

# Niepewności pomiarów w metodzie regresji liniowej

## Część 1. Prosta i jej pasma niepewności dla nieskorelowanych danych pomiarowych

Zygmunt Lech Warszawa

Sieć Badawcza Łukasiewicz – Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Jacek Puchalski

Główny Urząd Miar, ul. Elektoralna 2, 00-001 Warszawa

**Streszczenie:** W serii kilku prac omówi się szacowanie dokładności parametrów linii prostej wyznaczanej metodą regresji liniowej dla różnych przypadków danych pomiarowych. Nawiązując do zaleceń Przewodnika Wyznaczania Niepewności Pomiarów GUM, uwzględnia się pomijaną dotychczas w literaturze niepewność typu B. Pierwsza z tych prac dotyczy pomiarów wartości zmiennej losowej  $Y$  dla znanych wartości zmiennej  $X$ . Przedstawia się istotę problemu, kryteria metody regresji liniowej i ich zastosowanie dla wartości mierzonych o nieskorelowanych, znanych i nieznanach, w tym jednakowych, niepewnościach typu A. Ilustrują to symulowane przykłady obliczeniowe dla pomiarów punktów o tych samych współrzędnych i różnych wariantach niepewności typu A i typu B. Wyznaczono równania prostej i pasma ich niepewności. Kolejna praca dotyczy będzie pomiarów punktów o danych skorelowanych. W kolejnej omówi się przypadki wymagające pomiarów obu zmiennych  $Y$  i  $X$ .

**Słowa kluczowe:** regresja liniowa, pasmo niepewności pomiarów typu A i typu B, skorelowanie danych

## 1. Wprowadzenie

Metoda regresji liniowej jest podstawowym narzędziem matematycznym do wyznaczenia równania linii prostej oraz oszacowania dokładności funkcji liniowych i zlinearyzowanych nieliniowych, którymi opisuje się charakterystykę otrzymaną z danych punktów mierzonych [1–4]. W literaturze o stosowaniu regresji liniowej nie znaleziono oceny dokładności parametrów i pasma niepewności linii prostej, zgodnej z zaleceniami Przewodnika Wyznaczania Niepewności Pomiarów o angielskim akronimie GUM [5]. Przewodnik ten opracowało i opublikowało w 1993 r. siedem organizacji międzynarodowych. Kilkakrotnie go udoskonalano i uzupełniono przez Suplementy, oraz opracowuje się wersję GUM 2 [8, 12–14]. Jako pojęcia podstawowe do oceny dokładności pomiarów wprowadzono w nim niepewności typów A i B oraz niepewność złożoną i rozszerzoną. Zalecenia GUM są obecnie stosowane powszechnie w krajowej i międzynarodowej działalności służb metrologicznych oraz w nauce, technice i wielu innych dziedzinach.

dzynarodowej działalności służb metrologicznych oraz w nauce, technice i wielu innych dziedzinach.

Celem pracy jest ściśle zastosowanie metody przyjętej w GUM do szacowania dokładności prostej regresji, w tym głównie uwzględnienie wpływu niepewności typu B. Jako wprowadzenie przedstawi się sposób oceny dokładności pomiarów wg GUM i scharakteryzuje się rodzaje zadań pomiarowych wymagających zastosowania metody regresji liniowej o różnych kryteriach. Poda się też wzory podstawowe i przykłady dopasowywania parametrów prostej regresji do danych pomiarowych, wyznaczy się jej pasma niepewności dla nieskorelowanych danych pomiarowych o znanych i nieznanach, ale jednakowych wartościach niepewności bezwzględnych i względnych.

W każdej obserwacji pomiarowej występuje odchylenie wartości jej wyniku od nieznannej wartości rzeczywistej, jak i od jej estymaty otrzymanej z próbki o wielu obserwacjach. Odchylenia o wartości stałej lub zmieniającej się w sposób zdeterminowany są błędami systematycznymi, a odchylenia zmienne losowo – to błędy przypadkowe. Błędy systematyczne o znanych wartościach i ich zależnościach od wielkości mierzonej i czasu można wyeliminować z wyniku pomiaru przez poprawki. Błędy przypadkowe i nieznanne systematyczne – przy założeniu, że ich maksymalne wartości nie występują równocześnie – randomizują się i szacuje statystycznie. Podstawą oceny dokładności wyniku pomiarów wg konwencji GUM jest estymacja niepewności złożonej

### Autor korespondujący:

Zygmunt Lech Warszawa, zlw1936@gmail.com

### Artykuł recenzowany

nadesłany 16.06.2020 r., przyjęty do druku 20.09.2020 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

zonej  $u$  pomiarów jako sumy geometrycznej dwu niepewności składowych  $u_A$  i  $u_B$ , tj.:

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (1)$$

Składnik  $u_A$ , czyli niepewność typu A, wyznacza się statystycznie jako odchylenie standardowe wartości średniej wyników powtórzonych pomiarów wielkości badanej. Dla małej liczby tych pomiarów  $n < 30$  stosuje się rozkład Studenta, dla większej – rozkład normalny (funkcję Gaussa).

Składnik  $u_B$ , czyli niepewność typu B, szacuje się heurystycznie jako zrandomizowany łączny wpływ wszystkich przewidywanych oddziaływań na wyniki pomiarów, tj. na wartości mierzone i ich sygnały w badanym obiekcie, na parametry członów przesyłu i przetwarzania sygnałów w systemie pomiarowym na wskazania mierników, w określonych dopuszczalnych warunkach pomiaru i w znamionowym okresie ważności legalizacji przyrządów. Wpływ tych oddziaływań zwykle nie jest pomijalny i nieznan co do wartości. Może też zmieniać się przypadkowo w warunkach każdego z ponownych eksperymentów i utracić wiarygodność w długim okresie wykorzystywania wyników pomiaru. Niepewności typu B szacuje się na podstawie maksymalnych dopuszczalnych błędów MPE (ang. *maximum permissible error*)  $E_{\max}$  czujników, przetworników i mierników oraz innej aparatury użytej w pomiarach [5–7]. Wykorzystuje się tu wiedzę o przewidywanych zakresach, rozkładach prawdopodobieństwa, cząstkowych udziałach poszczególnych oddziaływań i ich korelacji wzajemnej oraz o wpływie zmian parametrów wewnętrznych systemu pomiarowego na wyniki pomiarów. Na przykład dla powszechnie stosowanych w pomiarach przyrządów cyfrowych, błąd  $E$  ma niewielką wartość początkową i narasta liniowo wraz z wartością wielkości mierzonej. Przyjmuje się też, że błąd  $E$  ma rozkład równomierny o szerokości  $\pm E$ . Jeśli analizowane pomiary były wykonywane przy warunkach wpływających o zakresach mniejszych niż znamionowe dla błędu  $E$ , to można przyjąć odpowiednio mniejsze rozpięcie rozkładu równomiernego [6, 7]. Przyjmuje się odchylenie standardowe tego rozkładu jako niepewność  $u_B = u_{B0} + E/\sqrt{3}$  i tak jak  $E$  rośnie liniowo wraz z wartością wielkości mierzonej. Niepewność sumy dwu wartości ze

sobą skorelowanych wynosi:  $u_{B\Sigma} = \sqrt{u_{B1}^2 + 2\rho u_{B1}u_{B2} + u_{B2}^2}$ .

Jeśli w wielu eksperymentach tym samym przyrządem i w tych samych warunkach mierzy się dwie różne wartości, to można przyjąć, że zbiory zrandomizowanych błędów ich wyników będą miały jednakowy współczynnik korelacji  $\rho = 1$ . Wówczas niepewność sumy  $u_{B\Sigma} = u_{B1} + u_{B2}$ , a niepewność różnicy  $u_{BD} = |u_{B1} - u_{B2}|$ . Natomiast dla pomiarów różnymi przyrządami dwu wartości i w różnych warunkach można przyjąć, że zbiory błędów będą nieskorelowane, czyli  $\rho = 0$  i niepewności składników zarówno sumy jak i różnicy dodają się geometrycznie, tj.

$$u_{B\Sigma} = u_B = \sqrt{u_{B1}^2 + u_{B2}^2}.$$

Podobne zależności dotyczą też niepewności względnych obu czynników dla iloczynu i ilorazu wyników.

Poprawna estymacja niepewności typu B wymaga wiedzy i praktyki metrologicznej i zapewne dlatego jest pomijana w publikacjach o zastosowaniu metody regresji liniowej w pomiarach.

Przy stosowaniu metody regresji w opracowaniu wyników badań eksperymentalnych dla pomiarów jedno- i wieloparametrowych, obok błędów pomiarowych trzeba uwzględnić też odchylenia wskutek nieadekwatności modelu matematycznego oraz zakłócenia w obiekcie badanym. Jest to tzw. zmienna

resztkowa, którą będziemy też opisywać przez niepewności. Konieczne jest odpowiednie zaplanowanie i przeprowadzanie eksperymentu [2], w tym wybór gęstości i położenia punktów pomiarowych, oszacowanie objętości pozyskiwanej informacji dla każdego punktu pomiarowego i dla całego zakresu pomiarów oraz określenie czasu trwania pomiarów. Są też ograniczenia natury logistycznej, takie jak termin i miejsce badań, dostępność aparatury pomiarowej i obiektu badań, w tym próbek materialnych, konieczność automatyzacji pomiarów i przetwarzania danych. Minimalizuje się też liczbę eksperymentów pomiarowych i koszty ich wykonania. Zadania te mają zwykle charakter indywidualny i nie będą tu omawiane.

## 2. Rodzaje pomiarów opisywanych metodą regresji liniowej

W ogólnym przypadku celem pomiarów jest wyznaczenie wielowymiarowej funkcji  $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$  między zmiennymi wyjściowymi  $\mathbf{Y}$  nazywanymi też objaśnianymi i zmiennymi wejściowymi  $\mathbf{X}$  jako objaśniającymi. Funkcja ta powinna spełniać określone kryterium. Może to być uzyskanie największej wiarygodności w dopasowaniu jej parametrów do wyników pomiarów. Stosuje się też różne uproszczenia, np. dla rozrzutu wyników powtarzanych pomiarów przyjmuje się rozkład Gaussa i brak autokorelacji między znacznie różniącymi się ich wartościami.

Dla dwu zmiennych  $Y$  i  $X$ , na podstawie zmierzonych wartości współrzędnych punktów  $(x_i, y_i)$  metodą regresji liniowej wyznacza się dopasowane do nich równanie linii prostej  $y = ax + b$ . Ocenia się też niepewności parametrów  $a$ ,  $b$  i pasmo niepewności tej prostej lub/i funkcji, którą ona linearyzuje [4]. W praktyce pomiarowej spotyka się następujące przypadki:

Wartości współrzędnej  $x_i$  dla  $i = 1, \dots, n$  badanych punktów można traktować jako dokładnie określone, czyli o pomijalnie małych niepewnościach. Mierzy się wartości  $y_i$ , które mogą być stałe, bądź zmienne losowo i statystycznie niezależne lub skorelowane. Metodą regresji liniowej poszukuje się takiej linii prostej, której równanie będzie jak najlepiej dopasowane do danych pomiarowych według określonego kryterium. Jeśli niepewności  $u(y_i)$  punktów nie są znane, to przyjmuje się, że są one jednakowe i stosuje się najprostsz wariant metody regresji liniowej o kryterium: minimum sumy kwadratów odległości punktów od prostej OLS (ang. *Ordinary Least Squares*).

Jeśli niepewności  $u(y_i)$  pomiarów rzędnych  $y_i$  punktów nie są jednakowe, to stosuje się metodę regresji o kryterium z wagami WLS (ang. *Weighted Least Squares*) [4]. Wyznacza się też pasma niepewności standardowej i rozszerzonej.

Wartości  $y_i$  każdego punktu o znanej odciętej  $x_i$  mierzy się wielokrotnie gdy podlegają one rozrzutowi. Otrzymuje się próbkę o wartościach  $y_i, \dots, y_{ni}$ . Dla znanego ich rozkładu, lub przyjmując rozkład normalny, oblicza się wartość średnią  $\bar{y}_i$  jako estymatę  $y_i$  i jej standardowe odchylenie  $u_A(y_i)$  jako niepewność typu A. Z macierzy kowariancji wyznacza się wpływ autokorelacji bądź stosuje efektywną liczbę pomiarów  $n_{eff}$  [4, 7–10]. Dalej postępuje się jak w punkcie 1.

Losowe rozrzuty wyników pomiarów występują dla obu współrzędnych  $(x_i, y_i)$ . Wówczas można wyznaczyć prostą regresji dla minimum sumy znormalizowanych kwadratów odległości punktów od prostej zarówno w kierunku OY jaki w kierunku do niej prostopadłym [11].

Według zaleceń Przewodnika GUM [5], w oszacowaniu dokładności wyniku każdej wielkości mierzonej należy uwzględnić estymowaną heurystycznie niepewność typu B. W literaturze o regresji liniowej nie natrafiono jednak na opis wpływu  $u_B$  w pomiarach  $y$ , lub  $y$  i  $x$ . Ten brak będzie uzupełniony w niniejszym cyklu prac. Niepewności  $u_B$  szacuje się dla warunków

dopuszczalnych dla pracy badanego obiektu i dla aparatury pomiarowej stosowanej w eksperymencie, lub też dla warunków przewidywanych w okresie dalszego jej stosowania. Niepewności składowe  $u_{Ai}$  i  $u_{Bi}$  sumuje się geometrycznie według wzoru (1) i otrzymuje się niepewność złożoną  $u_r$ . Wówczas dla znanego jej rozkładu, lub metodą Monte Carlo według załącznika 1 do Przewodnika GUM [5], należy wyznaczyć funkcję niepewności rozszerzonej  $\pm U_y = f(x)$  lub  $\pm U_y = f(y)$  o wymaganym prawdopodobieństwie, np. 95%. Są to granice pasma niepewności wokół prostej regresji.

W technice pomiarowej regresję liniową stosuje się m.in. w monitoringu stanu technicznego urządzeń, w statystycznej kontroli jakości produkcji i w kontroli usług metrologicznych, w tym do porównywania wyników badań upoważnionych laboratoriów i w kalibracji przyrządów. Jeśli charakterystyka badanego przyrządu, przetwornika lub innego urządzenia pomiarowego jest znana jako znamionowa lub otrzymana z wyników wzorcowania, to bada się wtedy tylko poprawność i niepewność pomiarów oraz statystykę sygnałów w rzeczywistych warunkach pracy.

### 3. Kryteria stosowane w regresji liniowej

Metoda regresji liniowej wynika z maksymalizacji funkcji wiarygodności [4]. Parametry funkcji liniowej dopasowuje się do wartości współrzędnych  $(x_i, y_i)$   $n$  punktów mierzonych jako zmiennych losowych  $Y$  i  $X$  tak, aby dla określonych i niezależnych rozkładów ich prawdopodobieństwa  $p_i(y)$ , funkcja parametrów  $P(p_1, \dots, p_n)$  osiągnęła maksimum. Dla linii prostej  $y = ax + b$  otrzymuje się:

$$P = \prod_{i=1}^n p_i[y_i - y(x_i; a, b)] \rightarrow \max \quad (2)$$

Maksimum to wystąpi dla warunku minimalizacji funkcji kryterialnej  $SK(a, b)$

$$SK(a, b) = -\ln P = \sum_{i=1}^n \{-\ln p_i[y_i - y(x_i; a, b)]\} \rightarrow \min \quad (2a)$$

Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego o odchyleniu standardowym  $\sigma_i$  opisuje wzór:

$$p_i(y) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[y_i - y(x_i)]^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (2b)$$

Z (2a, b) wynika kryterium najmniejszych kwadratów z wagami WLS (ang. *Weight Last Squares*):

$$SK(a, b) = \sum_{i=1}^n w_i [y_i - y(x_i; a, b)]^2 \rightarrow \min \quad (3)$$

gdzie:  $w_i \equiv \frac{1}{\sigma_i^2} \equiv \frac{1}{u_i^2}$ ;  $w_i = \frac{1}{\delta_i^2 y_i^2}$  – wagi dla niepewności bezwzględnych  $u_i$  i względnych  $\delta_i$ .

W wielu pomiarach wartości  $x_i$  zmiennej  $X$  są zdeterminowane, a ich niepewności pomijalnie małe i wtedy dla każdego  $x_i$  mierzy się tylko  $y_i$ . Kryterium (3) dotyczy wtedy odległości  $\Delta y = (y_i - y)$  punktu od prostej w kierunku  $0Y$ . Niepewności  $u(y_i)$  są znane z pomiarów  $y_i$ , albo można założyć, że są one jednakowe, tj. wagi  $w_i = 1$  i kryterium regresji (3) upraszcza się do minimum najmniejszych kwadratów bez wag OLS (ang. *Ordinary Least Squares*).

W ogólnym przypadku skorelowanych wartościach zmiennej  $Y$  (lub/i  $X$ ) kryterium GLS (ang. *Generalized Least Squares*) stosuje się propagacją macierzy kowariancji.

### 4. Regresja liniowa zmiennej $Y$ z uwzględnieniem niepewności pomiarów typu B

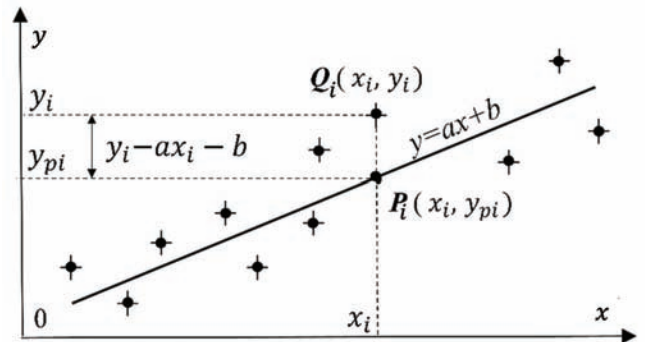
Nawet w najnowszych publikacjach [13, 14] o szacowaniu dokładności pomiarów nie natrafiono na uwzględnianie niepewności typu B w szacowaniu dokładności pomiarów metodą regresji liniowej. W pracy przedstawia się taką propozycję nawiązującą do przepisów Przewodnika GUM. Omówi się wyznaczanie parametrów i pasma niepewności prostej regresji dla nieskorelowanych wartości  $y_i$  otrzymanych z pomiarów rzędnych  $n$  punktów. Na rysunku 1 podano prostą

$$y = ax + b \quad (4)$$

wyznaczaną metodą regresji liniowej dla wartości współrzędnych  $(x_i, y_i)$  punktów  $Q_i$ . Punkty te znajdują się w odległościach  $\Delta y = y_i - y_{pi}$  w kierunku  $0Y$  od punktów  $P(x_i, y_{pi})$  na prostej. Parametry  $a$  i  $b$  w równaniu (4) tej prostej oraz przebieg granic jej pasma niepewności otrzymuje się dla minimum sumy kwadratów odległości  $(y_i - y_{pi})^2$   $n$  mierzonych punktów  $Q_i$ , znormalizowanej do kwadratu niepewności standardowej  $u(y_i) \equiv u_i$  dla każdego z nich, czyli:

$$SK = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{u_i^2} \rightarrow \min \quad (5)$$

Wzory spełniające ten warunek stają się prostsze po wprowadzeniu parametrów pomocniczych:



Rys. 1. Ilustracja odległości mierzonego punktu  $Q_i$  od punktu  $P_i$  na prostej regresji  $y = ax + b$  w modelu o niepewnościach tylko dla pomiarów rzędnej jako zmiennej losowej  $Y$

Fig. 1. Illustration of the distance between measured point  $Q_i$  and point  $P_i$  on the regression straight-line  $y = ax + b$  in a model with uncertainties for the abscissa measured only as a random variable  $Y$

$$S = \sum_{i=1}^n u_i^{-2} \quad (6a)$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_i u_i^{-2} \quad (6b)$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 u_i^{-2} \quad (6c)$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i u_i^{-2} \quad (6d)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n y_i u_i^{-2} \quad (6e)$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 u_i^{-2} \quad (6f)$$

Po zastosowaniu wzorów (6a–f) równanie (5) przekształca się do postaci:

$$SK = a^2 S_{xx} + 2ab S_x - 2a S_{xy} + b^2 S_y - 2b S_y + S_{yy} \quad (7)$$

Minimum wyrażenia (7) występuje dla  $\frac{\partial SK}{\partial a} = 0$ ,  $\frac{\partial SK}{\partial b} = 0$ . Stąd wynika układ dwu równań

$$\begin{cases} a S_{xx} + b S_x = S_{xy} \\ a S_x + b S_y = S_y \end{cases} \quad (8a, b)$$

o rozwiązaniach:

$$a = \frac{S S_{xy} - S_x S_{yy}}{S S_{xx} - S_x^2} \equiv \frac{\Delta_a}{\Delta} \quad (9a)$$

$$b = \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{S S_{xx} - S_x^2} \equiv \frac{\Delta_b}{\Delta} \quad (9b)$$

gdzie:

$$\Delta a = \sum_{i=1}^n u_i^{-2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i u_i^{-2} - \sum_{i=1}^n x_i u_i^{-2} \cdot \sum_{i=1}^n y_i u_i^{-2} \quad (9c)$$

$$\Delta b = \sum_{i=1}^n y_i u_i^{-2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 u_i^{-2} - \sum_{i=1}^n x_i u_i^{-2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i u_i^{-2} \quad (9d)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n u_i^{-2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 u_i^{-2} - \left[ \sum_{i=1}^n x_i u_i^{-2} \right]^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2 u_i^{-2} u_j^{-2} \quad (9e)$$

Zależności (9a–e) umożliwiają też wyznaczenie wartości  $a$  i  $b$  z danych pomiarowych. Jeśli niepewności  $u_i \equiv u$  są jednakowe, to zostaną uproszczone we wzorach (9a, b) nawet gdy nie są znane. Otrzyma się jednakowe parametry  $a$  i  $b$  prostej regresji dla różnych wartości  $u$  (rozdziały 5 i 6).

Ze wzorów (7) i (9a–e) wynika też, że minimum funkcji  $SK$  wynosi:

$$SK_{\min} = -a S_{xy} - b S_y + S_{yy} \quad (10)$$

Pasmo niepewności prostej regresji rozciąga się po obu jej stronach. Wyznacza się je z niepewności  $u_a$  jej współczynnika kierunkowego  $a$  i niepewności  $u_b$  wyrazu wolnego  $b$ . Trzeba też uwzględnić, że parametry  $a$  i  $b$  są skorelowane.

Pochodne cząstkowe parametrów  $a$  i  $b$  prostej regresji dla  $i = 1, \dots, n$  wynoszą:

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} \equiv a_i = \frac{1}{u_i^2} \frac{S x_i - S_x}{\Delta}, \quad (11a)$$

$$\frac{\partial b}{\partial y_i} \equiv b_i = \frac{1}{u_i^2} \frac{S_{xx} - S_x x_i}{\Delta}, \quad (11b)$$

Macierz czułości  $AB$  i macierz kowariancji  $U_Y$  dla mierzonych  $y$ ,  $n$  punktów  $Q_i$  są następujące:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix} \quad (12a)$$

$$U_Y = \begin{bmatrix} u_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & u_n^2 \end{bmatrix} \quad (12b)$$

Macierz kowariancji  $U_Y$  ma na głównej przekątnej wariancje. Ta praca dotyczy przypadków o niezależnych statystycznie odchyleniach  $\Delta y_i$  zmiennej  $Y$  punktów mierzonych. Wówczas dla nieskorelowanych współrzędnych punktów  $y_i$  jej elementy niediagonalne, jako kowariancyjne, są równe zero. Macierz kowariancji  $U_{ab}$  parametrów  $a$  i  $b$  wynika z równania propagacji wariancji:

$$U_{ab} = AB U_Y AB^T = \begin{bmatrix} u_a^2 & \rho_{ab} u_a u_b \\ \rho_{ab} u_a u_b & u_b^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

gdzie:  $u_a$ ,  $u_b$ ,  $\rho_{ab}$  – niepewności i współczynnik korelacji parametrów  $a$  i  $b$  prostej.

Po rozwiązaniu (13), dla nieskorelowanych wartości zmiennych  $y_i$  otrzymuje się:

$$u_a^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 u_i^2 = \frac{S}{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i^{-2}}{\Delta} \quad (14a)$$

$$u_b^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2 u_i^2 = \frac{S_{xx}}{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 u_i^{-2}}{\Delta} \quad (14b)$$

$$\rho_{ab} u_a u_b = \sum_{i=1}^n a_i b_i u_i^2 = \frac{-S_x}{\Delta} = \frac{-\sum_{i=1}^n x_i u_i^{-2}}{\Delta} \quad (14c)$$

Z (14c) wynika współczynnik korelacji parametrów  $a$  i  $b$

$$\rho_{ab} = -\frac{S_x}{\sqrt{S \cdot S_{xx}}} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i^{-2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^{-2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 u_i^{-2}}} \quad (15)$$

dla  $x_i > 0$  (gdzie  $i = 1, \dots, n$ ) jest on ujemny.

Niepewność standardową  $u_{ab}$  zmiennej  $Y$  dla prostej regresji  $y = ax + b$  wyznacza się jako funkcję  $x$  z równania propagacji niepewności z uwzględnieniem skorelowania parametrów  $a$  i  $b$ :

$$u_{ab}^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a^2 & \rho_{ab} u_a u_b \\ \rho_{ab} u_a u_b & u_b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial a} \\ \frac{\partial y}{\partial b} \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

Po wstawieniu pochodnych  $\frac{\partial y}{\partial a} = x$ ,  $\frac{\partial y}{\partial b} = 1$  i przekształceniu otrzymuje się:

$$u_{ab}^2 = x^2 u_a^2 + 2x \rho_{ab} u_a u_b + u_b^2 \quad (17)$$

Wyrażając wariancję  $u_{ab}^2$  przez parametry pomocnicze z (6a,b) i (9e) otrzymuje się:

$$u_{ab}^2 = \frac{S x^2 - 2 S_x x + S_{xx}}{S \cdot S_{xx} - S_x^2} = \frac{1}{S} + \frac{S}{\Delta} \left( x - \frac{S_x}{S} \right)^2 \quad (18)$$

Dla wariancji  $u_{ab}^2$  jest to równanie paraboli drugiego stopnia o osi symetrii

$$x_{\min} = -\frac{S_x}{S} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i^{-2}}{\sum_{i=1}^n u_i^{-2}}, \quad \text{o minimum } u_{ab}^2 \Big|_{\min} = \frac{1}{S} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n u_i^{-2}}$$

i współczynnika  $\frac{S_x}{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i^{-2}}{\Delta}$  przy  $x^2$ . Natomiast niepewność

$$u_{ab}$$
 opisana jest hiperbolą o równaniu  $S u_{ab}^2 - \frac{S^2}{\Delta} \left( x - \frac{S_x}{S} \right)^2 = 1$ .



Po podstawieniu do wzoru (18) wyrażeń  $S$  i  $S_x$  z (6a,b) otrzymuje się bezpośrednią zależność wariancji  $u_{ab}^2$  od parametrów mierzonych punktów

$$u_{ab}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x - x_i)^2 u_i^{-2}}{\Delta} \quad (19)$$

Wzory (14)–(19) można stosować do wszystkich rodzajów niepewności typu A.

Z równań (18) i (19) wynikają następujące wnioski:

- ze wzrostem liczby mierzonych punktów  $Q_i$  i dowolnej ich niepewności  $u_{n+i}$  zwiększa się wartość parametru  $S$  i zęża się pasmo niepewności typu A, gdyż maleje  $u_{ab} \Big|_{\min} = 1/\sqrt{S}$ ;
- zmniejszenie niepewności mierzonych punktów również zwiększa wartość  $S$ ;
- współczynnik  $S/\Delta$  przy  $x^2$  paraboli (18) maleje przy zmniejszaniu się niepewności punktów pomiarowych i wroście ich liczby, więc jej ramiona zbliżają się do prostej regresji.

Metodą regresji poszukuje się linii prostej  $y = ax + b$ , jako modelu matematycznego dostosowanego do wartości współrzędnych  $n$  mierzonych punktów  $(x_i, y_i)$ . W tej pracy analizuje się przypadki, gdy mierzy się tylko ich rzędne  $y_i$  z niepewnościami typu A oznaczonymi jako  $u_{A_i}$ , a ich odcięte  $x_i$  są znane. Parametry  $a, b$  wyznacza się ze wzorów (9a,b), a ich niepewności typu A – z (14a,b,c). Miarą dokładności punktów tej prostej jest leżący po obu jej stronach obszar nazwany pasmem lub korytarem [4] niepewności rozszerzonej o wysokości  $2U_y$  w kierunku osi  $OY$ . Jego granice są równaniami opisanymi w funkcji  $x$  jako  $y_U = ax + b \pm U_y$ . Wyznacza się je z pasma niepewności złożonej  $u_y(y)$ , które jest sumą geometryczną pasma niepewności typu A otrzymanej z pomiarów  $n$  punktów i oznaczonej jako  $U_{A_{ab}}$  oraz pasma szacowanej heurystycznie niepewności typu B:

$$u(y) = \sqrt{u_{A_{ab}}^2 + u_{B_y}^2} \quad (20)$$

Dla liczby punktów pomiarowych  $n > 30$  stosuje się rozkład Gaussa i  $u_{A_{ab}} = u_{ab}$  według wzoru (18) lub (19), a przy mniejszej liczbie  $n$  – rozkład Studenta. W propozycji do nowego Przewodnika GUM 2 opartej na podejściu według Bayesa [13, 8 str.199] podano przybliżony wzór:

$$u_{A_{ab}}^2 = \frac{n-1}{n-3} u_{ab}^2 \quad (20a)$$

Pasma niepewności można przedstawiać zarówno w funkcji mierzonej zmiennej  $y$ , jak i przeliczyć na funkcję zmiennej  $x$  lub odwrotnie. Przelicza się za pomocą wyznaczonego z pomiarów

równania prostej  $x = \frac{y-b}{a}$ . Zaś niepewność  $u_{B_x}$ , jak już wspo-

mniano, szacuje się z wartości maksymalnego dopuszczalnego błędu  $E_{\max}$  zastosowanego miernika. Z wartości  $u(y)$  wyznacza się niepewność rozszerzoną  $U_p(y)$  o wymaganym poziomie ufności, np. o współczynniku rozszerzenia  $k_{0,95}$ . Jedyne w szczególnym przypadku, gdy punkty pomiarowe mierzy się różnymi miernikami lub w różnych warunkach i w różnym czasie (np. badania klimatu), to z wielokrotnych pomiarów dla każdego punktu  $P_i$  wyznacza się zarówno estymator  $y_{p_i}$  jako wartość średnią  $y_{p_{ij}}(x_i)$ , jak i jej odchylenie standardowe jako niepewność  $u_{A_{p_i}}$ . Niepewność złożoną  $u_i$  punktu  $(x_i, y_i)$  liczy się z uwzględnieniem niepewności typu B ze wzoru:

$$u_{y_i} = \sqrt{u_{A_i}^2 + u_{B_i}^2} \quad (20b)$$

Podstawowe rodzaje eksperymentów pomiarowych opisywanych równaniem prostej to:

1. Pomiary wszystkich punktów wykonuje się miernikiem tak dokładnym, że jego niepewność typu B jest pomijalnie mała i wówczas niepewność rozszerzoną opisuje wzór:

$$U_y(x) = U_{y_A}(x) = k_{0,95} u_{ab}(x) = t_{0,95, n-2} u_{ab}(x), \quad (21)$$

w którym  $(n-2)$  jest efektywną liczbą stopni swobody dla  $n$  punktów pomiarowych.

2. Zwykle niepewność typu B nie jest pomijalna i gdy wszystkie pomiary wykonuje się tym samym miernikiem, to wzrasta ona liniowo według zależności  $u_{B_y}(y) = u_{B_0} + k_B y$  wynikającej z jego maksymalnego dopuszczalnego błędu  $E_{\max}$ . Z sumy geometrycznej niepewności typu A prostej, tj.  $u_{A_{ab}}(x)$  i niepewności typu B miernika  $u_{B_y}(y)$  wyznacza się dla prostej niepewność złożoną  $u_y(y)$  i z niej pasmo niepewności rozszerzonej  $U_y(y)$  w funkcji zmiennej  $x$  ze wzorów

$$U_y(x) = k_{0,95} \sqrt{u_{A_{aby}}^2(x) + u_{B_y}^2(ax+b)} \quad (21a)$$

$$U_y(y) = k_{0,95} \sqrt{u_{A_{aby}}^2\left(\frac{y-b}{a}\right) + u_{B_y}^2(y)} \quad (21b)$$

Współczynnik rozszerzenia  $k_{0,95}$  dla splotu różnych rozkładów o niepewnościach typu A i typu B, np.  $t$ -Studenta z Gaussem lub prostokątnym, wyznacza się metodą Monte Carlo. Można też przyjąć, że  $k_{0,95} \leq t_{0,95, n-2}$ , gdyż współczynnik  $k_p$  rozkładu prostokątnego jest mniejszy od 2.

3. W rzadkich przypadkach współrzędne  $y_i$  niektórych lub wszystkich punktów pomiarowych mierzy się różnymi miernikami lub/i w różnych warunkach wpływających. Wtedy kolejność operacji numerycznych przy wyznaczaniu niepewności rozszerzonej jest następująca:

$$u_i = \sqrt{u_{A_i}^2 + u_{B_i}^2} \text{ dla } i = 1, \dots, n; \quad u_{ab}(x) = u_{ab}(u_i(x));$$

$$U_y(x) = t_{0,95, n-2} u_{ab}(x) \quad (21c)$$

Czyli liczy się osobno niepewności złożone  $u_i(y_i)$  każdego punktu  $Q_i(y_i, x_i)$  jako sumy geometrycznej  $u_{A_i}(y_i)$  i  $u_{B_i}(y_i)$ , z nich wyznacza się niepewność  $u_{ab}(x)$  i pasmo  $U_y$  prostej regresji. Wyniki wg (21b) i (21c) mogą się nieco różnić nawet dla wszystkich jednakowych niepewności punktów  $u_{A_i}$ . W obu tych przypadkach równanie prostej wyznacza się tak samo i z tych samych wartości  $y_i(x)$  i  $u_{A_i}(x)$ . Jedyne przy specjalnym wymaganiu, np. by charakterystyka miernika była uśredniona w całym długim okresie trwania eksperymentu, do wyznaczenia równania prostej regresji zastosować można niepewności złożone  $u_i(x)$ , a więc z udziałem niepewności  $u_{B_i}$  punktów mierzonych.

Wynik końcowy podaje się w postaci równania prostej z pasmem niepewności  $U_y$ :

$$y = ax + b \pm U_y(x) \quad (22)$$

## 5. Przykłady symulacji numerycznych

Poznanie specyfiki regresji liniowej uwzględniającej niepewności pomiarów typu B ułatwi kilka symulowanych przykładów numerycznych. Wykonana się je dla jednakowego zbioru mierzonych punktów, ale o czterech różnych zbiorach niepewności

typu A dla pomiarów ich rzędnych  $y_i$  i przyjętej jednakowej liniowej zależności dla niepewności typu B zmiennej  $y$ .

Wpływ niepewności  $u_{iA}$  pomiarów punktów  $Q_i$  i niepewności  $u_{iB}$  miernika na parametry i przebieg pasma niepewności prostej  $y = ax + b$  wyznaczonej metodą regresji będzie zilustrowany przykładami. W tabeli 1 podano współrzędne  $(x_i, y_i)$  dziesięciu mierzonych punktów  $Q_i$  o wartościach  $x_i$  i  $y_i$  jednakowych oraz o różnych ich niepewnościach  $u_{Ai}$ . Są to symulowane dane pomiarowe czterech eksperymentów I–IV. Dla określonych współrzędnych  $x_i$  punktów pomiarowych, uzyskano wartości  $y_i(x_i)$  o niepewnościach  $u_{Ai}$ . Zakłada się też, że gdy pomiary  $y_i$  każdego punktu wykonuje się wielokrotnie, to otrzyma się wyniki o rozkładzie normalnym, a ich wartości średnie i standardowe odchylenia są estymatorami wartości  $y_i$  i niepewności  $u_{Ai}(y_i)$ . Aby porównywać wyniki, przyjęto dopuszczalne uproszczenie, że w każdym z eksperymentów mierzy się tym samym miernikiem i że w czterech eksperymentach otrzymuje się jednakoze zbiory współrzędnych  $y_i(x_i)$ , chociaż w rzeczywistych pomiarach mogą się one nieco różnić.

W eksperymencie I bezwzględne niepewności typu A wszystkich punktów mierzonych są jednakowe, a w eksperymencie IV – pomijalne.

W eksperymencie III niepewności punktów  $u_{Ai}$  są podwójnymi wartościami z eksperymentu II. Przyjmuje się, że niepewność typu B pomiarów miernikami cyfrowymi jest odchyleniem standardowym rozkładu równomierne o szerokości dwu ich dopuszczalnych maksymalnych błędów  $E_{max}$  i wzrasta liniowo z mierzoną wartością  $y$ . Podobną zależność niepewności typu B można też przyjmując jako wypadkową dla wielu różnych prostych i zobudowanych systemów pomiarowych. W przykładzie założono, że dla czterech zestawów danych z tabeli 1a zależność niepewności  $u_B$  jest jednakowa i opisana  $y_m$  równaniem:  $u_{By}(y) = 0,02(1 + y)$ .

Metodą regresji liniowej wyznaczono parametry  $a, b$  prostych opisane wzorami (14a,b,c). Są one jednakowe dla par danych I i IV oraz II i III z tabeli 1a. Przyjęto, że niepewności  $u_A$  prostych wyznacza się dla danych o rozkładzie Studenta i współczynniku rozszerzenia  $k_{0,95} = t_{0,95, n-2}$ . Dla  $n = 10$  mierzonych punktów  $k_{0,95} = 2,31$ . Wartości liczbowe niepewności  $u_{Aab}$  otrzymano ze wzoru (18), zaś  $u_B(y)$  – z maksymalnego dopuszczalnego błędu  $E_{max}$ . Dane pomiarowe i wyniki ich przetwarzania metodą regresji liniowej zawiera tabela 1a.

W tabeli 1b zestawiono otrzymane równania dla prostych regresji i ich niepewności rozszerzonych. Przebieg wspólnej dla danych I i IV takiej prostej z otaczającymi ją pasmami niepewności  $U_{Aab}, U_{0,95}$  i pasmem estymatora  $\hat{u}_A^2 = 1,084$  ze wzoru (30) dla danych I przedstawia rysunek 2a. Same jej pasma w funkcji  $x$  i  $y$  (dolna skala) podano na rysunkach 2b, a porównanie niepewności prostych dla wszystkich danych I i IV wraz z niepewnością typu B na rysunku 3.

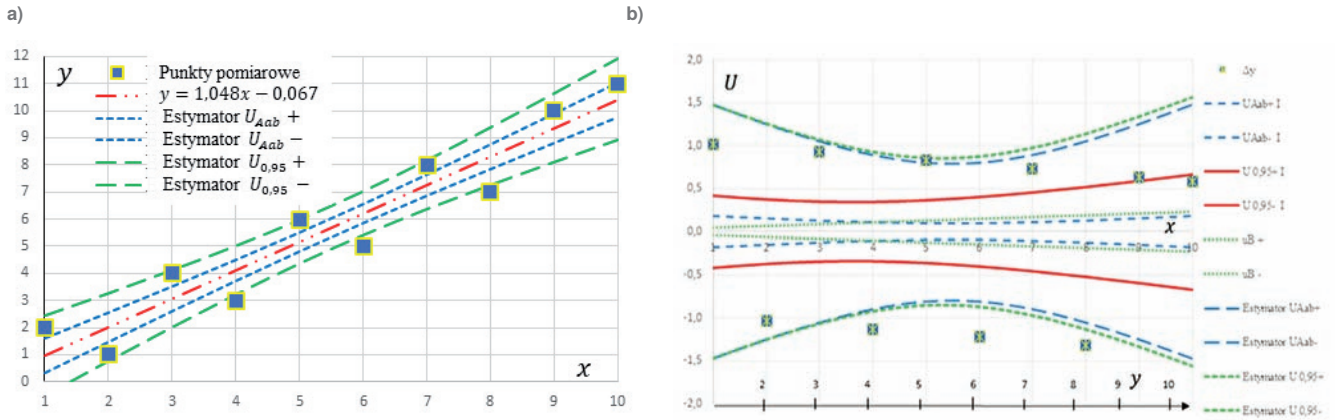
Z danych w tabelach 1, 1a i rysunków 2 i 3 wynika kilka wniosków szczegółowych:

- niepewność typu B jako charakterystyka w postaci prostej sumuje się geometrycznie z wyznaczoną z pomiarów charakterystyką  $u_{Aab}(y)$  niepewności typu A prostej regresji;
- dla określonego zbioru współrzędnych mierzonych punktów o jednakowych typu A niepewnościach  $u_{Ai} = u_A$ , znanych lub nieznanach i z użyciem estymatora wg wzoru (30), metodą regresji liniowej otrzymuje się to samo równanie linii prostej, np. dla danych I i IV. Szerokość jej pasm niepewności typu A ma minimum w środkowej części zakresu, rośnie wraz ze znaną jednakową niepewnością punktów i jest najszersze dla nieznannej jednakowej niepewności.
- dla proporcjonalnej zmiany dowolnych wartości niepewności typu A wszystkich punktów (np. dane III są podwojeniem danych II), równanie prostej nie ulega zmianie;

**Tabela 1a. Parametry i pasma niepewności rozszerzonej  $U_{0,95}$  prostych regresji  $y = ax + b$  dla 4-krotnych pomiarów  $y_i$  punktów  $x_i$  z różnymi niepewnościami  $u_{Ai}$  i liniowej niepewności  $u_{Bi}(y) = 0,02(1 + y)$**

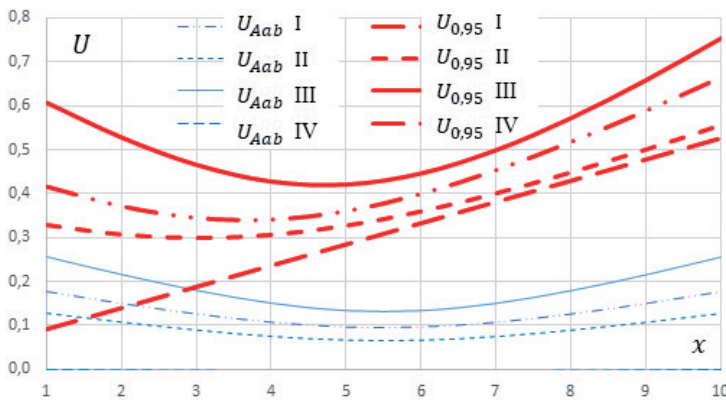
**Table 1a. Parameters and the extended uncertainty  $U_{0,95}$  bands of regression straight line  $y = ax + b$  for measurements of  $y_i$  of  $x_i$  points with four sets of uncertainties  $u_{Ai}$  and linear uncertainty  $u_{Bi}(y) = 0.02(1 + y)$**

Punkty i ich niepewności				Parametry $a, b$ i przebiegi prostych oraz ich pasm niepewności $u_{Aab}$ i $U_{0,95}$													
$x_i$	$y_i$	$u_B(x) = 0,02(1 + y)$			$u_B(x) = 0,02(1 + ax + b)$												
		$u_{Ai}(y_i)$			I $a = 1,049$ $b = -0,067$			II $a = 1,038$ $b = -0,389$			III $a = 1,038$ $b = -0,389$			IV $u_A \rightarrow 0$ $a = 1,049, b = -0,067$			
		I	II	III	$y(x_i)$	$u_{Aab}$	$U_{0,95}$	$y(x_i)$	$u_{Aab}$	$U_{0,95}$	$y(x_i)$	$u_{Aab}$	$U_{0,95}$	$u_{Bi}(y_i)$	$u_{Aab}$	$U_{0,95}$	
1	2,00	0,30	0,25	0,50	0,982	0,176	0,417	2,077	0,128	0,305	0,648	0,256	0,595	0		0,091	
2	1,00		0,20	0,40	2,030	0,150	0,372	2,868	0,108	0,278	1,686	0,215	0,512			0,10	0,140
3	4,00		0,25	0,50	3,079	0,126	0,346	3,659	0,089	0,268	2,723	0,179	0,447			0,25	0,188
4	3,00		0,15	0,30	4,127	0,107	0,342	4,451	0,075	0,279	3,761	0,150	0,409			0,20	0,236
5	6,00		0,25	0,50	5,176	0,096	0,361	5,242	0,066	0,308	4,798	0,133	0,407			0,35	0,285
6	5,00		0,20	0,40	6,224	0,096	0,400	6,033	0,066	0,350	5,836	0,133	0,439			0,30	0,333
7	8,00		0,25	0,50	7,273	0,107	0,454	6,824	0,075	0,402	6,873	0,150	0,501			0,45	0,382
8	7,00		0,15	0,30	8,321	0,126	0,519	7,616	0,089	0,460	7,911	0,179	0,582			0,40	0,430
9	10,00		0,25	0,50	9,370	0,150	0,590	8,407	0,107	0,521	8,948	0,215	0,675			0,55	0,478
10	11,00		0,25	0,50	10,418	0,176	0,665	9,198	0,128	0,586	9,986	0,255	0,777			0,60	0,527



Rys. 2. a) Prosta regresji I z pasmami niepewności  $\pm u_{Aab}(x)$  i niepewności rozszerzonej  $\pm U_{0,95}(x)$  dla danych I z tabeli 1a,  $u_{Ay} = 0,3$ ,  $u_{By} = 0,02(1 + y)$  i dla estymatora ze wzoru (30); b) Pasma niepewności prostej I w funkcji  $x$  lub  $y$  (skala na dole), jej niepewności  $\pm u_B(x)$  i odległości  $\Delta y$  mierzonych punktów

Fig. 2. a) Regression straight-line with bands of type A uncertainties  $\pm u_{Aab}(x)$  and extended uncertainties  $\pm U_{0,95}(x)$  for data I from Table 1a and estimator of eq. (30); b) Uncertainty bands of the regression straight-line I as function of  $x$  or  $y$  (bottom scale), its uncertainty  $\pm u_B(x)$  and distance  $\Delta y$  of the measured points



Rys. 3. Niepewności  $U_{Aab,0,95}$  i  $U_{0,95}$  dwu prostych regresji dla danych I, IV i II, III z tabeli 1a, ich niepewność typu B z (21a) w funkcji  $x$

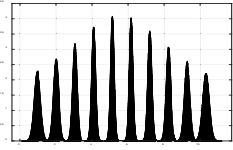
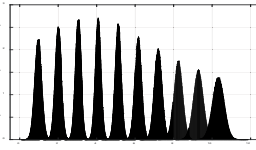
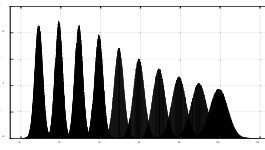
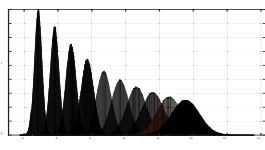
Fig. 3. Uncertainties  $U_{Aab,0,95}$  and  $U_{0,95}$  of two regression straight-lines for data I, IV and II, III from Table 1a and their uncertainty type B from (21a) as function of  $x$

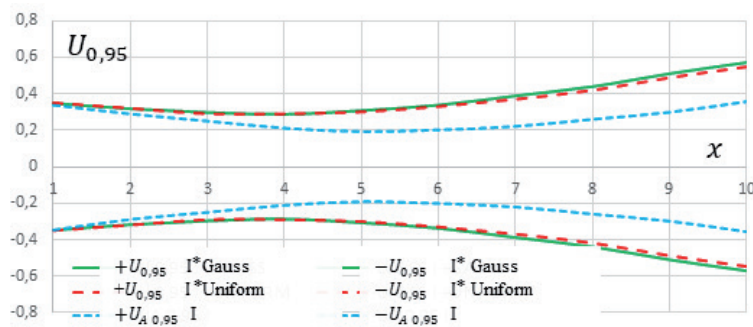
Tabela 1b. Równania prostych oraz ich pasm niepewności typu A  $u_{Aab}$  i niepewności rozszerzonych  $U_{0,95}$   
 Table 1b. Straight lines equations and their bands of type A uncertainties  $u_{Aab}$  and of the extended uncertainties  $U_{0,95}$

Nr	Równania prostych	Wariancje ich niepewności	Niepewności $u_a$ , $u_b$ i $\rho_{ab}$
I	$y = 1,048x - 0,067$	$U_{Aab}^2(x) = \frac{0,11x^2 - 1,2x + 4,2}{100}$	$u_a = 0,033$ $u_b = 0,205$ $\rho_{ab} = -0,89$
		$U_{0,95}^2(x) = \frac{0,82x^2 - 5,99x + 22,6}{100}$	
II	$y = 1,038x - 0,389$	$U_{Aab}^2(x) = \frac{0,06x^2 - 0,66x + 2,24}{100}$	$u_a = 0,024$ $u_b = 0,15$ $\rho_{ab} = -0,95$
		$U_{0,95}^2(x) = \frac{0,23x^2 - 3,23x + 12,01}{100}$	
III	$y = 1,038x - 0,389$	$U_{Aab}^2(x) = \frac{0,24x^2 - 3,23x + 8,95}{100}$	$u_a = 0,049$ $u_b = 0,3$ $\rho_{ab} = -0,9$
		$U_{0,95}^2(x) = \frac{1,5x^2 - 13,77x + 47,82}{100}$	
IV	$y = 1,048x - 0,067$	$U_{Aab}^2(x) = 0$	$u_a = 0$ $u_b = 0$ $\rho_{ab} = -0,89$
		$U_{0,95}^2(x) = \frac{0,23x^2 - 0,42x + 0,19}{100}$	

**Tabela 2. Rozkłady odchyłeń  $y$  od punktów  $(x, y)$  na prostej regresji I dla splotu rozkładu Gaussa o niepewności typu A z Gaussem lub równomiernym dla niepewności typu B**

Table 2. Pdf of  $y$  from points  $(x, y)$  on the regression straight line I formed at Gaussian distribution convolution for type A uncertainty with Gaussian or uniform of type B uncertainty

Rozkłady Gaussa dla odchyłeń o niepewności $u_{Aab}$	Rozkłady odchyłeń $y$ w paśmie niepewności $U_{0,95}$ dla punktu prostej regresji o współrzędnej $x$		
	Sploty rozkładów Gaussa o niepewnościach $u_{Aab}$ i $u_B(y) = 0,02(1 + y)$	Sploty rozkładu Gaussa i równomiernego o niepewnościach $u_{Aab}$ i $u_B(y) = 0,02(1 + y)$	Sploty rozkładu Gaussa i równomiernego o niepewnościach $u_{Aab}$ i $u_B(y) = 0,04(1 + y)$
			



**Rys. 4. Pasma niepewności  $\pm U_{0,95}$  dla odchyłeń  $\Delta y$  od prostej regresji I powstałych przy splotu (\*) rozkładu Gaussa o niepewności  $u_A$  z rozkładem Gaussa lub równomiernym o dwóch różnych niepewnościach  $u_B$**

Fig. 4. Uncertainty bands  $\pm U_{0,95}$  for deviations  $\Delta y$  from the regression straight-line I, obtained as the convolution (\*) of Gaussian PDF of uncertainty  $u_A$  with Gaussian or uniform PDF of two different uncertainties  $u_B$

– niepewności typu B dla pomiarów tym samym przyrządem przyjmuje się jako standardowe odchylenia rozkładu równomiernego o szerokości dwu jego maksymalnych dopuszczalnych błędów  $E_{\max}(y)$ , wzrastających liniowo wraz z wartością wielkości mierzonej  $y$ . Dlatego też szerokość pasma niepewności rozszerzonej  $U_{0,95}$  prostej regresji też wzrasta z  $y$  i  $x$ .

Rozkłady prawdopodobieństwa dla odchyłeń współrzędnej  $y$  od jej wartości na prostej regresji zmieniają się wraz z szerokością pasma jej niepewności rozszerzonej (tab. 2, rys. 4). Zależą też od tego, z jakim rozkładem odchyłeń o niepewności typu B splata się sumowany z nim geometrycznie rozkład Gaussa odchyłeń typu A od prostej. Rozkład odchyłeń o niepewności typu B wynika z dopuszczalnego błędu  $E_{\max}$  przyrządu. Przyjmuje się go heurystycznie jako równomierny w stałych warunkach wpływających, lub jako normalny (Gaussa) dla zmiennych warunków o wielu zrandomizowanych wpływach. Dla splotu dwu rozkładów Gaussa współczynnik  $k_{0,95} = 2$ . Rozkłady i histogramy otrzymane metodą Monte Carlo dla danych I z tabeli 1a, podano w tabeli 2.

## 6. Prosta regresji dla pomiarów o jednakowej niepewności

W praktyce pomiarowej często poszukuje się prostej regresji dla pomiarów zmiennej  $Y$  z jednakowymi niepewnościami bez względnymi, gdy wartości  $X$  są znane. Omówi się to szczegółowo.

### 6.1. Wzory parametrów prostej dla punktów o jednakowej niepewności

W takich przypadkach metodą regresji liniowej dopasowuje się parametry prostej do wartości współrzędnych punktów pomia-

rowych o jednakowych niepewnościach znanych lub nawet nieznanymi. Jako kryterium (5) stosuje się minimum sumy kwadratów odległości punktów od prostej regresji w kierunku  $OY$ . Taką prostą i jej niepewność typu A można wyznaczyć dokonując obliczeń statystycznych za pomocą funkcji standardowych, np. REGLINP, dostępnych w arkuszach i skoroszytach programu EXCEL. Jednak funkcje te nie uwzględniają niepewności pomiarów typu B i ich wzory podstawowe wymagają uzupełnień.

Jednakowa niepewność  $u_i = \text{const} \equiv u$  współrzędnych  $y_i$ , jako szczególny przypadek regresji z wagami, skraca się w (9a, b) i otrzymuje się

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (23a)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (23b)$$

Wzory te jednoznacznie określają prostą regresji  $y = ax + b$  i uproszczą się jeszcze bardziej, gdy w ich opisie zastosuje się wartości średnie obu zmiennych  $X$  i  $Y$ , oznaczone następująco:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (24a)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (24b)$$

Współczynnik korelacji Pearsona  $\rho_{xy}$  dla tych zmiennych wynosi:



$$\rho_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (25)$$

Zaś parametry pomocnicze ze wzorów (6a-f) dla  $u_i = u$  będą następujące:

$$S = \frac{n}{u^2} \quad (25a)$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n\bar{x}}{u^2} \quad (25b)$$

$$S_{xx} = \frac{1}{u^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{u^2} (\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}^2) \quad (25c)$$

$$S_y = \frac{1}{u^2} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{n\bar{y}}{u^2} \quad (25d)$$

$$S_{xy} = \frac{1}{u^2} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \frac{1}{u^2} (\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) + n\bar{y}\bar{x}) \quad (25e)$$

$$S_{yy} = \frac{1}{u^2} \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{1}{u^2} (\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + n\bar{y}^2) \quad (25f)$$

Po zastosowaniu (25a-e) i wykorzystaniu proporcjonalności wyrażań

$$\sigma_x = c\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{i} \quad \sigma_y = c\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

estymujących odchylenia standardowe zmiennych  $X$  i  $Y$  oraz stałej proporcjonalności  $c$  (np.  $c = 1/\sqrt{n}$ ), otrzymuje się następujące parametry  $a$ ,  $b$  prostej regresji:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} = \frac{\sigma_y \rho_{xy}}{\sigma_x} \quad (26a)$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (26b)$$

Równanie prostej regresji dla użytych tu oznaczeń parametrów ma postać:

$$y - \bar{y} = \rho_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) \quad (27)$$

Średnie  $(\bar{x}, \bar{y})$  wyznaczają punkt na prostej regresji. Z (14a, b), (15), (23a) i (25a-c) wynikają wzory dla niepewności parametrów  $a$ ,  $b$  i ich współczynnik korelacji:

$$u_a^2 = \frac{u^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (28a)$$

$$u_b^2 = \frac{u^2}{n} + \frac{u^2 \bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (28b)$$

$$\rho_{ab} = - \left( 1 + \frac{\sigma_x^2}{\bar{x}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (28c)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (28d)$$

Współczynnik  $\rho_{ab}$  jest ujemny i zależy tylko od zmiennej  $x_i$ . Jest on tym bliższy  $-1$ , im  $\sigma_x^2 < \bar{x}^2$ , czyli dla punktów  $Q_i$  położonych blisko wartości średniej  $\bar{x}$ . Na płaszczyźnie parametrów  $ax$ ,  $b$  niepewności  $u_a$ ,  $u_b$  dla  $u_{ab} = \text{const}$  tworzą elipsę.

Tak więc dla jednakowej niepewności bezwzględnej  $u$  punktów pomiarowych, niepewności typu A punktów prostej regresji opisuje wzór

$$u_A^2(x) = u^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) \quad (29)$$

Z (22) i (29) wynikają granice pasma niepewności złożonej dla jednakowej niepewności bezwzględnej dla kwadratu  $u_A$  punktów. Przebiegają one hiperbolicznie i są symetryczne względem średniej  $\bar{x}$ . Dla punktu  $x = \bar{x}$  w środku zakresu  $X$ , niepewność

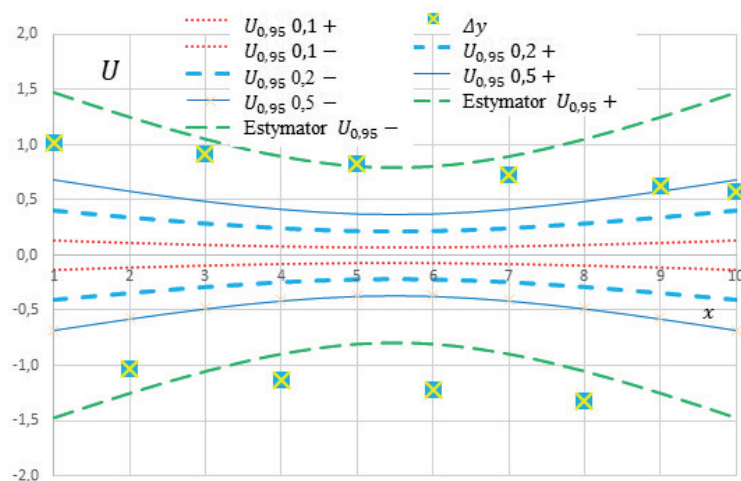
złożona ma wartość minimalną  $u_{c\min}^2 = \frac{u^2}{n}$ . Od tej wartości

pasma niepewności rozszerza się w obu kierunkach krańców zakresu  $X$ . Dla narastającej proporcjonalnie niepewności typu B pasmo będzie niesymetryczne względem środka zakresu zmiennej  $X$  i rozszerzające się ku jego końcowi. Niepewność złożona i rozszerzona wyznaczane są ze wzorów (20) i (21) w zależności od przyjętego modelu. Dla jednakowych niepewności złożonych tj. wartości niepewności niezmiennych zarówno typu A jak i typu B, pasmo niepewności opisane przez (21a,b) jest zazwyczaj szersze niż wynikające z (21c), gdyż wyrażenie

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

jest dodatnie, a dla punktów skrajnych – krańców linii regresji może przyjmować wartości bliskie zeru.

Na rysunku 5 podano wykresy trzech pasm niepewności rozszerzonej  $U_{0,95}$  prostej regresji o danych I z tabeli 1a dla jej niepewności  $u_{A_i} = 0,1; 0,3; 0,5$  oraz  $u_B = 0$ . Zaznaczono też odległości  $\Delta y_i$  mierzonych punktów od tej prostej regresji.



Rys. 5. Trzy pasma niepewności  $U_{0,95}$  z wzoru (19) prostej regresji i odległości  $\Delta y_i$  mierzonych punktów od tej prostej

Fig. 5. Three uncertainty  $U_{0,95}$  bands of the regression line I and deviations  $\Delta y_i$  of measurement points from this line

Równania hiperbol dla niepewności rozszerzonej są opisane wzorem

$$U = 2,31\sqrt{0,1 + 0,012(x - 5,5)^2} u_{Ai}.$$

Przedstawione na rysunku 5 pasma niepewności  $U_{0,95}$  poszerzają się proporcjonalnie do jednakowej wartości niepewności  $u_i$  dla mierzonych punktów. Maksymalne wartości występują na krańcach pasm. Odległości  $\Delta y_i$  punktów mierzonych od prostej (rzędne żółtych punktów na rysunku) przekraczają w obu kierunkach granice najszerszego pasma niepewności dla  $u = 0,5$ .

## 6.2. Obszar ufności prostej regresji przy zastosowaniu estymatora wariancji

Jeśli niepewności mierzonych punktów są jednakowe, ale nieznanne, to przyjmuje się, że przedział ufności dla niepewności  $u(y)$  wynika ze średniej sumy kwadratów odległości punktów od prostej regresji dla  $n - 2$  stopni swobody. Nieobciążony estymator  $\hat{u}^2$  wariancji  $E(u^2)$  wynosi:

$$\hat{u}^2 = E(u^2) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2}{n - 2} \quad (30)$$

Z (11), (23a,b), (24), (25d-f) i (27) wynika, że estymator ten przyjmuje postacie:

$$\begin{aligned} \hat{u}^2 &= u^2 \frac{-aS_{xy} - bS_y + S_{yy}}{n - 2} = (1 - \rho_{xy}^2) \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right)^2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 2} = \\ &= \frac{n}{n - 2} (1 - \rho_{xy}^2) \sigma_y^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Z (31) wynika, że estymator  $\hat{u}^2$  jest tym większy, im mniejsze jest skorelowanie między wartościami  $x$  i  $y$  prostej oraz im większe jest odchylenie standardowe  $\sigma_y$  rozrzutu  $y_i$  punktów  $Q_i$  względem średniej  $\bar{y}$ . Zastępując we wzorach (28a,b) niepewności  $u$  ich estymatorami  $\hat{u}$ , otrzymuje się dla parametrów  $a$  i  $b$  prostej regresji następujące wzory:

$$\hat{u}_a^2 = \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right)^2 \frac{1 - \rho_{xy}^2}{n - 2} = a^2 \frac{\rho_{xy}^2 - 1}{n - 2} \quad (32a)$$

$$\hat{u}_b^2 = u_b^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \quad (32b)$$

Niepewność  $\hat{u}_A(y_i)$  wyznacza się z następujących wzorów estymatora wariancji:

$$\hat{u}_A^2(y_i) = a^2 \frac{\rho_{xy}^2}{n - 2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} + (x_i - \bar{x})^2 \right] \quad (33a)$$

lub 
$$\hat{u}_A^2 = (1 - \rho_{xy}^2) \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right)^2 (\sigma_x^2 + (x_i - \bar{x})^2) \quad (33b)$$

Z (33a,b) wynika, że niepewność typu A estymatora  $\hat{u}^2$  maleje ze wzrostem współczynnika korelacji  $\rho_{xy}$  i rośnie ze wzrostem wartości bezwzględnej współczynnika kierunkowego  $a$  prostej regresji. Dla w pełni skorelowanych wartości zmiennych  $X$  i  $Y$ ,  $\rho_{xy} = 1$ ,  $a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$  i niepewność  $\hat{u}_A^2$  dąży do zera, a dla zmien-

nych niezależnych, tj. dla  $\rho_{xy} = 0$ , osiąga maksimum:

$$\hat{u}_{A\max}^2(y_i) = \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \right)^2 (\sigma_x^2 + (x_i - \bar{x})^2) \quad (34)$$

Niepewności złożone i rozszerzone prostej regresji oraz jej pasmo niepewności wyznacza się ze wzorów (19)–(21). Estymator  $\hat{u} = 1,084 > 0,5$  przedstawia średnią odległość mierzonych punktów w kierunku OY od linii regresji. Z rysunku 5 wynika, że jego zastosowanie daje pasmo niepewności na tyle duże, że obejmuje ono położenia większość mierzonych punktów.

Uwzględnienie pasma niepewności typu B przez geometryczne jej zsumowanie z pasmem  $\hat{u}_A$  poszerza pasma niepewności złożonej  $\hat{u}$  i rozszerzonej w stopniu zależnym od przebiegu  $u_B(x)$ .

## 7. Parametry i niepewności prostej dla jednakowej niepewności względnej punktów

Jednakowa niepewność  $\delta_i \equiv \delta = \text{const}$  typu A mierzonych odciętych  $y_i$  punktów  $Q_i$  wystąpi we wzorach (6a-f) dla parametrów pomocniczych jako wartość stała przed symbolami sumy, tj.:

$$S = \delta^{-2} \sum_{i=1}^n y_i^{-2} \quad (35a)$$

$$S_x = \delta^{-2} \sum_{i=1}^n x_i y_i^{-2} \quad (35b)$$

$$S_{xx} = \delta^{-2} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^{-2} \quad (35c)$$

$$S_{xy} = \delta^{-2} \sum_{i=1}^n x_i y_i^{-1} \quad (35d)$$

$$S_y = \delta^{-2} \sum_{i=1}^n y_i^{-1} \quad (35e)$$

$$S_{yy} = n\delta^{-2} \quad (35f)$$

Wartości parametrów prostej regresji nie zależą od niepewności względnej i są następujące:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^{-2} \sum_{i=1}^n x_i y_i^{-1} - \sum_{i=1}^n y_i^{-1} \sum_{i=1}^n x_i y_i^{-2}}{\sum_{i=1}^n y_i^{-2} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^{-2} - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i^{-2} \right)^2} \quad (36a)$$

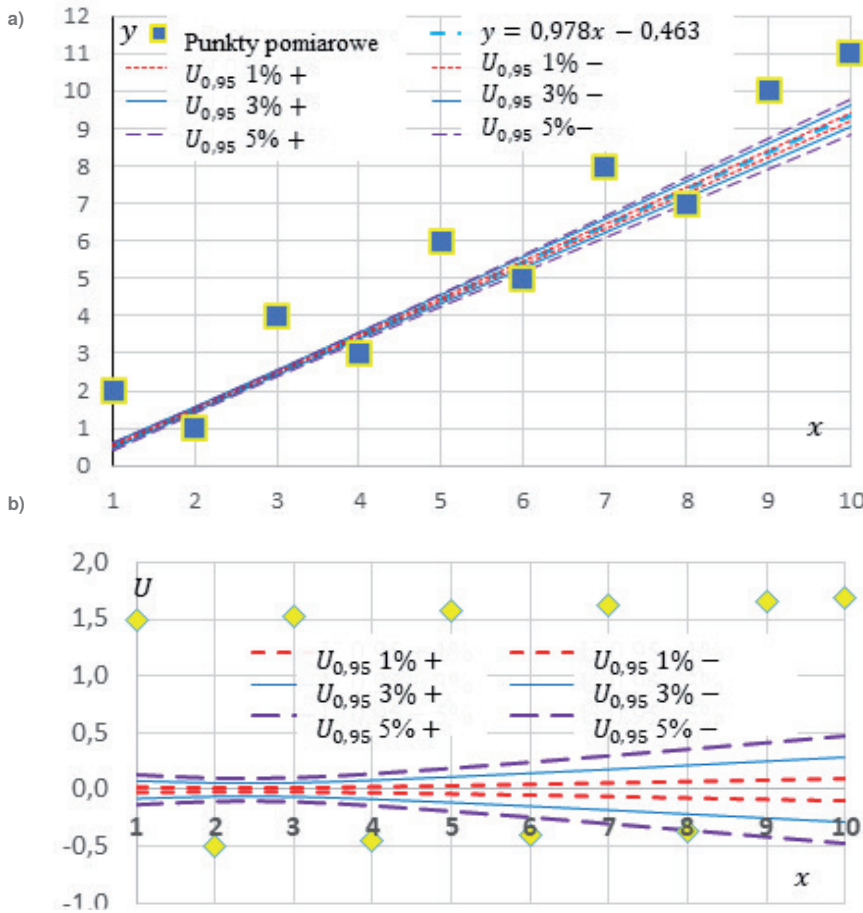
$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^{-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^{-2} - \sum_{i=1}^n x_i y_i^{-1} \sum_{i=1}^n x_i y_i^{-2}}{\sum_{i=1}^n y_i^{-2} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^{-2} - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i^{-2} \right)^2} \quad (36b)$$

Natomiast opisany wzorem (18a) kwadrat niepewności  $u_c^2(y(x))$  przekształci się do postaci

$$u_c^2(y(x)) = u_{ab}^2(y(x)) = \delta^2 \frac{\sum_{i=1}^n (x - x_i)^2 y_i^{-2}}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2 y_i^{-2} y_j^{-2}} \quad (37)$$

Na rysunku 6a podano prostą regresji  $y = 0,978x - 0,463$  o parametrach  $a$ ,  $b$  ze wzorów (36a,b) wraz z trzema pasmami niepewności względnych o jednakowych wartościach  $\delta_{y,ab}(y)$  dla punktów o odciętych z całego zakresu  $x$ . Rysunek 6b przedstawia wykresy tych pasm opisane wzorem (21).

Prosta regresji z rys. 6a o stałych niepewności względnych  $\delta_{yi} \equiv \delta = \text{const}$  dla pomiarów odciętych punk-



Rys. 6. a) Prosta regresji o parametrach z (36a,b) z trzema pasmami niepewności względnych  $\delta_u = 1\%, 3\%$  i  $5\%$ , b) trzy pasma niepewności z (19) w funkcji  $x$  i punkty w odległościach  $\Delta y$ , od tej prostej  
 Fig. 6. a) Regression straight-line with parameters from (36a,b) with three relative uncertainty bands:  $\delta_u = 1\%, 3\%$  and  $5\%$ ; b) three uncertainty bands from (19) as a function of  $x$ , and points at distances  $\Delta y$ , from this line

tów  $Q_i$  ma inne parametry niż prosta o stałych niepewnościach bezwzględnych  $u_i = u = \text{const}$  o danych I z tabeli 1a. Jest ona bardziej nachylona do osi OX i jej pasma niepewności są istotnie węższe. Na rysunku 6b widać też znaczny wzrost szerokości pasma wraz z  $x$  na końcu zakresu linii regresji. Wynika to z wzoru (37) przy jego porównaniu z wzorem (18) dla  $u_i = u$ . Pasma niepewności wyznaczone dla stałych wartości niepewności względnych  $\delta_u = 5\%$  w całym zakresie zmiennej  $x$  jest, jak wynika z rysunku 6b, węższe niż pasmo dla niepewności bezwzględnej  $u = 0,5$ , tj.  $5\%$  zakresu na rysunku 5. W obu przypadkach stałych wartości niepewności względnych i bezwzględnych punktów pomiarowych należy uwzględnić niepewność typu B sumując ją geometrycznie z niepewnością typu A otrzymaną dla prostej regresji.

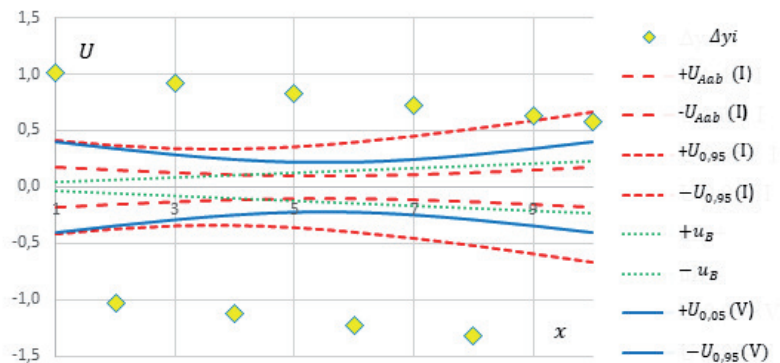
### 8. Porównanie dwu sposobów uwzględniania niepewności typu B

Porówna się teraz dwa sposoby uwzględniania niepewności pomiarów typu B w szacowaniu pasma niepewności prostej regresji. Pierwszy, to już omówiony sposób z geometrycznym sumowaniem pasma niepewności typu A prostej wyznaczonej z pomiarów i heurystycznie estymowanej niepewności typu B dla aparatury i warunków danego

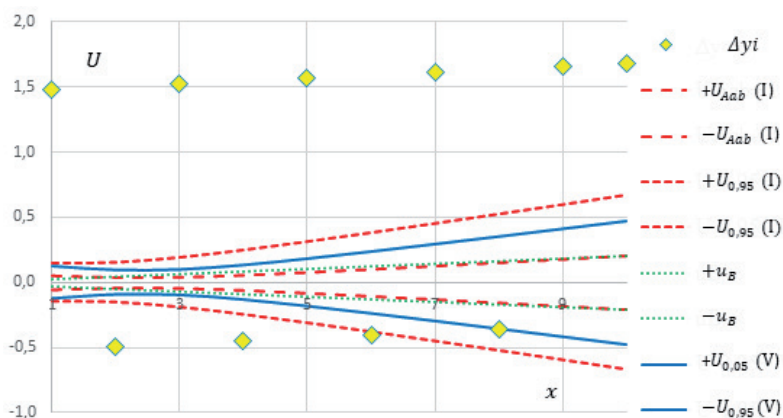
eksperymentu wg (21a,b). Drugi, to sposób specjalny, oznaczony przez V. Polega on na obliczaniu równania prostej i jej pasm niepewności ze wzorów (21c), tj. bezpośrednio z wartości współrzędnych  $y_i$  i niepewności złożonej  $u_{Ai}$  poszczególnych mierzonych punktów jako sumy geometrycznej  $u_{Ai}$  i  $u_{Bj}$ . Dotyczy to rzadkich przypadków, gdy każdy punkt mierzy się innym przyrządem i w różnych warunkach.

Obliczenia wykonano dla zestawu danych I w tabeli 1a o jednakowej niepewności punktów pomiarowych  $u_i = u$ . Otrzymane dla obu sposobów wyznaczenia pasma prostej regresji podano dla rozszerzonej niepewności bezwzględnej na rysunku 7, a dla niepewności względnej – na rys. 8.

Przy geometrycznym sumowaniu wypadkowej charakterystyki niepewności  $u_{Ab}$  i wzrastającej liniowo wraz z  $y$  niepewności  $u_{Bj}$  otrzymano szersze pasmo prostej regresji niż dla indywidual-



Rys. 7. Porównanie dwu sposobów uwzględniania niepewności bezwzględnej typu B przy wyznaczaniu pasma niepewności rozszerzonej dla  $u_{Ay} = 0,3$  i  $u_{By} = 0,02(1 + y)$   
 Fig. 7. Comparison of two ways of taking into account absolute uncertainties of type B for determining the expanded uncertainty band for  $u_{Ay} = 0.3$  i  $u_{By} = 0.02(1 + y)$



Rys. 8. Porównanie dwu sposobów wyznaczania pasm niepewności rozszerzonej  $U_{0,95}$  prostej regresji dla punktów o stałych niepewnościach względnych pomiarów typu A:  $\delta_{Ay} = 5\%$  i typu B:  $\delta_{By} = 2\%$   
 Fig. 8. Comparison of two methods for determining the expanded uncertainty bands  $U_{0,95}$  of regression straight-line for points with constant relative uncertainties of  $y$  measurements type A:  $\delta_{Ay} = 5\%$  i typu B:  $\delta_{By} = 2\%$

nie wyznaczanych niepewności złożonych punktów mierzonych, tj. według sposobu oznaczonego przez V. Sumowanie charakterystyk niepewności daje bardziej bezpieczną i wiarygodną ocenę dokładności wyniku pomiaru, gdyż randomizuje i uśrednia wpływ wielu różnych zmieniających się oddziaływań, które mogą wystąpić w całym okresie ważności kalibracji aparatury pomiarowej. Jest to istotne zarówno dla oceny aparatury pomiarowej, jak i dla śledzenia zmian parametrów badanego obiektu. Ponadto uwzględnianie wg sposobu V heurystycznie szacowanej niepewności bezwzględnej typu B bezpośrednio dla wyników pomiaru rzędnych  $y_i$  punktów wpływa zarówno na równanie prostej, jak i na przebieg wypadkowej niepewności złożonej.

W praktyce pomiarowej wpływ liniowo narastającej niepewności  $u_B$  zwiększa się wraz z wartością wielkości mierzony. Dlatego też sposób sumowania pasm niepewności typu A i B dla danych I przy jednakowej niepewności względnej pomiaru punktów, pokazany na rysunku 8, najlepiej charakteryzuje rzeczywiste sytuacje.

## 9. Podsumowanie

Celem wielu eksperymentów pomiarowych jest wyznaczenie funkcji  $Y = F(X)$  między wektorowymi zmiennymi losowymi, objaśnianą  $Y$  i objaśniającą  $X$  oraz ocena jej dokładności. Dla jednoparametrowych zmiennych  $Y$  i  $X$  metodą regresji liniowej wyznacza się funkcję liniową nazywaną też prostą regresji, o równaniu  $y = ax + b$  i jej pasma niepewności.

Parametry równania prostej regresji i jej pasma niepewności, w przypadku ogólnym zależą od wartości współrzędnych  $x_p$ ,  $y_i$  mierzonych punktów i ich niepewności bezwzględnej  $u_i(x_i, y_i)$ . W tej pracy rozpatrywano przypadki, gdy wartości odciętych  $x_i$  mierzonych punktów są znane dokładnie. Do oceny jej dokładności autorzy opracowali metodę opartą na stosowanych powszechnie w pomiarach zalecaniach Przewodnika GUM [5]. Dokładność zmiennej  $y$  prostej regresji opisuje wówczas pasmo niepewności rozszerzonej o prawdopodobieństwo  $P$  i granicach  $\pm U_p(y) = \pm k_p u(y)$  wyznaczanych z niepewności złożonej  $\pm u(y)$  prostej regresji. Niepewność  $u(y)$  otrzymuje się jako sumę geometryczną charakterystyki  $u_{Aab}(y)$  niepewności typu A wyznaczonej z pomiarów i charakterystyki  $u_{yB}(y)$  niepewności typu B oszacowanej heurystycznie z wartości maksymalnego dopuszczalnego błędu  $E_{max}$  miernika i innych elementów systemu pomiarowego. W literaturze nie uwzględniano dotychczas wpływu niepewności typu B na dokładność prostej regresji. Wartość współczynnika rozszerzenia  $k_p$  jest znana tylko, gdy niepewność złożoną  $u$  wyznacza się dla danych o rozkładzie Gaussa i kilku innych podstawowych rozkładach. Przy rozkładzie otrzymanym ze splotu odchylen z pomiarów o niepewności typu A i niepewności typu B estymowanej z rozkładu równomiernego o szeroko-

ści dwu maksymalnych dopuszczalnych błędów  $2E_{max}$  miernika, współczynnik  $k_p$  wyznacza się numerycznie metodą Monte Carlo według Suplementu 1-GUM. Jedynie, gdy na system pomiarowy i obiekt badany wpływa równocześnie wiele niezależnie zmiennych czynników, to niepewność  $u_B(y)$  można szacować jako odchylenie standardowe rozkładu Gaussa.

Dla współrzędnych  $y_i$  punktów mierzonych z jednakową niepewnością  $u_i(y_i) \equiv u$ , otrzymuje się prostą regresji o równaniu niezależnym od  $u$ . Szerokość  $2u_{Aab}(y)$  jej pasma niepewności jest proporcjonalna do  $u$ . Podobnie jest dla pomiarów punktów o jednakowej niepewności względnej  $\delta_u$ , ale otrzymuje się prostą regresji o innym równaniu.

Indywidualne wyznaczenie niepewności typu B mierzonych punktów stosować należy tylko w szczególnych przypadkach, np. w terenowych badaniach klimatycznych lub jakości środowiska dla pomiarów różnymi przyrządami i w różnych warunkach.

Wpływ korelacji i autokorelacji współrzędnych punktów na równanie i niepewność prostej regresji opisującej pomiary omawia się w następnej pracy tego cyklu tematycznego.

## Bibliografia

1. Draper R.D., Smith H., *Applied Regression Analysis*, 3rd Edition Wiley New York, 1998, (polskie tłumaczenie wyd.1 z 1966 r. *Analiza regresji stosowana*, PWN Warszawa 1973)
2. Mańczak K., *Technika planowana eksperymentu*, WNT Warszawa 1976.
3. Dobosz M., *Wspomagana komputerowo statystyczna analiza wyników badań*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2004.
4. Zięba A., *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, PWN Warszawa 2013.
5. JCGM100:2008, Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement; +JCGM101:2008 Supplement 1 – Propagation of distributions using a Monte Carlo method; JCGM102:2011 Supplement 2 – Extension to any number of output quantities.
6. Dorozhovets M., Warsza Z.L., *Udoskonalenie metod wyznaczania niepewności wyników pomiaru w praktyce*. „Przegląd Elektrotechniki”, Nr 1, 2007, 1–13.
7. Dorozhovets M., Warsza Z.L., *Propozycje rozszerzenia metod wyznaczania niepewności wyniku pomiarów wg Przewodnika GUM* (2), „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 13, Nr 2, 2007, 6–12.
8. Warsza Z.L., *Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów*. Monografia PIAP, Warszawa 2016.
9. Warsza Z.L., Zięba A., *Niepewność typu A pomiaru o obserwacjach samo-skorelowanych*. „Pomiary Automatyka Kontrola”, Vol. 58, Nr 2, 2012, 157–161.



10. Warszawa Z.L., *Evaluation of the type A uncertainty in measurements with autocorrelated observations*. Journal of Physics. Conference series 459(2013) 012035. 2013 Joint IMEKO TC1+TC7+TC13 Symposium: measurement Across Physical and Behavioral Sciences, Genova 4–6 Sept. Italy, DOI: 10.1088/1742-6596/459/1/0120356.
11. Dorozhovets M., *Niepewność liniowej regresji ortogonalnej*. „Pomiary Automatyka Kontrola”, Vol. 53, No. 9bis, 2007, 31–34.
12. Elster C, Toman B., *Bayesian uncertainty analysis for a regression model versus application of GUM Supplement 1 to the least-squares estimate*. “Metrologia”, Vol. 48, No. 5, 2011, 233–240, DOI: 10.1088/0026-1394/48/5/001.
13. Fotowicz P., *Modyfikacja sposobu obliczania niepewności pomiaru*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 20, Nr 3, 2016, 29–32, DOI: 10.14313/PAR\_221/29.
14. White D.R., *In pursuit of a fit-for-purpose uncertainty guide*. “Metrologia”, Vol. 53, No. 4, 2016, 107–124, DOI: 10.1088/0026-1394/53/4/S107.

## Uncertainty of Measurement in the Linear Regression Method Part 1. Straight-line and its Uncertainty Bands for Uncorrelated Measurement Data

**Abstract:** In a series of several papers, the estimation of the accuracy of the parameters of a straight line determined by the linear regression method for various cases of measurement data will be discussed. Referring to the recommendations of the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, the B-type uncertainty, so far omitted in the literature, is taken into account. The first of these works concerns the measurements of the value of the random variable  $Y$  for known values of the variable  $X$ . The essence of the problem, the criteria of the linear regression method and their application are presented for measured values with uncorrelated, known and unknown, including the same, type A uncertainties. Simulated calculation examples illustrate the case for the measurements of points with the same coordinates and different variants of type A and type B uncertainty. Line equations and their uncertainty bands were determined. The next work will concern the measurements of points with correlated data. In yet another work, the cases will be discussed cases that require measurements of both  $Y$  and  $X$  variables.

**Keywords:** linear regression, uncertainty band for type A and type B measurements, data correlation

### doc. dr inż. Zygmunt Lech Warszawa

zlw1936@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3537-6134

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–1970, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatykacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 340 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.



### dr inż. Jacek Puchalski

j.puchalski@gum.gov.pl

ORCID: 0000-0002-5055-8550

Absolwent Wydziału Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej (1986 r.) oraz Wydziału Elektroniki (1988 r.) Politechniki Warszawskiej. W latach 1987–1995 asystent na Politechnice Warszawskiej, w 1995 r. obronił pracę doktorską. Kolejne 10 lat pracował w branży nowych technologii w firmach produkujących i importujących kasy rejestrujące. Przygotowywał i uczestniczył w certyfikacji nowych modeli kas w Ministerstwie Finansów oraz prowadził szkolenia i serwis urządzeń fiskalnych. Od 2006 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Zajmował się zatwierdzeniem typu i oceną zgodności taksometrów elektronicznych i mierników prędkości w ruchu drogowym, a obecnie jako główny metrolog rozwija metody matematyczne szacowania niepewności pomiarowych.

