}$	d	0,9048
$p = \frac{e^{r_f \Delta t} - d}{u - d}$	p	0,6787
$1 - p$	$1 - p$	0,3213
współczynnik dyskontujący dla wzrostu $pe^{-r_f \Delta t}$	d_U	0,6521
współczynnik dyskontujący dla spadku $(1 - p)e^{-r_f \Delta t}$	d_D	0,3087

Źródło: opracowanie własne

4.1. Analiza opłacalności inwestycji – model dwumianowy

Ponieważ cena surowca jest źródłem ryzyka, należy ustalić możliwą cenę surowca w kolejnych latach. Przy wzroście cena jest przemnażana przez 1,105 a przy spadku przez 0,905 w kolejnych okresach.

						911,06	
					824,36		
				745,91		745,91	
			674,93		674,93		
		610,70		610,70		610,70	
	552,59		552,59		552,59		
500,00		500,00		500,00		500,00	
	452,42		452,42		452,42		
		409,37		409,37		409,37	
			370,41		370,41		
				335,16		335,16	
					303,27		
						274,41	
0	1	2	3	4	5	6	czas

Rys. 2. Siatka cen surowca – model dwumianowy
Fig. 3. Price lattice – binominal model
Źródło: opracowanie własne

Wyznaczenie ceny S w poszczególnych węzłach pozwala na określenie wartości strumienia finansowego CF zgodnie ze wzorem:

$$CF_{i,j} = (S_{i,j} - KZ)W - KS \tag{15}$$

Przykładowo, jeśli po roku cena wzrosła do 552,59 zł, to strumień finansowy w tym węźle wyniesie odpowiednio $CF_u = (552{,}59 - 400)(11000) - 500000 =$ 1 178 440 zł.

Strumienie finansowe dla poszczególnych lat w poszczególnych węzłach wyznaczane są przy założeniu, że kopalnia prowadzi wydobycie, a inwestycja rozpoczęła się w $t = 0$, pierwszy przepływ otrzymujemy dopiero po roku od rozpoczęcia inwestycji. Wyznaczenie wartości strumieni finansowych jest konieczne do wyznaczenia wartości bieżącej przepływów finansowych w każdym z węzłów. Wartości te wyznaczamy rozpoczynając od ostatniego roku. W ostatnim roku (rok 6) wartości przyszłe strumieni finansowych są równe wartości strumienia dla danego węzła. Dla pozostałych węzłów, poza ostatnim rokiem wartości te wyznaczane są cofając się wstecz. Wartości przyszłe dla węzłów muszą uwzględniać wartość strumienia finansowego w analizowanym węźle, a także wartość otrzymaną dla możliwych do osiągnięcia węzłów w kolejnym roku, gdy ceny spadną albo wzrosną. Wartości te wyznaczamy ze wzoru:

$$PV_{i,j} = CF_{i,j} + \left[d_U PV_{i+1,j+1} + d_D PV_{i+1,j} \right] \tag{16}$$

						5 121 653	
					4 167 967		
				3 305 036		3 305 036	
			2 524 223		2 524 223		
		1 817 715		1 817 715		1 817 715	
	1 178 440		1 178 440		1 178 440		
0		600 000		600 000		600 000	
	76 606		76 606		76 606		
		-396 981		-396 981		-396 981	
			-825 500		-825 500		
				-1 213 240		-1 213 240	
					-1 564 081		
						-1 881 536	
0	1	2	3	4	5	6	czas

Rys. 3. Siatka strumieni finansowych – model dwumianowy
Fig. 3. Cash flow lattice – binominal model
Źródło: opracowanie własne

						5 121 653	
					8 528 066		
				10 483 969		3 305 036	
			11 219 845		5 240 579		
		10 936 023		6 022 007		1 817 715	
	9 806 307		5 836 712		2 549 012		
7 381 190		4 847 447		2 368 862		600 000	
	3 195 301		1 429 375		345 343		
		-137 457		-622 081		-396 981	
			-2 179 048		-1 458 868		
				-3 070 858		-1 213 240	
					-2 936 031		
						-1 881 536	
0	1	2	3	4	5	6	czas

Rys. 4. Siatka wartości aktualnych – model dwumianowy
Fig. 4. Present value lattice – binominal model
Źródło: opracowanie własne

Wartość w roku 5 po pięciu wzrostach cen jest równa:

$$PV_{UUUUU} = 4167967 + \left[d_U 5121653 + d_D 3305036\right] = 8\,528\,066 \text{ zł}$$

W analogiczny sposób wyznaczana jest wartość przyszła w kolejnych węzłach dla $i = 4, 3, 2, 1, 0$. Ponieważ w roku 0 ponoszone są nakłady finansowe, wyznaczenie wartości *NPV* dla projektu wymaga pomniejszenia wartości *PV* o nakłady inwestycyjne.

$$NPV = 7\,381\,190 - 4\,000\,000 = 3\,381\,190 \text{ zł}$$

4.2. Opcja odroczenia – model dwumianowy

Założono, że wydobycie można rozpocząć w dowolnym momencie w ciągu trzech lat (opcja amerykańska). Wyznaczenie wartości opcji odroczenia wymaga skorzystania z wartości *PV*. Wartość opcji wyznaczana jest od końca do początku analogicznie wartość *PV*. W roku 3 opcja musi być wykonana i inwestycja rozpoczyna się od nakładu inwestycyjnego, natomiast pierwszy przepływ pojawi się w roku 4. W tym przypadku wartość opcji ustala się po wyznaczeniu wartości spodziewanego zysku z inwestycji i stwierdzeniu opłacalności.
Po trzech wzrostach ceny, wartość opcji zostanie wyznaczona jako:

$$C_{UUU} = d_U 10483969 + d_D 6022007 - 4000000 = 4\,695\,622 \text{ zł}$$

Wartość ta jest dodatnia i jest ona wartością opcji. Natomiast po trzech spadkach ceny wartość opcji zostanie wyznaczona jako:

$$C_{DDD} = d_U(-622081) + d_D(-3070858) - 4000000 = \text{-5 35 3548 zł}$$

Ponieważ, wyznaczona wartość jest mniejsza od zera, opcja jest *out of the money*, opcja nie zostanie wykonana. Wartość opcji w tym węźle wynosi 0. Ze względu na rodzaj opcji (opcja amerykańska) sprawdzana jest możliwość wcześniejszego wykonania opcji w każdym z węzłów. Dla roku 2 po dwóch wzrostach ceny wartość opcji wyznaczamy po ustaleniu:

- wartości opcji niewykonanej – wartość ta wyznaczona jest na podstawie wartości opcji określonych dla następnego roku (roku 3)

$$C_{i,j|NW} = d_U C_{i+1,j+1} + d_D C_{i+1,j} \tag{17}$$

$$C_{DD|NW} = d_U(4695622) + d_D(658272) = 3\,265\,303$$

- wartość opcji wykonanej – wartość wyznaczona jest w sposób następujący:

$$C_{i,j|W} = \left(PV_{i,j} - CF_{i,j}\right) - X \tag{18}$$

$$C_{DD|W} = (10936023 - 1817715) - 4000000 = 5\,118\,308$$

Wartość opcji jest większą z tych dwóch liczb i należy rozpocząć wydobycie.

W przypadku, kiedy nastąpił wzrost i spadek bądź odwrotnie (znajdujemy się w tym samym węźle) otrzymujemy:

$$C_{UD|NW} = d_U(658272) + d_D(0) = 429\ 273$$

$$C_{UD|W} = (4847447 - 600000) - 4000000 = 247\ 447$$

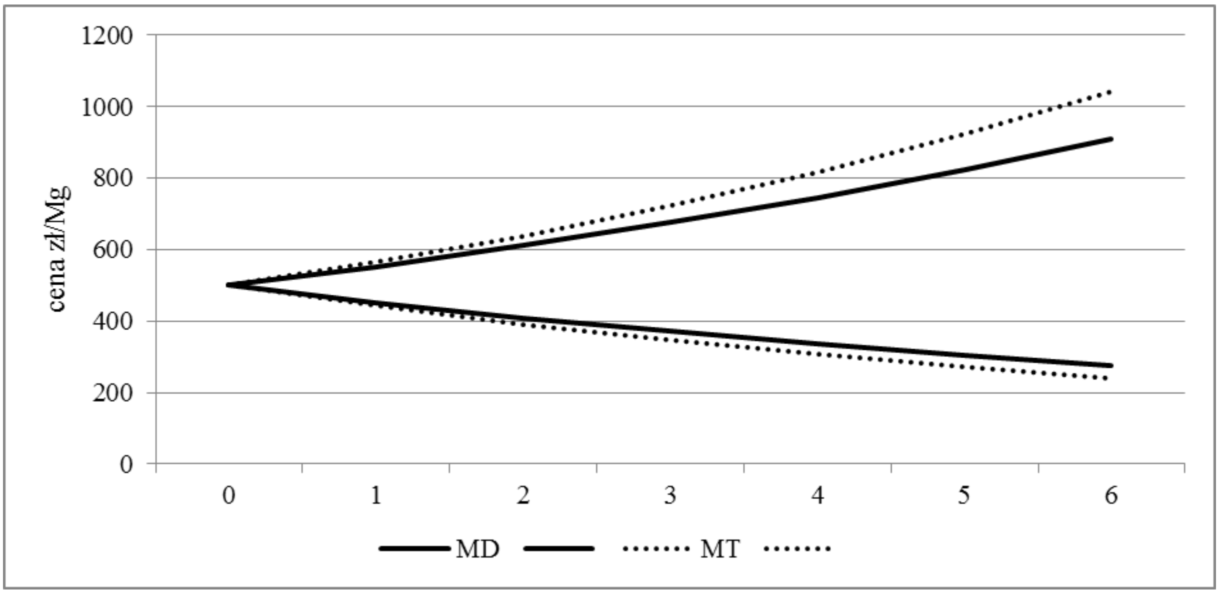
Wartość opcji jest większą z tych liczb, jednakże nie należy rozpoczynać wydobycia. Analogicznie wyznaczana jest wartość opcji we wszystkich pozostałych węzłach, co przedstawiono na rys. 5. Wartości oznaczane na szaro informują, że należy wykonać opcję, czyli rozpocząć wydobycie. Pozostałe wartości oznaczają, że należy wstrzymać się z inwestycją.

0	1	2	3	4	czas
			4 695 622		
		5 118 308			
	4 627 867		658 272		
3 381 190		429 273			
	279 938		0		
		0			
			0		

Rys. 5.Siatka wartości opcji *call* – model dwumianowy
Fig. 5. Call option lattice – binominal model
Źródło: opracowanie własne

4.3. Model trójmianowy

Dla modelu trójmianowego, przy założeniu takiej samej zmienności instrumentu podstawowego otrzymujemy następującą rozpiętość cen − rys. 6.



Rys.6. Zmiana ceny w modelach dwumianowym (MD) i trójmianowym (MT) dla tej samej wariancji
Fig. 6. Price change in the binomial (MD) and trinomial (MT) model for the same variance
Źródło: opracowanie własne

Ze względu na znaczne różnice w cenach dla modelu trójmianowego, zmieniono wartość odchylenia standardowego na 8,17%, celem osiągnięcia zbliżonych cen minimalnych i maksymalnych w poszczególnych latach.

Tabela 3

Wartości parametrów dla modelu trójmianowego

Parametr	**Oznaczenie**	**Wartość**
parametr lambda	λ	1,2247
parametr mi	μ	0,0367
parametr u	u	1,1052
parametr m	m	1,0000
parametr d	d	0,9048
prawdopodobieństwo wzrostu ceny	p_u	0,5167
prawdopodobieństwo utrzymania tego samego poziomu	p_m	0,3333
prawdopodobieństwo spadku ceny	p_d	0,1500
współczynnik dyskontujący dla wzrostu	d_U	0,4965
współczynnik dyskontujący dla poziomu stałego	d_M	0,3202
współczynnik dyskontujący dla spadku	d_D	0,1441

Źródło: opracowanie własne

Przy nowej zmienności cen, analogicznie do modelu dwuminowego, wygenerowane zostały ceny surowca w poszczególnych latach. Nowe poziomy cen posłużyły do wyznaczenia nowych wartości przepływów finansowych w sposób identyczny z modelem dwumianowym, zgodnie ze wzorem (15). Wyznaczone wartości $CF_{i,j}$ w poszczególnych węzłach stanowiły podstawę do wyznaczenia wartości $PV_{i,j}$. Jednakże ze względu ma możliwość przyjmowania przez cenę trzech poziomów, wzór (16) na wartość $PV_{i,j}$ uległ koniecznej modyfikacji. Przy oznaczeniach węzłów dla modelu trójmianowego:

$$PV_{n,j} = CF_{n,j} \text{ dla wszystkich } j \tag{19}$$

$$PV_{i,j} = CF_{i,j} + \left[d_U PV_{i+1,j+1} + d_M PV_{i+1,j} + d_D PV_{i+1,j-1} \right] \text{ dla } i < n \text{, dla wszystkich } j \tag{20}$$

Wyznaczone wartości przedstawiają odpowiednio kolejne rysunki, prezentowane poniżej.

						911,20	
					824,47	824,47	
				745,99	745,99	745,99	
			674,98	674,98	674,98	674,98	
		610,73	610,73	610,73	610,73	610,73	
	552,60	552,60	552,60	552,60	552,60	552,60	
500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	
	452,40	452,40	452,40	452,40	452,40	452,40	
		409,33	409,33	409,33	409,33	409,33	
			370,36	370,36	370,36	370,36	
				335,10	335,10	335,10	
					303,20	303,20	
						274,34	
0	1	2	3	4	5	6	czas

Rys. 7. Siatka cen surowca – model trójmianowy
Fig. 7. Price lattice – trinomial model
Źródło: opracowanie własne

0	1	2	3	4	5	6	czas
						5 123 236	
					4 169 160	4 169 160	
				3 305 900	3 305 900	3 305 900	
			2 524 810	2 524 810	2 524 810	2 524 810	
		1 818 069	1 818 069	1 818 069	1 818 069	1 818 069	
	1 178 600	1 178 600	1 178 600	1 178 600	1 178 600	1 178 600	
0	600 000	600 000	600 000	600 000	600 000	600 000	
	76 400	76 400	76 400	76 400	76 400	76 400	
		-397 353	-397 353	-397 353	-397 353	-397 353	
			-826 005	-826 005	-826 005	-826 005	
				-1 213 850	-1 213 850	-1 213 850	
					-1 564 771	-1 564 771	
						-1 882 285	

Rys. 8. Siatka strumieni finansowych – model trójmianowy
Fig. 8. Cash flow lattice – trinomial model
Źródło: opracowanie własne

0	1	2	3	4	5	6	czas
						5 123 236	
					8 702 314	4 169 160	
				10 918 853	6 941 099	3 305 900	
			11 935 142	8 480 147	5 347 528	2 524 810	
		11 896 101	8 933 145	6 273 573	3 905 643	1 818 069	
	10 931 046	8 431 216	6 216 895	4 277 032	2 601 005	1 178 600	
8 555 253	7 091 338	5 296 111	3 759 169	2 470 517	1 420 540	600 000	
	3 616 968	2 459 283	1 535 255	835 839	352 341	76 400	
		-107 605	-477 045	-643 290	-614 208	-397 353	
			-2 297 818	-1 981 629	-1 488 742	-826 005	
				-3 192 558	-2 280 021	-1 213 850	
					-2 995 969	-1 564 771	
						-1 882 285	

Rys. 9. Siatka wartości aktualnych – model trójmianowy
Fig. 9. Present value lattice – trinomial model
Źródło: opracowanie własne

Przy założeniu możliwości odraczania inwestycji przez najbliższe trzy okresy wyznaczona została wartość opcji *call*. Dokonano modyfikacji we wzorach (17) i (18) otrzymując:

$$C_{i,j|NW} = d_U C_{i+1,j+1} + d_M C_{i+1,j} + d_D C_{i+1,j-1} \qquad (21)$$

$$C_{i,j|W} = \left(PV_{i,j} - CF_{i,j}\right) - X \qquad (22)$$

Wartość opcji jest większą z tych liczb, a w przypadku gdy obie są ujemne − zero.

			5 040 575		
		6 078 033	2 835 511		
	5 752 446	3 252 616	840 336		
4 555 253	2 491 338	696 111	0		
	345 619	0	0		
		0	0		
			0		
0	1	2	3	4	czas

Rys. 10. Siatka wartości opcji *call* – model trójmianowy
Fig. 10. Call option lattice – trinomial model
Źródło: opracowanie własne

Jak można zauważyć wartości wyznaczonej opcji dla modelu trójmianowego różni się od wartości dla modelu dwumianowego. Dla porównania wyznaczono wartości opcji dla różnych wariantów ceny początkowej. Dane przedstawia tabela 4. Dodatkowo, zostały scharakteryzowane zalecane działania na podstawie otrzymanych wyników.

Tabela 4

Przykładowe wartości dla różnych wariantów ceny początkowej

Cena	**Model dwumianowy**		**Model trójmianowy**	
	NPV	**Wartość opcji**	**NPV**	**Wartość opcji**
400	-3 218 810	66 859	-3 037 856	49 866
450	81 190	1 035 990	758 698	1 245 210
500	3 381 190	3 381 190	4 555 253	4 555 253
550	6 681 190	6 681 190	8 351 807	8 351 807

Źródło: opracowanie własne

Pomimo różnic co do wartości, rekomendacje odnośnie podejmowanych działań są do siebie podobne. Przedstawiono to w tabeli 5.

Tabela 5

Decyzje dla różnych wariantów ceny początkowej

Cena	**Model dwumianowy**	**Model trójmianowy**
400	Wykonanie tylko przy ciągłym wzroście cen	Rozpocząć inwestycje po trzech wzrostach cen
450	Wykonanie przy wzroście cen, pod warunkiem, ze cena wzrosła za pierwszym razem	Rozpocząć inwestycje w pierwszym okresie, jeśli nie to inwestować w przypadku, kiedy nie nastąpi spadek ceny
500	Rys. 5	Rys. 10
550	Rozpocząć inwestycje po dwóch kolejnych spadkach cen nie inwestować	Rozpocząć inwestycje po dwóch kolejnych spadkach cen nie inwestować

Źródło: opracowanie własne

5. Podsumowanie i wnioski

Oszacowanie wartości inwestycji, przy którym jest możliwe uwzględnienie przystosowania przedsiębiorstwa do zmieniających się warunków, możne być wykonane poprzez zastosowanie drzew dwumianowych i trójmianowych do wyceny opcji rzeczowych. Możliwe jest śledzenie wartości zmian w odpowiednich okresach i w zależności od zaistniałej sytuacji poodejmowanie decyzji optymalnej w stosunku do aktualnie posiadanej wiedzy. Dzięki temu możliwa jest „bieżąca” wycena wartości, uwzględniająca elastyczność decyzyjną. Należy zwrócić uwagę na fakt, że ważnym elementem tego procesu jest wybór metody wyceny – rodzaj drzewa oraz ustalenie zmienności cen w przyszłości i generowanie przez to odpowiednich przepływów.

Bibliografia

1. Cox J.C., Ross S.A., RUBINSTEIN M., Option Pricing: A Simplified Approach, Journal of Financial Economics, 1979, nr 7.
2. Hull J.: Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie, WIG Press, Warszawa 1997.
3. Rudny W.: Opcje rzeczowe w procesie tworzenia wartości przedsiębiorstwa, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach 2009
4. Weron A., Weron R.: Inżynieria finansowa. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.
5. Wilimkowska Z., Łukaniuk M.: Dwumianowy model wyceny opcji rzeczowych, Badania operacyjne i decyzje, nr 1, 2005.

Abstract

In creating enterprise value an important role plays management flexibility. Application of real option allows taking into account the value of investment. The binomial pricing model traces the evolution of the option's key underlying variables in discrete-time. This is done by means of a binomial lattice (tree), for a number of time steps between the valuation and expiration dates. Each node in the lattice represents a possible price of the underlying at a given point in time.

Valuation is performed iteratively, starting at each of the final nodes (those that may be reached at the time of expiration), and then working backwards through the tree towards the first node (valuation date). The value computed at each stage is the value of the option at that point in time.

Option valuation using this method is, as described, a three-step process:

- price tree generation,
- calculation of option value at each final node,
- sequential calculation of the option value at each preceding node.

A more advanced model is the trinomial tree model. This improves upon the binomial model by allowing a stock price to move up, down or stay the same with certain probabilities. The use of models in the evaluation of investment in coal mine shown. Given the differences in values. Decisions were similar.