

Wojciech Przystupa
Katedra Zastosowań Matematyki
Akademia Rolnicza w Lublinie

SYMULACJA RUCHU CZĄSTEK NAWOZU PO TARCZY ROZSIEWACZA

Streszczenie

W pracy zbadano wpływ zaburzeń losowych na prędkość cząsteczek nawozu poruszających się wzdłuż łopatki rozsiewacza odśrodkowego. Do opisu ruchu cząsteczek nawozu wykorzystano stochastyczne równanie Langevina.

Słowa kluczowe: model matematyczny, rozsiewacz odśrodkowy, równanie Langevina

Wykaz oznaczeń

ξ	– gaussowski biały szum o wartości średniej równej zero i odchyleniu standardowym dwa,
f_i	– siły deterministyczne,
g_i	– natężenie sił stochastycznych,
h	– krok czasowy,
m	– masa cząstki nawozu,
ω	– prędkość kątowna tarczy,
R_d	– promień tarczy,
g	– przyspieszenie ziemskie,
t	– czas,
μ_v	– współczynnik tarcia między materiałem, z którego wykonana jest łopatka, a cząstką nawozu,
μ_d	– współczynnik tarcia między materiałem, z którego wykonana jest tarcza, a cząstką nawozu,
D	– współczynnik dyfuzji,
Y_1, Y_2, Y_3	– zmienne losowe o rozkładzie gaussowskim o wartości średniej równej zero i odchyleniu standardowym dwa,
V	– prędkość cząstki nawozu.

Wprowadzenie

Na jakość pracy tarczowego zespołu rozsiewającego decydujący wpływ mają parametry geometryczno-kinematyczne tarczy rozsiewającej. Ruch cząstki nawozu podzielić można na dwa okresy: ruch po tarczy i swobodny lot w powietrzu. Do opisu ruchu cząstek nawozu po tarczy rozsiewającej stosuje się deterministyczne równania ruchu [Mieszkalski 1998, Olieslagers i in. 1996]. W równaniach tych nie uwzględnia się oddziaływania cząstek nawozu między sobą. W układach rzeczywistych trajektoria ruchu cząstki podlega zaburzeniom stochastycznym. Do opisu układów dynamicznych poddanych zaburzeniom losowym, stosuje się nieliniowe stochastyczne równania różniczkowe [Riskin 1984, Socha 1993]. Ponieważ analityczne rozwiązywanie stochastycznych równań różniczkowych jest bardzo trudne, zwykle stosuje się metody przybliżone [Socha 1993] lub rozwiązuje się je numerycznie [Kloeden i in. 1992]. W pracy przedstawiono prosty model matematyczny ruchu cząstki nawozu po obracającej się tarczy poddany zaburzeniom losowym.

Numeryczne rozwiązywanie równania Langevina

Rozważmy układ N równań różniczkowych z białym szumem:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i(t)) + g_i \xi(t), \quad i = 1, K, N, \quad (1)$$

Równanie powyższe nosi nazwę równania Langevina. Numeryczne rozwiązanie układu równań Langevina otrzymuje się poprzez scałkowanie wyrażenia (1) po małym przedziale czasu h [Mannella in. 1989, Honeycutt 1992]:

$$\begin{aligned} x_i(h) - x_i(0) &= \int_0^h \dot{x}_i(t) dt \\ &= \int_0^h f_i(x_i(t)) + \int_0^h g_i \xi(t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\Delta x_i \equiv x_i(t) - x_i(0) \quad (3)$$

i rozwińmy siłę deterministyczną f_i w szereg Taylora w otoczeniu punktu $x(0)$,

$$\begin{aligned} f_i(x(t)) &= f_i(x(0)) + \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x(0)) \Delta x_j(t) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f_i(x(0)) \Delta x_k \Delta x_j + K \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$f_i(x(0)) \equiv f_i, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f_i(x(0)) \equiv f_{i,jk}. \quad (6)$$

Po wstawieniu (5) i (6) do wyrażenia (4) otrzymamy

$$f_i(x(t)) = f_i + f_{i,k} \Delta x_k(t) + \frac{1}{2} f_{i,kj} \Delta x_k \Delta x_j + K. \quad (7)$$

Pozostawiając trzy pierwsze wyrazy w powyższym rozwinięciu, a następnie wstawiając je do równania (2) otrzymujemy dla małych wartości $\Delta x_i(t)$ następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned} \Delta x_i(h) = & \int_0^h \{ f_i + f_{i,k} \Delta x_k(t) + \frac{1}{2} f_{i,kj} \Delta x_j(t) \Delta x_k + K \} dt \\ & + \int_0^h \xi(t) g_i dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Uwzględniając w rozwinięciu (7) wyrazy wyższego rzędu, a następnie wstawiając je do równania (2) otrzymujemy przybliżenie $\Delta x_i(h)$ wyższego rzędu. Postępując w ten sposób można otrzymać przybliżenie z dokładnością dowolnego rzędu w h .

Wyrażenie na $x_i(h)$ z dokładnością do h^2 ma postać:

$$\begin{aligned} x_i(h) = & x_i(0) + g_i Z_1(h) + h f_i + f_{i,j} g_j Z_2(h) + \frac{h^2}{2} f_{i,k} f_{i,k} \\ & + \frac{1}{2} g_k g_j f_{i,kj} (Z_1(h) Z_2(h) - Z_3(h)) + K, \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie wielokropek oznacza wyrazy rzędu $h^{5/2}$ i wyższego, a $Z_1(h)$, $Z_2(h)$, $Z_3(h)$ zdefiniowane są następująco

$$Z_1 \equiv \int_0^h \xi(t) dt = \sqrt{h} Y_1, \quad (10)$$

$$Z_2 \equiv \int_0^h \left(\int_0^t \xi(s) ds \right) dt = h^{3/2} \left[\frac{Y_1}{2} + \frac{Y_2}{2\sqrt{3}} \right], \quad (11)$$

$$Z_3 \equiv \int_0^h \left(\int_0^t \xi(s) ds \int_0^t \xi(y) dy \right) dt \cong \frac{h^2}{3} \left(Y_1^2 + Y_3 + \frac{1}{2} \right). \quad (12)$$

Równanie ruchu cząsteczki nawozu

Deterministyczne równanie ruchu cząsteczki nawozu poruszającej się po obracającej się tarczy wzdłuż łopatki ma postać:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m\omega^2 x - mg\mu_d - 2m\omega\mu_v \frac{dx}{dt} \quad (13)$$

Wprowadźmy następujące zmienne bezwymiarowe:

$$\begin{aligned} \tau &= \omega t \\ X &= \frac{x}{R_d} \end{aligned} \quad (14)$$

Po wstawieniu wyrażeń (14) do równania (13) otrzymamy:

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} = X - \frac{g\mu_d}{\omega^2 R_d} - 2\mu_v \frac{dX}{d\tau} \quad (15)$$

W przypadku występowania zaburzeń stochastycznych, równanie różniczkowe drugiego rzędu (15) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= Y \\ \frac{dY}{d\tau} &= X - \frac{g\mu_d}{\omega^2 R_d} - 2\mu_v Y + \sqrt{D}\xi(\tau) \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie $\xi(\tau)$ jest gaussowskim białym szumem, takim że

$$\begin{aligned} \langle \xi(\tau) \rangle &= 0 \quad , \\ \langle \xi(\tau)\xi(\tau') \rangle &= 2\delta(\tau - \tau') \quad . \end{aligned} \quad (17)$$

Wykorzystując wyrażenie (9), równanie (15) można zapisać w następującej postaci, odpowiedniej do symulacji komputerowych:

$$\begin{aligned} X(\tau+h) &= X(\tau) + hY(\tau) \\ Y(\tau+h) &= Y(\tau) + \left\{ X(\tau) - \frac{g\mu_d}{\omega^2 R_d} - 2\mu_v Y(\tau) \right\} h + \sqrt{D}Z_1(h) \end{aligned} \quad (18)$$

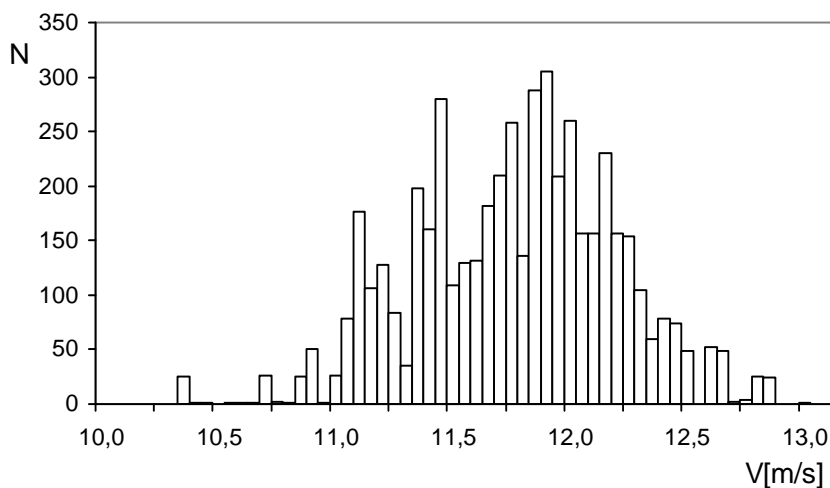
Rozwiązując równanie (18) otrzymujemy składową radialną $\frac{dx}{dt}$ prędkości cząsteczki nawozu. Wartość prędkości cząsteczki nawozu w chwili zejścia z tarczy otrzymujemy z wyrażenia:

$$V = \sqrt{R_d^2 \omega^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \quad (19)$$

Wyniki symulacji komputerowych

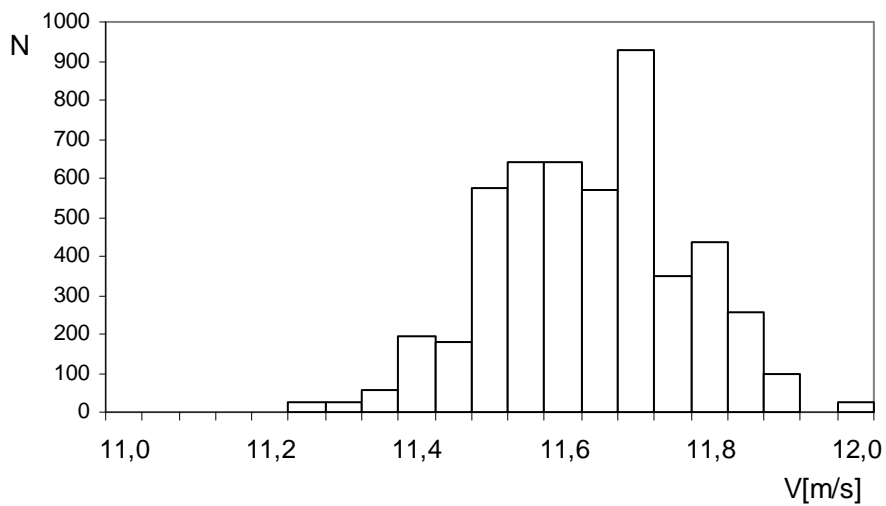
W celu rozwiązania układu równań (16), wykorzystano stochastyczny algorytm (18) o stałym kroku czasowym $h=0,00001$. Obliczenia przeprowadzono dla następujących parametrów: $\mu_v=0,3$, $\mu_d=0,3$, $R_d=0,3m$, $\omega=52,36$ rad/s i $N=5000$ trajektorii.

Na rysunkach 1-3 przedstawiono rozkłady składowej prędkości cząstki wzdłuż łopatkę w chwili zejścia cząstki z obracającej się tarczy. Badania symulacyjne przeprowadzono dla trzech wartości współczynników dyfuzji D . Jak widać na rysunkach 1-3 wraz ze wzrostem wartości współczynnika dyfuzji D zmienia się rozkład prędkości cząstek nawozu. Największe zmiany prędkości cząstek nawozu występują dla współczynnika dyfuzji $D=0,001$, czyli gdy siły stochastyczne działające na cząstkę są największe. Współczynnik D może być wykorzystany do badania wpływu zaburzeń losowych na wartości prędkości cząstek nawozu w chwili zejścia z tarczy. W przypadku gdy $D=0$ otrzymujemy deterministyczne równania ruchu. Ponieważ ruch cząstek w rozsiewaczach tarczowych składa się z dwóch etapów, rozwijając przedstawiony w niniejszej pracy model, należy zbadać wpływ zaburzeń losowych na współczynnik nierównomierności poprzecznej rozsiewu.

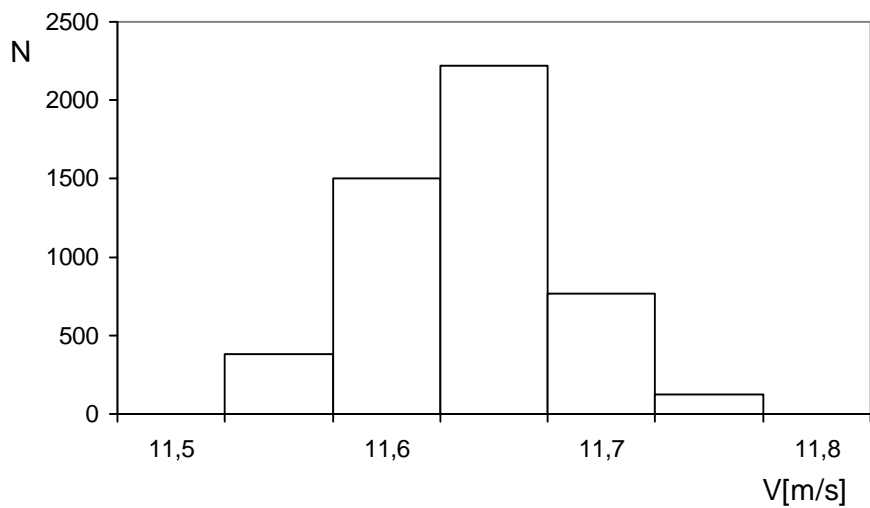


Rys. 1. Rozkład prędkości cząstki dla $D=0,001$

Fig. 1. The distribution of the particles velocities for $D=0,001$



Rys. 2. Rozkład prędkości cząstki dla $D=0,0001$
Fig. 2. The distribution of the particles velocities for $D=0,0001$



Rys. 3. Rozkład prędkości cząstki dla $D=0,00001$
Fig. 3. The distribution of the particles velocities for $D=0,00001$

Podsumowanie

W pracy przedstawiono prosty model matematyczny opisujący ruch cząstki nawozu po obracającej się tarczy uwzględniający zaburzenia losowe jakim podlega cząstka podczas ruchu. Do opisu ruchu cząstki wykorzystano stochastyczne równanie Langevina. Zbadano wpływ natężenia sił stochastycznych na rozkłady składowej prędkości cząstki wzdłuż łopatki w chwili zejścia cząstki z tarczy.

Bibliografia

Mieszkalski L. 1998. Elementy matematycznego opisu wybranych zespołów narzędzi i maszyn rolniczych. Wydawnictwo ART, Olsztyn.

Olieslagers R., Ramon H., Baerdemaeker J. 1996. Calculation of fertilizer distribution patterns from a spinning disc spreader by means of a simulation model. *Journal of Agricultural Engineering Research* Vol. 63: 137-152.

Risken H. 1984. Fokker-Planck equation: Method of solution and applications. Springer Verlag, Berlin.

Socha L. 1993. Równania momentów w stochastycznych układach dynamicznych. PWN, Warszawa.

Kloeden P.E., Platen E. 1992. The numerical solution of stochastic differential equation. Springer Verlag, Berlin.

Mannella R., Palleschi V. 1989. Fast and Precise Algorithm for Computer Simulation of Stochastic Differential Equations. *Physical Review* Vol. A40: 3381-3386.

Honeycutt R.L. 1992. Stochastic Runge-Kutta algorithms. I White Noise. *Physical Review* Vol. A45: 600-604.

SIMULATION OF THE MOTION OF THE FERTILIZER PARTICLES ON DISC SPREADER

Summary

The effect of random fluctuation on the velocity of fertilizer particles moving along a vane of the centrifugal distributor was studied. The stochastic Langevin equation was used for description of the fertilizer particles motion.

Key words: mathematical model, centrifugal distributor, Langevin equation