



# Radialne drgania grubościennego kulistego zbiornika w ośrodku liniowo-sprężystym obciążonego wewnętrznym ciśnieniem produktów wybuchu I. Rozważania teoretyczne

EDWARD WŁODARCZYK, BARTOSZ FIKUS

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki i Lotnictwa,  
00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2, edwardwlodarczyk@wat.edu.pl

**Streszczenie.** Rozwiązano analitycznie problem drgań grubościennego zbiornika kulistego umieszczonego w ośrodku liniowo-sprężystym, wymuszonych wewnętrznym ciśnieniem produktów wybuchu. Określono wpływ dywergentnego transportu energii przez ekspandującą falę naprężeń od zbiornika do otaczającego ośrodka. Redukując grubość ścianki zbiornika do zera ( $\beta = 1$ ), uzyskano jako przypadek szczególny rozwiązanie problemu ekspansji kulistej fali naprężeń w ośrodku sprężystym. Prezentowane rozwiązanie ma walory poznawcze i aplikacyjne. Między innymi pozwala oszacować tłumienie amplitudy drgań zbiornika, wywołanych na przykład awaryjnym wybuchem, przez otaczający go ściśliwy ośrodek.

**Słowa kluczowe:** dynamika ośrodków ciągłych, drgania układów ciągłych, tłumienie dywergentne

## 1. Wprowadzenie

Zagadnienie ekspansji kulistych kawern obciążonych wybuchowo, w tym również grubościennych zbiorników, ma ważne znaczenie teoretyczne i aplikacyjne. Obszerne omówienie tego problemu wraz z przeglądem literatury zamieszczone jest w pracy Hopkinsona [1]. Ostatnio opublikowano z tego zakresu szereg opracowań [2-6], w których wykazano między innymi anomalny wpływ ściśliwości ośrodka sprężystego na dynamikę drgań powierzchni kawerny i ścianki zbiornika.

Istotnym problemem z punktu widzenia teorii zjawisk, a także zastosowań praktycznych, jest ocena stopnia redukcji pola naprężeń w ściance kulistego zbiornika

podczas detonacji w nim mieszaniny wybuchowej, przez dywergentne rozprzestrzenianie się wygenerowanej fali naprężenia w otaczającym go ośrodku stałym. Zagadnienie to rozwiązano w niniejszej pracy analitycznie dla ośrodka liniowo-sprężystego.

## 2. Sformułowanie problemu

Rozważmy radialne drgania grubościennego kulistego zbiornika metalowego, umieszczonego w izotropowym ośrodku liniowo-sprężystym. Zbiornik obciążono w sposób nagły wewnętrznym ciśnieniem produktów wybuchu. Problem jest przestrzennie jednowymiarowy z symetrią kulistą. Dynamiczne stany naprężeń i odkształceń w ściance zbiornika i otaczającym go ośrodku reprezentowane są w sferycznym układzie współrzędnych  $r, \varphi, \theta$  przez następujące składowe główne tensorów naprężenia i odkształcenia:  $\sigma_r$  — naprężenie promieniowe (radialne),  $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$  — naprężenia obwodowe (styczne),  $\varepsilon_r$  — odkształcenie promieniowe (radialne),  $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$  — odkształcenia obwodowe (styczne). Pozostałe składowe wymienionych tensorów w tym układzie współrzędnych są równe zeru. Literą  $u$  oznaczono bieżące radialne przemieszczenie cząstek zbiornika i ośrodka.

Rozwiązanie problemu polega na określeniu wszystkich parametrów zbiornika i otaczającego go ośrodka w postaci funkcji zmiennych niezależnych  $r, t$ , gdzie  $r$  jest bieżącą współrzędną radialną z początkiem w środku zbiornika, a  $t$  oznacza czas. Symbolami  $r_0$  i  $r_1$  oznaczono promienie ścianki zbiornika, odpowiednio — wewnętrznej i zewnętrznej.

Problem rozwiązano w ramach liniowej teorii sprężystości, zgodnie z którą w ściance zbiornika i ośrodka mają miejsce relacje [7, 8]:

$$\varepsilon_r(r, t) = \frac{\partial u(r, t)}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi(r, t) = \varepsilon_\theta(r, t) = \frac{u(r, t)}{r}, \quad (2.1)$$

$$\sigma_r(r, t) - \sigma_\varphi(r, t) = 2\mu [\varepsilon_r(r, t) - \varepsilon_\varphi(r, t)] = 2\mu \left[ \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} - \frac{u(r, t)}{r} \right], \quad (2.2)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (2.3)$$

gdzie  $E$  i  $\nu$  oznaczają odpowiednio moduł Younga i liczbę Poissona. W dalszym ciągu rozważań parametry zbiornika oznaczono dodatkowym indeksem dolnym  $z$ .

Z prawa zachowania masy, zapisanego dla elementu ścianki zbiornika we współrzędnych Lagrange'a,  $r, t$  w symetrii kulistej otrzymuje się:

$$(r + u_z)^2 \left( 1 + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \frac{\rho_{0z}}{\rho_z} r^2, \quad (2.4)$$

gdzie symbole  $\rho_{0z}$  i  $\rho_z$  oznaczają gęstości materiału zbiornika: początkową i bieżącą. Dla umiarkowanych ciśnień nieprzekraczających kilku tysięcy MPa, w przypadku metali można przyjąć, że  $\rho_z \approx \rho_{0z} = \text{const}$ , błąd tego przybliżenia nie przekracza 0,2% [3]. Po uwzględnieniu tego założenia, dla małych odkształceń:  $[\varepsilon_r \varepsilon_\varphi = (u/r) (\partial u/\partial r) \approx 0, \varepsilon_\varphi^2 = (u/r)^2 \approx 0]$ , równanie (2.4) można zredukować do postaci:

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} + 2 \frac{u_z}{r} = 0. \quad (2.5)$$

Z dynamicznej równowagi elementu ścianki zbiornika dla małych odkształceń otrzymuje się:

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{rz} - \sigma_{\varphi z}}{r} = \rho_{0z} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (2.6)$$

Dalej równanie ruchu ośrodka liniowo-sprężystego otaczającego zbiornik ma postać [7]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.7)$$

gdzie

$$c_e^2 = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} c_0^2, \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (2.8)$$

$\rho$  — gęstość ośrodka.

Pola naprężeń w ośrodku sprężystym określone są przez następujące wyrażenia:

$$\sigma_r = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda \frac{u}{r}, \quad (2.9)$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + 2(\mu + \lambda) \frac{u}{r}, \quad (2.10)$$

gdzie

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Warunki brzegowe:

- na wewnętrznej powierzchni ścianki zbiornika, tj. dla  $r = r_0$

$$\sigma_{rz}(r_0, t) = -p(t); \quad (2.11)$$

- na kontakcie powierzchni zbiornika z ośrodkiem, tj. dla  $r = r_1$

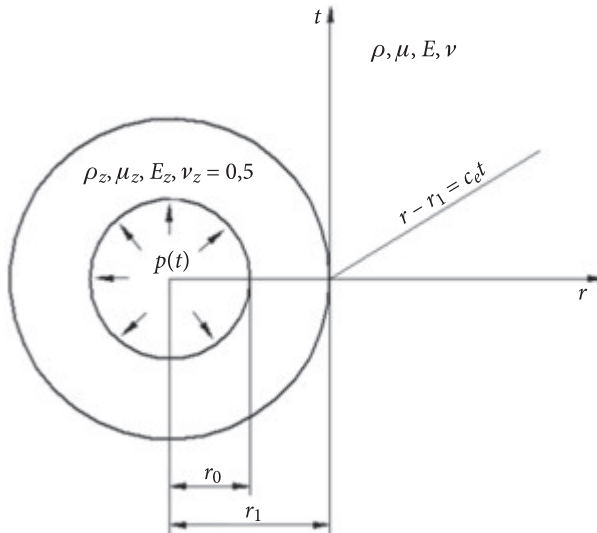
$$u_z(r_1, t) = u(r_1, t), \quad (2.12)$$

$$\sigma_{rz}(r_1, t) = \sigma_r(r_1, t); \quad (2.13)$$

- na froncie fali sprężystej, tj. dla  $r = r_1 + c_e t$

$$u(r_1 + c_e t, t) \equiv 0, \quad (2.14)$$

gdzie  $p(t)$  jest ciśnieniem produktów detonacji mieszaniny wybuchowej. Schemat badanego układu pokazany jest na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat badanego układu

W ten sposób sformułowany matematyczny model problemu, uzupełniony w dalszym ciągu rozważań odpowiednimi warunkami początkowymi, rozwiązano analitycznie w następnym paragrafie.

### 3. Analityczne rozwiązanie problemu

Całka ogólna równania (2.5) ma postać:

$$u_z(r, t) = \frac{C(t)}{r^2}, \quad (3.1)$$

gdzie  $C(t)$  jest ciągłą, dwa razy różniczkowalną funkcją czasu, z tym że  $C(0) = 0$ , bo  $u_z(r, 0) \equiv 0$ .

Następnie z relacji (2.2) i (3.1) wynika, że

$$\sigma_{rz}(r, t) - \sigma_{\varphi z}(r, t) = -6\mu_z \frac{C(t)}{r^3}. \quad (3.2)$$

Po podstawieniu wyrażeń (3.1) i (3.2) do równania (2.6) i scałkowaniu względem  $r$  oraz wykorzystaniu warunku (2.11) otrzymuje się:

$$\sigma_{rz}(r, t) = 4\mu_z \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) C(t) + \rho_z \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \ddot{C}(t) - p(t), \quad (3.3)$$

gdzie  $\ddot{C}(t) = d^2C / dt^2$ .

Dalej, z wyrażeń (3.2) i (3.3) mamy:

$$\sigma_{\varphi z}(r, t) = 2\mu_z \left( \frac{2}{r_0^3} + \frac{1}{r^3} \right) C(t) + \rho_z \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \ddot{C}(t) - p(t). \quad (3.4)$$

Mając na uwadze rozprzestrzenianie się zaburzeń w ośrodku sprężystym od zewnętrznej powierzchni zbiornika w kierunku dodatniego zwrotu współrzędnej  $r$ , ogólne rozwiązanie równania (2.7) można zapisać w postaci:

$$u(r, t) = \frac{\varphi'[r - (r_1 + c_e t)]}{r} - \frac{\varphi[r - (r_1 + c_e t)]}{r^2}, \quad (3.5)$$

gdzie  $\varphi'$  jest pochodną funkcji  $\varphi$  względem jej argumentu.

Zgodnie z relacjami (2.9) i (2.10) oraz równaniem (3.5), pola naprężeń w ośrodku wyrażone za pomocą funkcji  $\varphi$  i jej pochodnych względem argumentu  $[r - (r_1 + c_e t)]$  mają postać:

$$\sigma_r(r, t) = (2\mu + \lambda) \frac{\varphi''}{r} - 4\mu \frac{\varphi'}{r^2} + 4\mu \frac{\varphi}{r^3}, \quad (3.6)$$

$$\sigma_\varphi(r, t) = \lambda \frac{\varphi''}{r} + 2\mu \frac{\varphi'}{r^2} - 2\mu \frac{\varphi}{r^3}, \quad (3.7)$$

$$\sigma_\varphi(r, t) - \sigma_r(r, t) = -2\mu \frac{\varphi''}{r} + 6\mu \frac{\varphi'}{r^2} - 6\mu \frac{\varphi}{r^3}. \quad (3.8)$$

Po podstawieniu rozwiązań (3.1) i (3.5) do warunku (2.12) i kolejnych różniczkowaniach otrzymuje się:

$$\left. \begin{aligned} C(t) &= r_1 \varphi'(-c_e t) - \varphi(-c_e t) \\ \dot{C}(t) &= -r_1 c_e \varphi''(-c_e t) + c_e \varphi'(-c_e t) \\ \ddot{C}(t) &= r_1 c_e^2 \varphi'''(-c_e t) - c_e^2 \varphi''(-c_e t) \end{aligned} \right\}. \quad (3.9)$$

Z kolei z warunku (2.13), po wykorzystaniu relacji (3.3) i (3.6) oraz przekształceniach, dostajemy równanie różniczkowe na funkcję  $\varphi(-c_e t)$ , a mianowicie:

$$\begin{aligned} & \varphi'''(-c_e t) - \frac{\left[ 1 - \frac{r_0}{r_1} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_z} \right) \right]}{r_1 \left( \frac{r_1}{r_0} - 1 \right)} \varphi''(-c_e t) + \\ & + \frac{2 \frac{\rho}{\rho_z} \frac{E_z}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)(1+\nu_z)} \left[ \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^3 + \frac{\mu}{\mu_z} - 1 \right]}{r_1^2 \left( \frac{r_1}{r_0} - 1 \right)} \varphi'(-c_e t) + \\ & - \frac{2 \frac{\rho}{\rho_z} \frac{E_z}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)(1+\nu_z)} \left[ \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^3 + \frac{\mu}{\mu_z} - 1 \right]}{r_1^3 \left( \frac{r_1}{r_0} - 1 \right)} \varphi(-c_e t) = \\ & = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{r_0}{r_1 - r_0} \frac{\rho}{\rho_z} \frac{p(t)}{E}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

W celu jednoznacznego rozwiązania równania (3.10) należy określić wartości początkowe funkcji  $\varphi$  i jej pochodnych, tj.  $\varphi(0)$ ,  $\varphi'(0)$  i  $\varphi''(0)$ . Po podstawieniu wyrażenia (3.5) do warunku (2.14) otrzymuje się:

$$\frac{\varphi'(0)}{r_1 + c_e t} - \frac{\varphi(0)}{(r_1 + c_e t)^2} \equiv 0. \quad (3.11)$$

Tożsamość (3.11) jest spełniona dla dowolnej chwili  $t$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{i} \quad \varphi'(0) = 0. \quad (3.12)$$

Dalej z wyrażeń (3.1) i (3.9)<sub>2</sub> wynika, że

$$\dot{C}(0) = r_1^2 v_z, (r_1, 0) = r_1^2 [-r_1 c_e \varphi''(0) + c_e \varphi'(0)] = 0,$$

gdzie

$$v_z (r_1, 0) = \left. \frac{\partial u_z(r_1, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{\dot{C}(0)}{r_1^2} = 0.$$

Z powyższych relacji, po uwzględnieniu (3.12), dostaje się:

$$\varphi''(0) = 0. \quad (3.13)$$

Okazuje się, że jednorodne wartości początkowe funkcji  $\varphi$  i jej pochodnych spełniają również warunki kinematycznej i dynamicznej ciągłości na froncie fali sprężystej  $r = r_1 + c_e t$ .

W ten sposób badany problem zredukowano do zwyczajnego liniowego równania różniczkowego trzeciego rzędu (3.10), które musi spełnić funkcja  $\varphi(-c_e t)$  z jednorodnymi warunkami początkowymi (3.12) i (3.13).

W celu uproszczenia dalszych zapisów kolejnych wyrażeń wprowadzono następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{r}{r_1}, \quad \eta = \frac{c_0 t}{r_0}, \quad \beta = \frac{r_1}{r_0}, \quad \eta_0 = \frac{x_0}{r_1} = -\frac{c_e}{\beta c_0} \eta, \quad g = \frac{\rho}{\rho_z}, \quad k = \frac{\mu}{\mu_z}, \quad j = \frac{E}{E_z}, \\ P &= \frac{P_0}{E}, \quad S_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{E}, \quad S_{\varphi z} = \frac{\sigma_{\varphi z}}{E}, \quad S_z = \frac{\sigma_{\varphi z} - \sigma_{rz}}{E}, \quad U_z = \frac{u_z}{r_0}, \quad S_r = \frac{\sigma_r}{E}, \\ S_\varphi &= \frac{\sigma_\varphi}{E}, \quad S = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{E}, \quad \varphi(x_0) = r_1^3 \psi(\eta_0), \quad \varphi'(x_0) = r_1^2 \psi'(\eta_0), \\ \varphi''(x_0) &= r_1 \psi''(\eta_0), \quad \varphi'''(x_0) = \psi'''(\eta_0), \end{aligned} \right\}, \quad (3.14)$$

gdzie

$$x_0 = -c_e t, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Po uwzględnieniu bezwymiarowych wielkości (3.14), równanie problemu (3.10) można zapisać w zwartej postaci, a mianowicie:

$$a\psi'''(\eta_0) + b\psi''(\eta_0) + c\psi'(\eta_0) + d\psi(\eta_0) = ep \left( -\frac{x_0}{c_e} \right) / E \quad (3.15)$$

z jednorodnymi warunkami początkowymi:

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0), \quad (3.16)$$

gdzie

$$a = \beta - 1, \quad b = -(\beta - 1 + g), \quad c = -d = \frac{2g(1+\nu)(1-2\nu)}{j(1-\nu)(1+\nu_z)} (\beta^3 - 1 + k), \quad (3.17)$$

$$e = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} g.$$

Zauważmy, że dla  $\beta = 1$  (tj. gdy grubość ścianki zbiornika zredukowana jest do zera i pozostaje tylko kulista kawerna  $r = r_0$ ) czynnik  $a = 0$  i wówczas równanie problemu (3.15), po uwzględnieniu (3.14) i (3.17), można przekształcić do postaci:

$$\varphi''(x_0) - 2h\varphi'(x_0) + \frac{2h}{r_0}\varphi(x_0) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} r_0 p \left( -\frac{x_0}{c_e} \right) / E,$$

gdzie

$$h = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{r_0} \geq 0, \quad x_0 = -c_e t,$$

która pokrywa się z równaniem (3.4) zamieszczonym w pracy [2] — str. 467. Oznacza to, że rozważany w *Shock Waves* (2009) problem ekspansji kulistej fali naprężenia w ośrodku sprężystym, wygenerowanej wybuchem, jest szczególnym przypadkiem badanego tutaj zagadnienia.

Całkę ogólną równania jednorodnego

$$a\psi'''(\eta_0) + b\psi''(\eta_0) + c\psi'(\eta_0) + d\psi(\eta_0) = 0 \quad (3.18)$$

przewidujemy w postaci:

$$\psi_s(\eta_0) = \exp(z\eta_0). \quad (3.19)$$



Po podstawieniu (3.19) do (3.18) otrzymuje się równanie charakterystyczne

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \tag{3.20}$$

którego wyróżnik jest ujemny, tj.

$$\Delta = -4c^3a + c^2b^2 + 18cbad - 27d^2a^2 - 4db^3 < 0.$$

Zatem pierwiastki równania (3.20) przyjmują wartości:

$$z_1 = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{9cba - 27da^2 - 2b^3 + 3a\sqrt{-3\Delta}}{2a^3}} + \left[ \frac{3ca - b^2}{3a^2 \sqrt[3]{\frac{9cba - 27da^2 - 2b^3 + 3a\sqrt{-3\Delta}}{2a^3}}} \right] - \frac{b}{3a}, \tag{3.21}$$

$$z_2 = x_1 + ix_2, \quad z_3 = x_1 - ix_2,$$

gdzie

$$x_1 = \frac{1}{6} \left( -A + \frac{3ac - b^2}{Aa^2} \right) - \frac{b}{3a}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} \left( A + \frac{3ac - b^2}{Aa^2} \right) - \frac{b}{3a},$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{9cba - 27da^2 - 2b^3 + 3a\sqrt{-3\Delta}}{2a^3}}.$$

Jak widać, pierwiastek  $z_1$  jest liczbą rzeczywistą, natomiast  $z_2$  i  $z_3$  są liczbami zespolonymi sprzężzonymi, które generują w rozwiązaniu funkcje trygonometryczne.

Mając na uwadze wymienione wartości pierwiastków, całkę ogólną równania (3.18) można zapisać w postaci:

$$\psi_1(\eta_0) = C_1 \exp(z_1\eta_0) + \exp(x_1\eta_0) [C_2 \sin(x_2\eta_0) + C_3 \cos(x_2\eta_0)]. \tag{3.22}$$

Z dywergentnego transportu energii do ośrodka otaczającego zbiornik przez falę uderzeniową w początkowym etapie wybuchu [1] oraz małego przemieszczenia wewnętrznej powierzchni zbiornika wynika wniosek, że ciśnienie produktów detonacji można aproksymować stałą wartością przyłożoną w sposób nagły  $p \approx p_0 = \text{const}$ . Założenie takie skutkuje oszacowaniem dynamicznych parametrów zbiornika od góry.

Przy takim uproszczeniu całka szczególna równania niejednorodnego (3.15) ma postać:

$$\psi_2 = \frac{e}{d}P, \quad (3.23)$$

a całka ogólna jest sumą

$$\begin{aligned} \psi(\eta_0) &= \psi_1(\eta_0) + \psi_2 = \\ &= C_1 \exp(z_1 \eta_0) + \exp(x_1 \eta_0) [C_2 \sin(x_2 \eta_0) + C_3 \cos(x_2 \eta_0)] + \frac{e}{d}P. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Z funkcji  $\psi(\eta_0)$  i jej pochodnych oraz warunków początkowych (3.16) dla  $\eta_0 = 0$  otrzymuje się układ trzech równań:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= -\frac{eP}{d}, \quad z_1 C_1 + x_2 C_2 + x_1 C_3 = 0, \\ z_1^2 C_1 + 2x_1 x_2 C_2 + (x_1^2 - x_2^2) C_3 &= 0, \end{aligned}$$

z którego po rozwiązaniu mamy:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-\frac{eP}{d} [x_2 (x_1^2 - x_2^2) - 2x_1^2 x_2]}{x_2 (x_1^2 - x_2^2) - 2x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2 z_1 - z_1^2 x_2}, \\ C_2 &= \frac{\frac{eP}{d} [z_1 (x_1^2 - x_2^2) - z_1^2 x_1]}{x_2 (x_1^2 - x_2^2) - 2x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2 z_1 - z_1^2 x_2}, \\ C_3 &= \frac{-\frac{eP}{d} [2z_1 x_1 x_2 - z_1^2 x_2]}{x_2 (x_1^2 - x_2^2) - 2x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2 z_1 - z_1^2 x_2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

W ten sposób określono explicite funkcję  $\psi(\eta_0)$ , która wraz z jej pochodnymi jednoznacznie determinuje wszystkie dynamiczne parametry zbiornika i ośrodka.

#### 4. Parametry charakteryzujące dynamikę zbiornika po wybuchu

Z podanych w częściach 2 i 3 wyrażeń oraz postaci funkcji  $\psi(\eta_0)$  otrzymuje się po przekształceniach następujące relacje określające bezwymiarowe pola: względnego

przemieszczenia, odkształceń i względnych naprężeń w ścianie zbiornika, w funkcji  $\xi = r / r_0$  i  $\eta = c_0 t / r_0$ , a mianowicie:

$$U_z(\xi, \eta) = \frac{u_z}{r_0} = \frac{\beta^3}{\xi^2} \left\{ C_1(z_1 - 1) \exp\left(-\frac{c_e z_1}{c_0 \beta} \eta\right) + A_1 \sin\left(\frac{c_e x_2}{c_0 \beta} \eta\right) + B_1 \cos\left(\frac{c_e x_2}{c_0 \beta} \eta\right) \right\} + -\frac{\beta^3}{\xi^2} \frac{eP}{d}, \quad (4.1)$$

$$A_1 = -\exp\left(-\frac{c_e x_1}{c_0 \beta} \eta\right) \left( (1 - x_1) C_2 + C_3 x_2 \right),$$

$$B_1 = -\exp\left(-\frac{c_e x_1}{c_0 \beta} \eta\right) \left( C_2 x_2 + C_3 (x_1 - 1) \right),$$

$$\varepsilon_{rz}(\xi, \eta) = -\frac{2}{\xi} U_z(\xi, \eta), \quad \varepsilon_{\varphi z}(\xi, \eta) = -\frac{1}{\xi} U_z(\xi, \eta), \quad (4.2)$$

$$S_{rz}(\xi, \eta) = \frac{\sigma_{rz}}{E} = \frac{\sigma_{rz}}{p_0} P = \beta(z_1 - 1) C_1 \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \left[ \frac{2\beta^2}{(1 + \nu_z) j} \left(1 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2}\right) + \frac{(1 - \nu) z_1^2}{(1 + \nu)(1 - 2\nu) g} \right] \exp\left(-\frac{c_e z_1}{c_0 \beta} \eta\right) + \beta \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \exp\left(-\frac{c_e x_1}{c_0 \beta} \eta\right) \left[ A_2 \sin\left(\frac{c_e x_2}{c_0 \beta} \eta\right) + B_2 \cos\left(\frac{c_e x_2}{c_0 \beta} \eta\right) \right] + -P - \frac{2\beta^3}{(1 + \nu_z) j} \left(1 - \frac{1}{\xi^3}\right) \frac{eP}{d},$$

gdzie

$$A_2 = \frac{2\beta^2}{(1 + \nu_z) j} \left[ (1 - x_1) C_2 + x_2 C_3 \right] \left(1 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2}\right) + \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu) g} \left[ \frac{(x_1^3 - 3x_1 x_2^2 - x_1^2 + x_2^2) C_2 + (x_2^3 - 3x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2) C_3}{(x_2^3 - 3x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2) C_3} \right],$$

$$B_2 = \frac{2\beta^2}{(1 + \nu_z) j} \left[ x_2 C_2 + (x_1 - 1) C_3 \right] \left(1 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2}\right) + \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu) g} \left[ \frac{(3x_1^2 x_2 - x_2^3 - 2x_1 x_2) C_2 + (x_1^3 - 3x_1 x_2^2 - x_1^2 + x_2^2) C_3}{(x_1^3 - 3x_1 x_2^2 - x_1^2 + x_2^2) C_3} \right];$$

$$\begin{aligned}
S_z &= S_{\varphi z} - S_{rz} = \\
&= \frac{3\beta^3}{(1+\nu_z)\xi^3} \left\{ \left[ C_1(z_1-1)\exp\left(-\frac{c_e z_1}{c_0\beta}\eta\right) + A_3\sin\left(\frac{c_e x_2}{c_0\beta}\eta\right) + B_3\cos\left(\frac{c_e x_2}{c_0\beta}\eta\right) \right] - \frac{eP}{d} \right. \\
A_3 &= -\exp\left(-\frac{c_e x_1}{c_0\beta}\eta\right) \left( (1-x_1)C_2 + C_3x_2 \right), \\
B_3 &= -\exp\left(-\frac{c_e x_1}{c_0\beta}\eta\right) (C_2x_2 + C_3(x_1-1)).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$S_{\varphi z} = S_z + S_{rz}, \tag{4.5}$$

gdzie  $S_z$  oznacza naprężenie zredukowane (zastępcze),

$$\frac{c_e}{c_0} = \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad \xi = \frac{r}{r_0}, \quad \eta = \frac{c_0 t}{r_0}, \quad \eta_0 = \frac{x_0}{r_1} = -\frac{c_e}{\beta c_0}\eta. \tag{4.6}$$

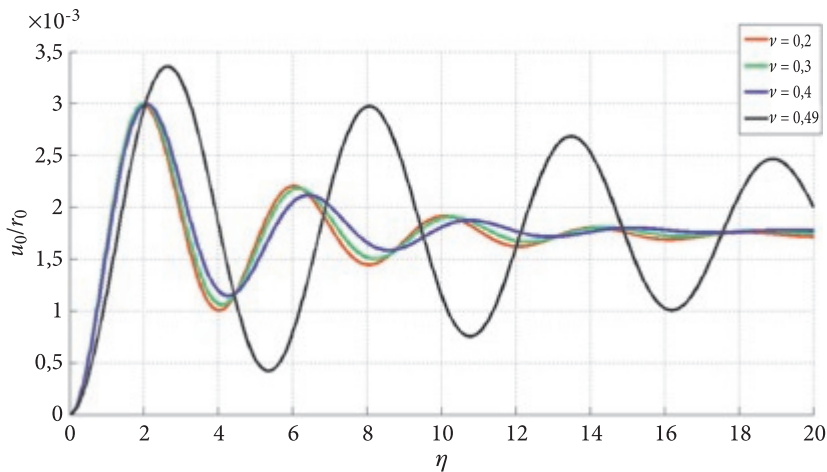
## 5. Wstępna analiza dynamicznych parametrów zbiornika

Przykładowe obliczenia przeprowadzono dla następujących danych:

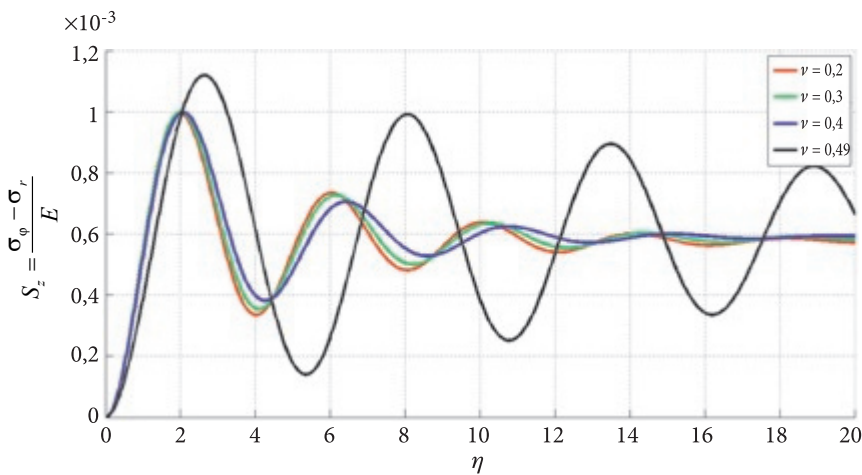
$$\begin{aligned}
E &= 210 \text{ GPa}; p_0 = 500 \text{ MPa}; r_0 = 0,25 \text{ m}; \\
\rho &= 7850 \text{ kg/m}^3; g = 1; j = 1; \beta = 2; \nu_z = 0,5.
\end{aligned}$$

Przykładową zmianę względnego przemieszczenia,  $u_0/r_0$ , wewnętrznej powierzchni zbiornika,  $\xi = 1$ , w funkcji względnego czasu  $\eta = c_0 t/r_0$ , dla kilku wartości liczby Poissona,  $\nu$ , przedstawiono na rysunku 2. Jak się okazuje, parametr  $\nu$ , odpowiedzialny za ścisłość ośrodka, ma istotny wpływ na przebieg zmian funkcji  $u_0(1, \eta)/r_0$ . Można wyróżnić dwa przedziały wartości liczbowych parametru  $\nu$ , w których drganie wewnętrznej powierzchni zbiornika jest tłumione w odmienny sposób. I tak dla  $\nu \leq 0,45$  występuje intensywne zanikanie drgań ścianki zbiornika na skutek dywergentnego rozpraszania energii w ośrodku otaczającym zbiornik. Po kilku cyklach drgań zbiornik zmierza do położenia statycznego. Natomiast w przedziale  $0,45 < \nu \leq 0,5$ , czyli w ośrodkach quasi-ściśliwych, tłumienie drgań maleje wraz ze wzrostem parametru  $\nu$  i dla  $\nu = 0,5$  zanika całkowicie.

Analogiczne wykresy charakteryzujące względne naprężenie zredukowane przedstawiono na rysunku 3. Zmiany tego parametru w funkcji  $\eta$  są podobne do zmian wielkości  $u_0/r_0$  (rys. 2).



Rys. 2. Zmiana względnego przemieszczenia wewnętrznej powierzchni zbiornika,  $u_0/r_0$ , w funkcji  $\eta = c_0 t/r_0$  dla kilku wartości parametru  $\nu$  i  $\beta = 2$



Rys. 3. Zmiana względnego naprężenia zredukowanego,  $S_z = (\sigma_\varphi - \sigma_r)/E$  w funkcji  $\eta = c_0 t/r_0$  dla kilku wartości parametru  $\nu$  i  $\beta = 2$

## 6. Podsumowanie wyników pracy

Określono analitycznie dynamiczną odpowiedź grubościennego metalowego zbiornika umieszczonego w izotropowym liniowo-sprężystym ośrodku i obciążonego wewnętrznym ciśnieniem produktów detonacji, które aproksymowano stałym, nagle przyłożonym obciążeniem. Wyprowadzono zamknięte analityczne wzory określające dynamiczne stany naprężenia i odkształcenia oraz ruchu ścianki zbiornika, a także

otaczającego ośrodka. W granicznym przypadku, redukując grubość ścianki zbiornika do zera ( $\beta = 1$ ), uzyskuje się z prezentowanego zagadnienia, jako przypadek szczególny, rozwiązanie problemu ekspansji kulistej fali naprężenia w ściśliwym ośrodku sprężystym analizowane w literaturze [1, 2].

Wstępna analiza ilościowa problemu pokazuje, że dywergentne rozpraszanie energii ścianki zbiornika w otaczającym go ściśliwym ośrodku sprężystym ma istotny wpływ na tłumienie jej amplitudy drgań po wybuchu. Natomiast wraz ze zmniejszaniem się ściśliwości ośrodka sprężystego tłumienie drgań maleje i dla liczby Poissona  $\nu = 0,5$  (ośrodek nieściśliwy) zanika całkowicie. Pełną analizę jakościową i ilościową dynamiki zbiornika obciążonego wybuchowo w ośrodku sprężystym, opartą na niniejszym analitycznym rozwiązaniu problemu, przedstawimy w drugiej części pracy.

#### LITERATURA

- [1] H.G. HOPKINS, *Dynamic expansion of spherical cavities in metals*, Progress in Solid Mechanics, 1, 1960, 83-164.
- [2] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *Influence of elastic material compressibility on parameters of an expanding spherical stress wave*, Shock Waves, 18, 2009, 465-473.
- [3] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *Influence of elastic material compressibility on parameters of the expanding spherical stress wave. I. Analytical solution to the problem*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 47, 1, 2009, 127-141.
- [4] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *Analysis of the parameters of a spherical stress wave expanding in a linear isotropic elastic medium*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 47, 4, 2009, 761-778.
- [5] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *On the dynamic coefficient of load generating an expanding spherical stress wave in elastic medium*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 49, 2, 2011, 457-475.
- [6] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *Dynamics of a thick-walled spherical casing loaded with a time depending internal pressure*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 46, 1, 2008, 21-40.
- [7] J.D. ACHENBACH, *Wave propagation in elastic solids*, Amsterdam–New York: North–Holland Publ. Co., American Elsevier, 1975.
- [8] R.J. WASLEY, *Stress wave propagation in solids*, New York: An introduction, Marcel Dekker, 1973.

E. WŁODARCZYK, B. FIKUS

#### **Radial vibrations of a thick-walled spherical reservoir loaded with internal pressure into a linear elastic medium. I. Theoretical considerations**

**Abstract.** The problem of radial vibrations of a thick-walled spherical reservoir, loaded with internal pressure of explosion products has been solved here in analytical, closed form. The reservoir is inserted inside an isotropic linear elastic medium. The influence of divergent transport of the energy by expanding stress wave from the reservoir to the surrounding medium is considered. The solution of the problem of the expanding spherical stress wave in linear elastic medium has been obtained here, as a particular case, by reducing the thickness of the reservoir wall to zero value ( $\beta = 1$ ). The presented solution has cognitive and applicable values. For example, it makes possible evaluation of damping of a vibration amplitude of the reservoir wall by surrounding medium during damage explosion.

**Keywords:** dynamics of continuous media, vibrations of engineering systems, divergent damping