

17th SYMPOSIUM ON HYDROACOUSTICS

Jurata May 23-26, 2000



THE SOUND POWER OF A SIMPLE-SUPPORTED CIRCULAR PLATE FOR LOW FREQUENCIES¹

MOC PROMIENIOWANIA DŹWIĘKU PRZEZ PŁYTKĘ KOŁOWĄ
ZAMOCOWANĄ PRZEGUBOWO W ZAKRESIE NISKICH
CZĘSTOTLIWOŚCI

Witold J. Rdzanek¹, Zbigniew Engel²
and Wojciech P. Rdzanek, Jr³

^{1,3}Pedagogical Univ., Dep. of Acoust., 35-310 Rzeszów, ul.Rejtana 16a, Poland
E-mail: ¹rdzanek@atena.univ.rzeszow.pl, ³wprdzank@atena.univ.rzeszow.pl

²Univ. of Mining and Metallurgy, Dep. of Mech. and Vibroacoust., 30-059 Kraków
Al. Mickiewicza 30, Poland, E-mail: engel@uci.agh.edu.pl

A computation method and the resultant formulas for the active sound power of axisymmetric free vibrations of a circular plate simply supported by a planar rigid baffle have been presented in the paper. Processes sinusoidally varying in time have been considered. It has been assumed that there are no reflexive influences of the air column over the plate and the baffle on the plate's vibrations. The integral formula for the active sound radiation in the Hankel's representation of null order has been transformed to a formula in an elementary form. This elementary formula contains the Bessel's and the Struve's functions of null and first orders and is valid for a relatively wide range of low frequencies.

Wprowadzenie

Drgania własne płyty można rozłożyć w szereg Fouriera przy pomocy analizy modalnej. W tym celu należy obliczyć znormalizowane wartości badanych wielkości odpowiadających kolejnym postaciom drgań własnych. Po znalezieniu współczynników fourierowskich rozwinięcia można wtedy obliczyć wartości całkowite badanych wielkości.

Dobrze znane są wzory całkowite, które umożliwiają obliczenie znormalizowanego ciśnienia i mocy dźwięku kolejnych postaci drgań. Są one jednak czasochłonne, a przez to

¹This work has been realized within the framework of the KBN project no. 7T07B 051 18

uciażliwe w obliczeniach inżynierskich. W literaturze podawane są różne metody usprawnienia obliczeń numerycznych, np. Lee i Singh [4] rozwijają w potroójny szereg potęgowy moc czynną dźwięku promieniowanego przez płytę pierścieniową. Levine i Leppington [6] moc czynną, a Rdzanek [9] moc bierną płyty kołowej przedstawiają w postaci wzorów asymptotycznych ze znanym błędem, dla wysokich częstotliwości, tj. $k > k_n$ akustyczna liczba falowa jest większa od strukturalnej liczby falowej. Podobne wzory asymptotyczne dla płyt pierścieniowych umocowanych do odgrody na kilka różnych sposobów podali Rdzanek i Engel [13, 15, 16, 17], a w [12, 14] dla płyty kołowej podpartej przegubowo. Analiza teoretyczna mocy dźwięku promieniowanego przez płytę kołową podali Engel i Stryczniewicz [3]. Czarnecki, Engel i Panuszka [1, 2] opracowali i wykorzystali analityczną metodę powierzchni zastępczych do wyznaczenia mocy promieniowania dźwięku przez płytę kołową w polu swobodnym i rozproszonym.

Wciąż brak szybkich metod obliczeniowych dla niskich częstotliwości. W pracy przedstawiona zostanie propozycja, przebieg konstrukcji oraz gotowe wzory umożliwiające szybkie obliczenia numeryczne mocy czynnej dźwięku dla płyty kołowej podpartej przegubowo obowiązujące w zakresie niskich częstotliwości, tj. $k < k_n$. Nie musi być natomiast spełniony warunek $ka \ll 1$ co oznacza, że przedstawione wzory obowiązują w znacznie szerszym zakresie niskich częstotliwości niż w przeciwnym wypadku. Zastosowana w pracy metoda obliczeń została wprowadzona przez Rdzankę [10], przy analizie impedancji akustycznej promieniowania membrany kołowej pobudzonej do drgań wymuszonych.

1. Drgania własne płyty kołowej. Analiza modalna

Płyta kołowa podparta jest przegubowo przez płaską i sztywną odgradę o nieskończonych rozmiarach. Płyta drga swobodnie i promieniuje fale dźwiękowe w górną półprzestrzeń $z \geq 0$ wypełnioną bezstratnym gazem. Zakładamy, że drgania są osiowo-symetryczne oraz że ośrodek gazowy nie oddziałuje zwrotnie na drgania płyty, a wewnątrz płyty nie ma tarcia. Analizowane są procesy sinusoidalnie zmienne w czasie, obliczenia dotyczą więc amplitud analizowanych wielkości.

Wychylenie punktów powierzchni płyty

$$\frac{\eta_m(r)}{A_n} = J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) - \frac{J_0(x_n)}{I_0(x_n)} I_0\left(x_n \frac{r}{a}\right), \quad r \in [0, a], \quad (1.1)$$

oraz moment skracający są równe zero, gdy $r = a$ (por. Leissa [5] lub Morse [8]), tj.

$$\eta_m(a, t) = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 \eta_m(r, t)}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \eta_m(r, t)}{\partial r} \right]_{r=a} = 0. \quad (1.2)$$

Spełniony jest warunek ograniczenia $\eta_m(0, t) < \infty$. Wielkości $x_n = k_n a$, $n = 0, 1, 2, \dots$ są pierwiastkami równania częstości

$$\frac{J_1(x_n)}{J_0(x_n)} + \frac{I_1(x_n)}{I_0(x_n)} = \frac{2x_n}{1 - \nu}, \quad (1.3)$$

przy czym $k_n^2 = \omega_n \sqrt{M/B_0}$, ω_n jest n -tą częstotliwością kątową drgań własnych, M – gęstością powierzchniową płyty, $B_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$. Stałą A_n obliczono z warunku normalizacyjnego $\int_0^a \eta_n^2(r) r dr = a^2/2$, gdzie $a_n = J_1(x_n)/J_0(x_n)$. Pierwiastki x_n równania częstości (1.3) przedstawiono w tab. 1.

Tab. 1. Eigenvalues x_n of the frequency equation (1.3).

ν	n				
	1	2	3	4	5
0.0	2.1080	5.4188	8.5920	11.7471	14.8962
0.1	2.1492	5.4300	8.5986	11.7517	14.8998
0.2	2.1869	5.4409	8.6050	11.7563	14.9034
0.3	2.2215	5.4516	8.6114	11.7609	14.9069
0.4	2.2535	5.4620	8.6177	11.7654	14.9104
0.5	2.2831	5.4723	8.6239	11.7698	14.9139

Przy znanym rozkładzie amplitudy prędkości drgań głównych $v_n(r) = -i\omega_n \eta_n(r)$ uśredniona w czasie czynna moc akustyczna promieniowania w reprezentacji Hankela jest następująca (por. [11, 14])

$$\frac{\Pi_n}{\Pi_n^{(\infty)}} = 4 \frac{\beta^2}{x_n^2} q_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{a_n J_0(u) - \frac{u}{x_n} J_1(u)}{1 - \frac{u^4}{x_n^4}} - \frac{x_n}{1 - \nu} \frac{J_0(u)}{1 + \frac{u^4}{x_n^4}} \right\}^2 \sin \vartheta d\vartheta, \quad (1.4)$$

gdzie $\Pi_n^{(\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \rho_0 c \int_S v_n^2 dS$, $S = \pi a^2$, $u = \beta \sin \vartheta$, $\beta = ka$ oraz

$$q_n = (1 - \nu) \left[2x_n a_n - \left(1 + \nu + \frac{2x_n^2}{1 - \nu} \right) \right]^{-1}. \quad (1.5)$$

Całkowanie we wzorze (1.4) można przeprowadzić w przypadku niskich częstotliwości, tj. $k < k_n$, uzyskując wystarczająco dobrą dokładność po uwzględnieniu rozwinięć

$$\begin{aligned} \left[1 - \left(\frac{\beta}{x_n} x \right)^4 \right]^{-2} &\simeq 1 + 2 \left(\frac{\beta}{x_n} x \right)^4, \\ \left[1 - \left(\frac{\beta}{x_n} x \right)^4 \right]^{-1} \left[1 + \left(\frac{\beta}{x_n} x \right)^2 \right]^{-1} &\simeq 1 - \left(\frac{\beta}{x_n} x \right)^2 + 2 \left(\frac{\beta}{x_n} x \right)^4, \\ \left[1 + \left(\frac{\beta}{x_n} x \right)^2 \right]^{-2} &\simeq 1 - 2 \left(\frac{\beta}{x_n} x \right)^2 + 3 \left(\frac{\beta}{x_n} x \right)^4, \end{aligned} \quad (1.6)$$

gdzie $x = \sin \vartheta$.

W pierwszym przybliżeniu we wzorze (1.4) wyodrębniamy wyrażenia

$$\begin{aligned} \Pi_{n1} &\simeq \left(2 \frac{\beta}{x_n} \right)^2 \left[a_n^2 \mathcal{U}(\beta) - 2a_n \frac{\beta}{x_n} \mathcal{V}(\beta) \right], \\ \Pi_{n2} &\simeq - \left(2 \frac{\beta}{x_n} \right)^2 \frac{2x_n}{1-\nu} \left[a_n \mathcal{U}(\beta) - \frac{\beta}{x_n} \mathcal{V}(\beta) \right], \\ \Pi_{n3} &\simeq \left(2 \frac{\beta}{x_n} \right)^2 \left(\frac{x_n}{1-\nu} \right)^2 \mathcal{U}(\beta), \end{aligned} \quad (1.7)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\beta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0^2(\beta \sin t) \sin t \, dt, \\ \mathcal{V}(\beta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(\beta \sin t) J_1(\beta \sin t) \sin^2 t \, dt \end{aligned} \quad (1.8)$$

oraz

$$\frac{\Pi_n}{\Pi_n^{(\infty)}} \simeq q_n (\Pi_{n1} + \Pi_{n2} + \Pi_{n3}), \quad (1.9)$$

gdy $k \ll k_n$. Po podstawieniu wzorów (1.7) do wzoru (1.9) otrzymujemy

$$\frac{\Pi_n}{\Pi_n^{(\infty)}} \simeq q_n \left(2 \frac{\beta}{x_n}\right)^2 \left(\frac{x_n}{1-\nu} - a_n\right) \left[\left(\frac{x_n}{1-\nu} - a_n\right) \mathcal{U}(\beta) + 2 \frac{\beta}{x_n} \mathcal{V}(\beta)\right]. \quad (1.10)$$

Funkcje \mathcal{U} i \mathcal{V} wyrażamy poprzez funkcje Bessela i Struvego rzędu zerowego i pierwszego

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\beta) &= J_0(2\beta) + \frac{\pi}{2} [J_1(2\beta) S_0(2\beta) - J_0(2\beta) S_1(2\beta)], \\ \mathcal{V}(\beta) &= \frac{1}{2\beta} [\mathcal{U}(\beta) - J_0(2\beta)]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

2. Zakończenie

Funkcje (1.11), będące wynikami obliczonych całek (1.8), można również wyrazić przy pomocy szybko zbieżnych szeregów funkcji Bessela nieparzystych rzędów [7]

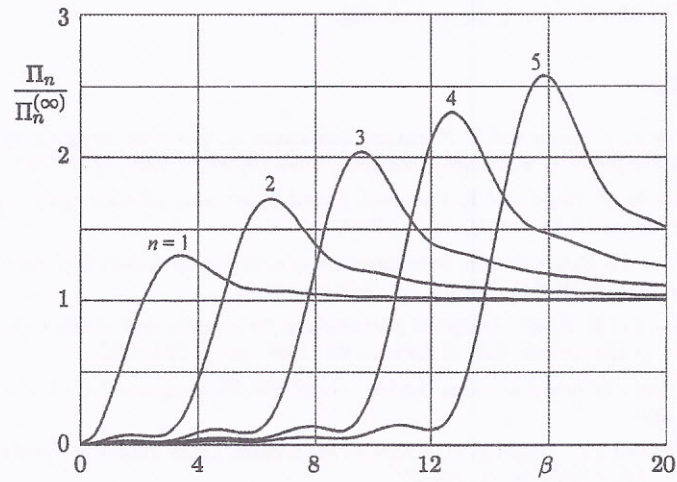
$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\beta) &= \frac{1}{2\beta} \int_0^{2\beta} J_0(t) \, dt = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{+\infty} J_{2n+1}(2\beta), \\ \mathcal{V}(\beta) &= \frac{1}{2\beta} [\mathcal{U}(\beta) - J_0(2\beta)] = \frac{1}{2\beta} [-J_0(2\beta) + \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{+\infty} J_{2n+1}(2\beta)]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Otrzymany wzór (1.10) pozwala na szybkie obliczenia numeryczne czynnej mocy dźwięku promieniowanego przez drgającą swobodnie płytę w zakresie niskich częstotliwości, tj. $k \ll k_n$.

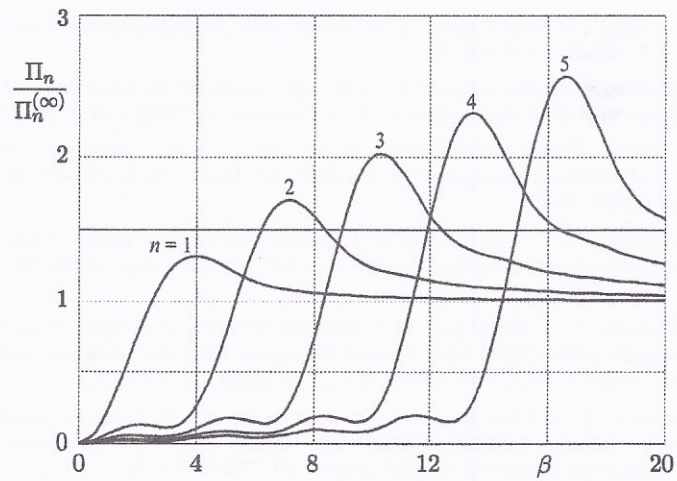
Tab. 2. Eigenvalues x_n of the frequency equation of a clamped circular plate.

n	0	1	2	3	4
x_n	3.1962	6.3064	9.4395	12.5771	15.7164

Możliwe jest również otrzymanie wzorów pozwalających na również szybkie obliczenie numeryczne mocy czynnej w przypadku szerszego zakresu częstotliwości, tzn. przy mniej



Rys. 1. The normalized active power of sound radiation of a simply-supported circular plate for the mode of vibration $(0, n)$ where $\nu = 0.3$.



Rys. 2. The normalized active power of sound radiation of a clamped circular plate for the mode of vibration $(0, n)$ where $\nu = 0.3$.

rygorystycznym warunku $k < k_n$. W tym przypadku należy we wzorze (1.4) uwzględnić wszystkie wyrazy rozwinięć (1.6), czyli do wyrazów $\left(\frac{\beta}{x_n} x\right)^4$ włącznie.

Na rys. 1 przedstawiono charakterystyki częstotściowe mocy czynnej promieniowania dźwięku przez płytę kołową podpartą przegubowo obliczone na podstawie wzoru (1.4). Na rys. 2 zamieszczono analogiczne charakterystyki, ale dla utwierdzonej płyty kołowej

sporządzone na podstawie pracy [9, 14]. W tab. 2 podano kilka przykładowych wartości własnych dla utwierdzonej płyty kołowej.

Bibliografia

- [1] S. Czarnecki, Z. Engel and R. Panuszka, *Estimation of equivalent surface area for determination of the acoustic power of a circular plate*, Inter-Noise 79, vol. 1, 1979, pp. 67–70.
- [2] S. Czarnecki, Z. Engel and R. Panuszka, *Sound power and reduction efficiency of a circular plate*, Arch. of Acoustics 16 (1981), no. 4, 339–357.
- [3] Z. Engel and L. Stryczniewicz, *Determination of sound power radiated by vibrating plate*, Mechanika – quarterly at AGH 7 (1988), no. 1-2, 5–19, in polish.
- [4] M.-r. Lee and R. Singh, *Analytical formulations for annular disk sound radiation using structural modes*, J. of the Acoust. Soc. of America 95 (1994), no. 6, 3311–3323.
- [5] A.W. Leissa, *Vibration of plates*, NASA, vol. SP-160, Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1969.
- [6] H. Levine and F.G. Leppington, *A note on the acoustic power output of a circular plate*, J. of Sound and Vibr. 121 (1988), no. 2, 269–275.
- [7] N.W. McLachlan, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
- [8] P.M. Morse, *Vibration and sound*, The Acoust. Society of America, Through The American Inst. of Physics, USA 1995.
- [9] W.J. Rdzanek, *The sound power of a circular plate for high-frequency wave radiation*, Arch. of Acoustics 3 (1983), no. 4, 331–340.
- [10] W.J. Rdzanek, *Acoustical impedance of a circular membrane vibrating under the influence of a force with a uniform surface distribution*, Arch. of Acoustics 11 (1986), no. 1, 39–52.
- [11] W.J. Rdzanek, *Mutual impedance of circular plate for axially-symmetric free vibrations at high frequency of radiating waves*, Arch. of Acoustics 17 (1992), no. 3, 439–448, Paper prepared within the grant CPBP 02.03.
- [12] W.P. Rdzanek, Jr, Z. Engel and W.J. Rdzanek, *The acoustic power radiated by a circular plate hanged articulately*, Collected Papers from the Joint Meeting “Berlin 99”, Forum Acusticum, March 14-19, 1999.
- [13] W.P. Rdzanek, Jr, Z. Engel and W.J. Rdzanek, *Theoretical analysis of sound radiation by supported annular plates*, XLVI OSA, Crakow-Zakopane, 1999, this work has been realized within the framework of KBN project no. 7T07B 018 12, in polish, pp. 509–514.
- [14] W.P. Rdzanek, Jr, Z. Engel and W.J. Rdzanek, *Asymptotic formulas for the acoustic power output of a simply supported, circular plate*, to be published in Acustica/Acta Acustica, this work has been realized within the framework of KBN project no. 7T07B 018 12.
- [15] W.P. Rdzanek, Jr and Z. Engel, *The acoustical power radiated by a planar annular plate for the form of vibrations $(0, n)$* , Collected Papers from the Joint Meeting “Berlin 99”, Forum Acusticum, March 14-19, 1999.
- [16] W.P. Rdzanek, Jr and Z. Engel, *Asymptotic formulas for the acoustic power output of a clamped annular plate*, to be published in Applied Acoustics, this work has been realized within the framework of KBN project no. 7T07B 018 12.
- [17] W.P. Rdzanek, Jr, *Sound radiation by vibrating planar annular plate*, Ph.D. thesis, AGH in Crakow, 1999, this work has been realized within the framework of KBN project no. 7T07B 021 17, in polish.