

WYBRANE ZAGADNIENIA ANALIZY WŁAŚCIWOŚCI DYNAMICZNYCH AKCELEROMETRÓW W OPARCIU O RACHUNEK RÓŻNICZKOWO-CĄLKOWY NIECĄLKOWITYCH RZĘDÓW

Streszczenie

W artykule przedstawiono badania symulacyjne i laboratoryjne akcelerometru zamodelowanego klasyczną analizą matematyczną oraz wykorzystując rachunek różniczkowo-calkowy niecałkowitych rzędów. Dokonano analizy błędów modeli przetwornika. Wskazano na zalety stosowania rachunku ułamkowego do opisu dynamiki akcelerometrów. Badania symulacyjne wykonano w środowisku programistycznym MATLAB&Simulink.

WSTĘP

Rachunek różniczkowo-calkowy niecałkowitych rzędów (krócej: rachunek ułamkowy), znany szerzej na świecie pod angielską nazwą *fractional calculus* lub francuską *analyse fractionnaire* jest szczególnym przypadkiem nauki o pochodnych i całkach zawartej w klasycznej analizie matematycznej [1], [3], [14] oraz [16].

Badając od 2010 roku literaturę krajową i światową autorzy artykułu zauważyli brak przykładów zastosowania rachunku ułamkowego w miernictwie dynamicznym gdzie właściwości przetworników i układów pomiarowych są opisywane jedynie klasyczną analizą matematyczną, tzn. równaniami różniczkowymi całkowitych rzędów.

W artykule zaprezentowano przykłady badań przetworników pomiarowych do pomiarów przyspieszeń (akcelerometry) w oparciu o rachunek ułamkowy. Akcelerometry – szeroko stosowane w diagnostyce środków transportu szynowego – uznano tutaj za reprezentatywną grupę przetworników pomiarowych ponieważ w klasycznej notacji akcelerometry opisuje się równaniami różniczkowymi drugiego rzędu podobnie jak wiele innych grup przetworników pomiarowych [2], [15] takich jak: czworniki RLC, mechaniczne układy drgające, czujniki pomiarowe przemieszczeń. Ponadto przetworniki liniowe rzędów wyższych od drugiego w stanach przejściowych zachowują się podobnie jak przetworniki liniowe drugiego rzędu. Przetworniki te są szeroko stosowane nie tylko w pojazdach szynowych, ale również w pojazdach mechanicznych, w elektroakustyce itd.

Rezultaty badań nad zastosowaniem rachunku ułamkowego do modelowania akcelerometrów autorzy artykułu przedstawili w recenzowanych artykułach naukowych: [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13] oraz w rozprawie doktorskiej [15].

1. RÓWNANIE DYNAMIKI PRZETWORNIKA POMIAROWEGO NIECĄLKOWITEGO RZĘDU

Dla pochodnej rzędów niecałkowitych można podać definicję Riemanna-Liouville'a, Grünwalda-Letnikowa lub Caputo [3], [14]. Niech, zatem pochodna ułamkowa będzie postaci:

$${}_t D_t^{(\nu)} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h^\nu} \sum_{i=0}^k a_i^{(\nu)} f(t - hi) \right] \quad (1)$$

lub w równoważnej postaci macierzowej:

$${}_t D_t^{(\nu)} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h^\nu} \sum_{i=0}^k a_i^{(\nu)} f(t - hi) \right] \begin{bmatrix} f(t) \\ f(t-h) \\ \dots \\ f(t-kh) \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie:

$$a_i^{(\nu)} = \begin{cases} 1 & i=0 \\ (-1)^i \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\dots(\nu-i+1)}{i!} & i=1,2,3,\dots \end{cases} \quad (3)$$

definiuje się jako różnicę wsteczną funkcji dyskretnej, a h jest przyrostem funkcji $f(t)$ określonym na przedziale $[t_0, t]$:

$$h = \frac{t - t_0}{k} \quad (4)$$

Wprowadzając rząd niecałkowity w równaniu przetwornika pomiarowego [2] drugiego rzędu (akcelerometru) przyjmuje ono postać:

$$\frac{d^2}{dt^2} w(t) + 2\zeta\omega_0 \frac{d}{dt^{(\nu_1)}} w(t) + \omega_0^2 w(t) = -\frac{d^2}{dt^2} x(t) \quad (5)$$

gdzie:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_s}{m}} \text{ - częstotliwość kołowa drgań własnych;}$$

$$\zeta = \frac{B_t}{2\sqrt{k_s m}} \text{ - stopień tłumienia; } m \text{ - masa sejsmiczna;}$$

k_s - stała sprężyny; B_t - współczynnik tłumienia;

x - ruch obiektu względem nieruchomego układu współrzędnych;

y - ruch drgającej masy względem nieruchomego układu współrzędnych;

w - ruch drgającej masy względem drgającego obiektu.

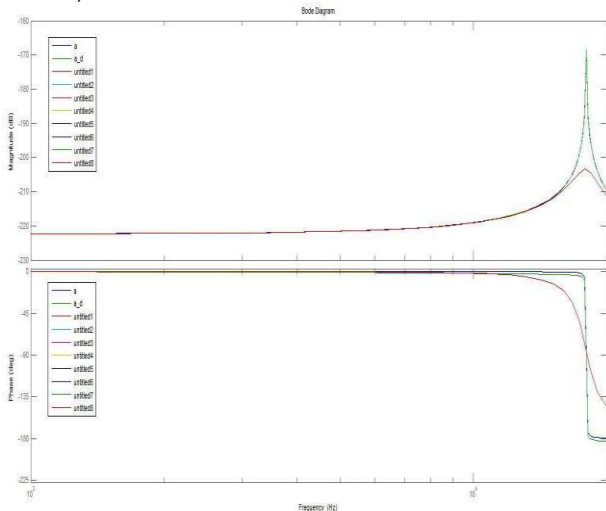
Uogólniając równanie (5) i uwzględniając, że pochodne całkowitych rzędów w rachunku pochodno-calkowym są szczególnym przypadkiem pochodnych niecałkowitych można zapisać:

$$\begin{aligned} A_2 \frac{d^{(\nu_2)}}{dt^{(\nu_2)}} w(t) + A_1 \frac{d^{(\nu_1)}}{dt^{(\nu_1)}} w(t) + A_0 \frac{d^{(\nu_0)}}{dt^{(\nu_0)}} w(t) = \\ = B_2 \frac{d^{(u_2)}}{dt^{(u_2)}} x(t) + B_1 \frac{d^{(u_1)}}{dt^{(u_1)}} x(t) + B_0 \frac{d^{(u_0)}}{dt^{(u_0)}} x(t) \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie: u, ν - pochodne niecałkowitego rzędu.

Metoda porównania modeli przetworników pomiarowych opisaną rachunkiem różniczkowym całkowitych i niecałkowitych rzędów, która została opisana szeroko w publikacjach autorów referatu: [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [13] oraz [15] opierała się na porównaniu różnych modeli dynamiki akcelerometru opartych o równania różniczkowe całkowitych i niecałkowitych rzędów (5) z charakterystykami przetwarzania rzeczywistego akcelerometru w celu jednoznacznej odpowiedzi na pytania, który sposób modelowania

jest dokładniejszy oraz czy istnieją kryteria, dla których jeden z typów modeli lepiej oddaje dynamikę rzeczywistego akcelerometru. Wyniki badań zawierają algorytmy wyznaczania modeli opisujących dynamikę akcelerometru opartych o równania różniczkowe całkowe i niecałkowe rzędu dla definicji Grünwalda-Letnikowa (1), porównanie charakterystyk amplitudowo-fazowych oraz odpowiedzi na typowe wymuszenia modeli o całkowych i niecałkowych rzędach wszystkich typów modeli (symulacje). Poprawność metody, której wyniki przedstawiono w kolejnych rozdziałach referatu sprawdzono wyznaczając logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe dla akcelerometru, dla przyjętych niecałkowych rzędów w równaniu (rysunek 1) uzyskując pożądane przebiegi charakterystyk (pokrywanie się charakterystyk w odpowiednich zakresach).



Rys. 1. Logarytmiczne charakterystyki częstotliwościowe Bodego modelu przetwornika dla $v_1=1,8$ i kolejnych rzędów v_2 od 1,4 do 2,8 [15]

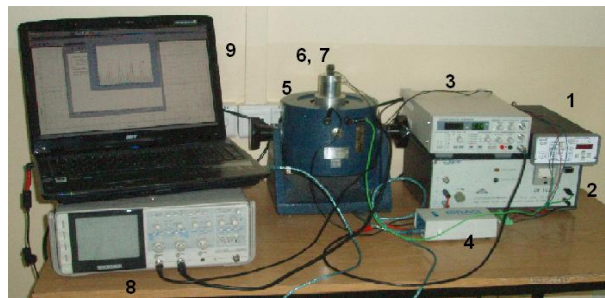
2. MODEL UKŁADU LABORATORYJNEGO PRZETWORNIKA DO POMIARÓW PRZYSPESZEŃ

Dla układu pomiarowego z akcelerometrem przeprowadzono badania symulacyjne i laboratoryjne. Taki układ pomiarowy zbudowano w Laboratorium Przetworników Pomiarowych, w Zakładzie Automatyki i Inżynierii Pomiarowej na Wydziale Transportu i Elektrotechniki Uniwersytetu Technologiczno-Humanistycznego im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu. Widok ogólny układu pomiarowego przedstawiono na rysunku 2.

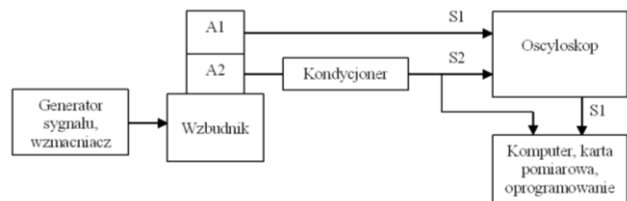
W celu wyznaczenia transmitancji operatorowej przetwornika pomiarowego zamodelowano układ składający się z dwóch akcelerometrów (6), (7), kondycjonera (1) oraz karty pomiarowej μ DAQ USB-26A16 (3). Schemat blokowy układu przedstawiono na rysunku 2b). Zbadano akcelerometr (7) typu DeltaTron firmy Bruel&Kjaer typ 4507 o czułości $10,18\text{mV/ms}^{-2}$ i zakresie mierzonych częstotliwości od 0,4Hz do 6kHz. Zakres pracy kondycjonera wynosił od 1Hz do 20kHz. Przetwornik umieszczono na wzbudniku elektrodynamicznym (5). W jednej osi z badanym przetwornikiem umieszczono wzorcowy akcelerometr (6) firmy VEB Metra typ KB12 o czułości 317mV/ms^{-2} .

Transmitancję operatorową (7) opisującą dynamikę układu pomiarowego wyznaczono za pomocą metody identyfikacji z zewnętrznym wymuszeniem ARX (ang. *AutoRegressive with EXternal input*). Identyfikowanym sygnałem jest sygnał napięciowy z końca badanego toru pomiarowego, sygnałem porównawczym – sygnał z akcelerometru wzorcowego będący odpowiedzią na wymuszenie sinusoidalne z generatora (2) o częstotliwości 100Hz.

a)



b)



Rys. 2. Laboratoryjny układ pomiarowy do badania przetworników drgań mechanicznych: a) widok ogólny: 1 – kondycjoner, 2 – generator, 3 – wzmacniacz, 4 – karta pomiarowa μ DAQ USB-26A16, 5 – wzbudnik, 6, 7 – przetworniki pomiarowe: wzorcowy i badany, 8 – oscyloskop, 9 – komputer; b) schemat blokowy laboratoryjnego układu pomiarowego do badania akcelerometrów: A1 – akcelerometr wzorcowy, A2 – akcelerometr badany [5], [6]

W wyniku działania metody identyfikacji ARX otrzymano transmitancję operatorową $G(s)$ opisującą dynamikę układu (model klasyczny):

$$G(s) = \frac{0,03215s^2 + 1319,6s + 1,338 \cdot 10^6}{s^2 + 4,678 \cdot 10^4 s + 2,309 \cdot 10^7} \quad (7)$$

Na podstawie transmitancji operatorowej (14) wyznaczona została transmitancja dyskretna modelu (*Discrete transfer function of model*):

$$G(z) = \frac{0,03215z^2 - 0,05368z + 0,02163}{z^2 - 1,625z + 0,6264} \quad (8)$$

Model dyskretny klasyczny (8) otrzymano dyskretyzując model klasyczny (14) metodą „Zero-Order-Hold” z czasem próbkowania: $T_p = 10^{-4}$ s, dla którego spełnione jest twierdzenie Nyquista doboru częstotliwości próbkowania.

Modele dyskretny quasi-ułamkowe (*Discrete transfer function of fractional models*), wyznaczono metodą zaimplementowaną w MATLAB&Simulink. Dla różnych przyrostów h modele quasi-ułamkowe przetwornika mają postać transmitancji dyskretnych:

$$G_{f_1}(z) = \frac{3,228z^2 - 6,443z + 3,215}{100,5z^2 - 200,5z + 100} \quad (9a)$$

dla: $h = 10^{-7}$;

$$G_{f_2}(z) = \frac{3,347z^2 - 6,562z + 3,215}{104,7z^2 - 204,7z + 100} \quad (9b)$$

dla: $h = 10^{-6}$;

$$G_{f_3}(z) = \frac{4,548z^2 - 7,75z + 3,215}{104,7z^2 - 246,8z + 100} \quad (9c)$$

dla: $h = 10^{-5}$;

$$G_{f_4}(z) = \frac{1,775z^2 - 1,963z + 0,322}{59,09z^2 - 66,78z + 10} \quad (9d)$$

dla: $h = 10^{-4}$;

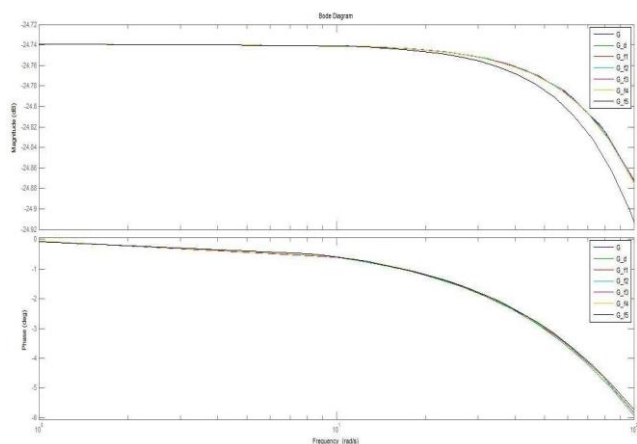
$$G_{f_5}(z) = \frac{2,69z^2 - 1,384z + 0,032}{70,87z^2 - 48,78z + 1} \quad (9e)$$

dla: $h = 10^{-3}$.

Następnie dokonano porównania modelu rzeczywistego układu pomiarowego w postaci dyskretnej transmitancji oraz modeli zapisanych równaniem różniczkowo-całkowym. Obydwa typy modeli wyznaczono na podstawie modelu klasycznego uzyskanego za pomocą metody identyfikacji ARX.

Symulacje wykonano metodą całkowania ode3 dla sinusoidalnego sygnału wejściowego o częstotliwości 100Hz.

Na rysunku 3 przedstawiono logarymiczne charakterystyki częstotliwościowe amplitudy i fazy modeli układu pomiarowego. Na rysunku można zaobserwować, że dla przyjętych przyrostów h , który jest miernikiem dokładności różniczkowania charakterystyki wyraźnie nie pokrywają się. Oznacza to, że należy przyjmować inne przyrosty h , dużo mniejsze od częstotliwości próbkowania.



Rys. 3. Charakterystyki częstotliwościowe Bodego modeli przetwornika pomiarowego o transmitancji (8) – (9e) [15]

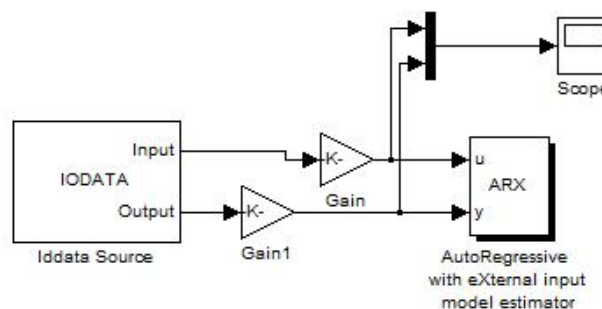
3. IDENTYFIKACJA DYNAMIKI PRZETWORNIKA POMIAROWEGO

W celu identyfikacji dynamiki przetwornika pomiarowego zbudowano układ pomiarowy przedstawiony na rysunku 2. Zbadano akcelerometr (7) DeltaTron firmy Bruel&Kjaer typ 4507 o czułości 10,18mV/ms⁻² i zakresie mierzonych częstotliwości od 0,3Hz do 6kHz. Zakres pracy kondycjonera (1) wynosił od 1Hz do 20kHz. Przetwornik umieszczono na wzбудniku elektrodynamicznym (5). W jednej osi z badanym przetwornikiem umieszczono wzorcowy akcelerometr (6) firmy VEB Metra typ KB12 o czułości 317mV/ms⁻². Sygnałem wejściowym były drgania płyty wzбудnika (5) pobudzanego sygnałem sinusoidalnym z generatora (2). Sygnałem wzorcowym był sygnał z przetwornika KB12 (6) a sygnałem badanym sygnał z przetwornika 4507 (7).

Głównym celem przeprowadzonego wyżej badania była identyfikacja modelu matematycznego przetwornika pomiarowego (6) na podstawie sygnałów otrzymanych z obu przetworników: wzorcowego (7) i badanego (6). Zastosowano tutaj metodę identyfikacji ARX

(rysunek 4) porównując sygnał badany z sygnałem wzorcowym i na tej podstawie wyznaczając transmitancję dyskretną badanego przetwornika.

Metoda ARX podobnie jak inne modele estymatorów dostępne w MATLAB&Simulink przeznaczone są do identyfikacji poprzez analizę sygnałów w układach. Biblioteka *System Identification Toolbox* umożliwia utworzenie i weryfikację modelu matematycznego układu (np. transmitancja lub równania stanu) na podstawie znajomości sygnałów wejściowych i wyjściowych układu, z możliwością zadania rzędu budowanego modelu. *System Identification Toolbox* jest wyposażony w interfejs graficzny GUI. Sygnały zostały pobrane za pomocą karty pomiarowej μ DAQ USB-26A16 (4). Czas próbkowania w metodzie ARX przyjęto 10⁻⁴s, dla którego było spełnione kryterium Nyquista doboru częstotliwości próbkowania, taki sam jak dla karty pomiarowej (4). Zbadano sygnały napięciowe, które następnie zostały przeliczone na przyspieszenie.

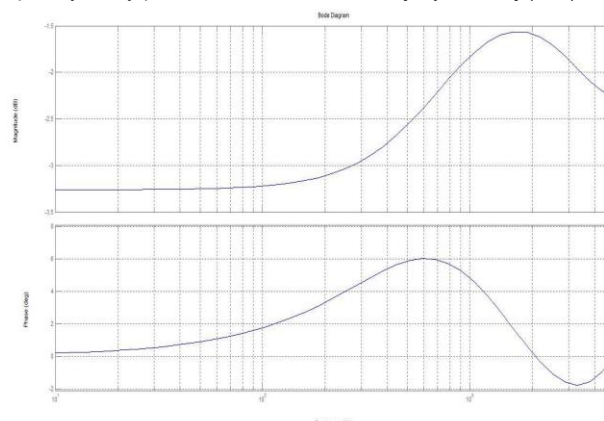


Rys. 4. Model układu pomiarowego do identyfikacji ARX badanego przetwornika [9], [15]

W wyniku metody identyfikacji ARX (rysunek 4) uzyskano transmitancję dyskretną badanego przetwornika pomiarowego (model przetwornika pomiarowego) w postaci:

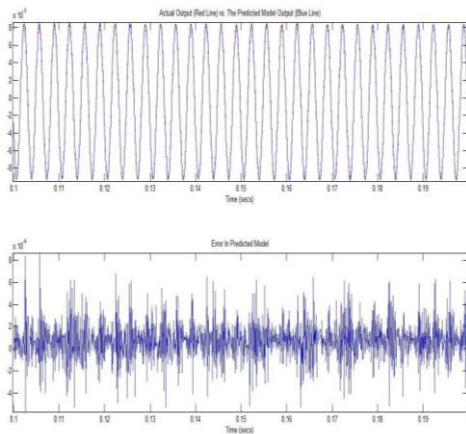
$$G(z) = \frac{0,79196z^2 + 0,51435z}{z^2 - 0,6439z + 0,048034} \quad (10)$$

Na rysunku 5 przedstawiono częstotliwościowe charakterystyki amplitudy i fazy przetwornika o transmitancji dyskretniej (10).



Rys. 5. Charakterystyki amplitudowa i fazowa modelu (10) przetwornika pomiarowego

W wyniku działania metody identyfikacji ARX sygnał z modelu przetwornika pomiarowego i przebieg z przetwornika wzorcowego mają taką samą amplitudę i nie ma przesunięcia fazowego między tymi sygnałami (rysunek 6). Na rysunku można zaobserwować, że błąd będący różnicą pomiędzy odpowiedzią otrzymanego modelu (10) a sygnałem wzorcowym (błąd predykcji) jest rzędu 10⁻⁴.

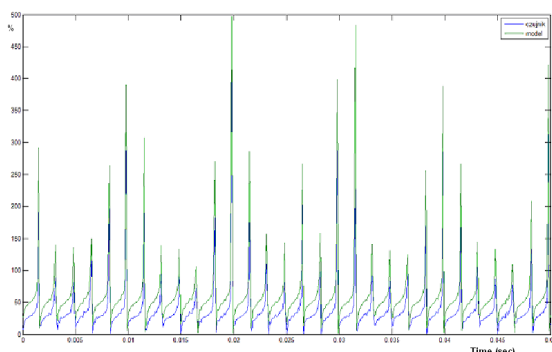


Rys. 6. Przebieg metody identyfikacji ARX: a) Sygnały wchodzące na blok identyfikacji ARX: niebieski – wzorcowy, czerwony – identyfikowany; b) Działanie bloku identyfikacji ARX: na górze – identyfikowany przebieg (czerwony) i przebieg z modelu (niebieski); na dole – przebieg błędów trakcie identyfikacji [9]

4. ANALIZA BŁĘDÓW POMIARÓW

W wyniku przeprowadzonych badań laboratoryjnych wyznaczono błędy względne i bezwzględne pomiarów. Wyznaczone błędy pomiarów są błędami bezpośrednimi – otrzymane z rzeczywistych sygnałów pobranych za pomocą karty pomiarowej μ DAQ USB-26A16. Nie mają one charakteru losowego i są zdeterminowane transmitancją operatorową (lub transmitancją dyskretną) przetwornika pomiarowego. Transmitancja dyskretna przetwornika pomiarowego (10) zależy od przyjętej metody jej wyznaczenia: tj. od metody ARX, czułości oraz parametrów badanego przetwornika.

Na rysunku 7 przedstawiono procentowy przebieg błędu względnego przetwornika wzorcowego oraz wyznaczonego modelu przetwornika. Z rysunku można odczytać, że okres całego pomiaru ma wartość 0,05s. Dla okresu próbkowania 10^{-4} s otrzymano 500 próbek pomiaru. Zaobserwowane na rysunku duże wartości pików błędów wynikają z wyznaczania błędu dla przebiegów zmiennych w czasie, które zmieniają swe wartości od plusowych do minusowych.



Rys. 7. Charakterystyki przebiegów błędu względnego przetwornika wzorcowego i modelu przetwornika [9]

Przyjęto, że miarą dokładności odtwarzania dynamicznego przebiegu przez badany przetwornik oraz model tego przetwornika będzie mediana błędu względnego. Mediana zwana też wartością środkową to wartość cechy w szeregu uporządkowanym, powyżej i poniżej której znajduje się jednakowa liczba obserwacji. W badanym przypadku (przebieg sinusoidalny o częstotliwości 300Hz) mediana dla przebiegów błędów wynosi: dla błędu względnego przetwornika: 29,1945%; dla błędu względnego modelu: 29,5564% (Tabela 2).

Tab. 1. Fragment wyników pomiarów w arkuszu kalkulacyjnym Microsoft Excel.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
	Przypięcie z przetwornika wzorcowego [m/s ²]	Przypięcie z przetwornika badane [m/s ²]	Przypięcie z modelu przetwornika badane [m/s ²]	Błąd względny pomiaru przetwornika badane [%]	Błąd względny pomiaru przetwornika [%]	Mediana błędów względnego pomiaru przetwornika [%]	Mediana błędów względnego pomiaru przetwornika [%]	Przypięcie z modelu całkowitego [m/s ²]	Błąd względny pomiaru przetwornika [%]	Mediana błędów względnego pomiaru przetwornika całkowitego [%]
2	Chw 0									
3	0	-0,00437	-0,00404	-0,00346	7,755798	20,804	29,1945	29,5564	-0,00346	20,80404
4	0,0001	-0,00637	-0,00529	-0,00502	16,94836	21,10667			-0,00504	20,80407
5	0,0002	-0,00836	-0,00654	-0,00642	21,756	23,27751			-0,00662	20,80413
6	0,0003	-0,00988	-0,00759	-0,00741	23,18786	24,96786			-0,00783	20,80413
7	0,0004	-0,01125	-0,00837	-0,00829	25,61643	26,28481			-0,00891	20,80416
8	0,0005	-0,01214	-0,00892	-0,00881	26,48077	27,41813			-0,00961	20,80419
9	0,0006	-0,01261	-0,00915	-0,00902	27,42751	28,48857			-0,00998	20,80423
10	0,0007	-0,01274	-0,00905	-0,00899	28,57111	29,45944			-0,01009	20,80427
11	0,0008	-0,01238	-0,00865	-0,00861	30,13443	30,48687			-0,00981	20,80432
12	0,0009	-0,01148	-0,00805	-0,00783	29,87131	31,76941			-0,00909	20,80439
13	0,001	-0,01044	-0,00701	-0,007	32,84358	33,00616			-0,00827	20,80448
14	0,0011	-0,00883	-0,0058	-0,00575	34,24096	34,88332			-0,00699	20,80461
15	0,0012	-0,00702	-0,00445	-0,00439	36,67756	37,53437			-0,00556	20,80481
16	0,0013	-0,00497	-0,0029	-0,00287	41,63852	42,21656			-0,00393	20,80519
17	0,0014	-0,00263	-0,00127	-0,00117	51,93921	55,64033			-0,00209	20,80628
18	0,0015	-0,00039	0,000356	0,000429	190,6635	209,3224			-0,00031	20,81938

Tabela 1 przedstawia fragment pomiarów dla sygnału drgań sinusoidalnych o częstotliwości 300Hz, dla którego przeprowadzono identyfikację przetwornika pomiarowego, o czasie próbkowania 0,0001s dla 500 kolejnych próbek. Wykonanie badań dla większej ilości próbek nie zmienia znacząco (4 miejsce po przecinku) wyników median błędów.

Wartości błędu względnego przetwornika i modelu dla różnych częstotliwości pokazano w Tabeli 2.

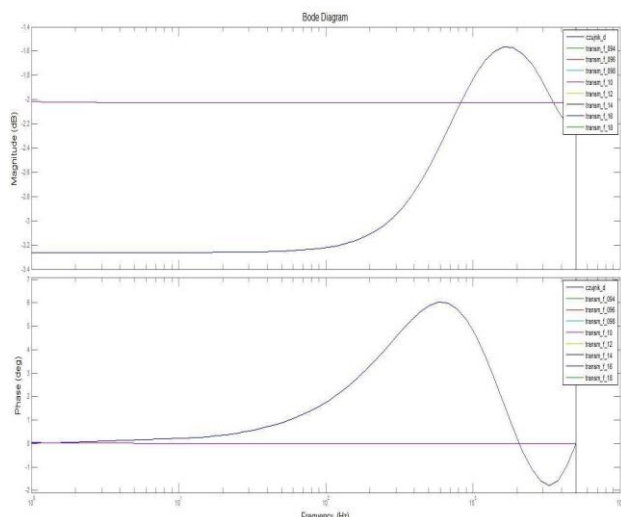
Tab. 2. Wartości błędu względnego przetwornika i modelu przetwornika

Częstotliwość [Hz]	Błąd względny przetwornika [%]	Błąd względny modelu przetwornika [%]
100	45,2213	30,8089
200	22,9227	30,2997
300	29,1945	29,5564
400	70,6078	28,3097
500	90,5626	26,0184

Błąd względny dla modelu przetwornika w przybliżeniu przyjmuje te same wartości. Im większa różnica częstotliwości badanego przebiegu od przebiegu, przy którym wykonano identyfikację, tym różnica między błędem względnym przetwornika, a błędem względnym modelu jest większa.

5. PORÓWNANIE MODELU AKCELEROMETRU CAŁKOWITEGO I NIECAŁKOWITEGO RZĘDU

W celu sprawdzenie czy model oparty o zapis równania opisującego dynamikę obiektu w postaci niecałkowitych rzędów lepiej odtwarza sygnał wzorcowy od modelu „klasycznego”, na podstawie modelu o transmitancji (10) przetwornika otrzymanego metodą ARX, wyznaczono grupę modeli z równaniami o niecałkowitych rzędach. Badania rozpoczęto od jednego niecałkowitego rzędu v_1 odpowiadającego za tłumienie (równanie (5)). Rząd pochodnej v_1 zmienia się w zakresie wartości od 0,94 do 1,08 z krokiem 0,02.



Rys. 8. Charakterystyki amplitudowe i fazowe dla zapisu typu niecałkowitego $\nu_1 = 1$ (kolor czerwony) i klasycznego zapisu (kolor niebieski)

Z przedstawionych charakterystyk (rysunek 8) wynika, że dla modelu ułamkowego przetwornika rozszerza się liniowy zakres przetwarzania tzn.: przesunięcie fazowe w zakresie od około 1Hz w górę jest równe 0 przy stałym wzmacnieniu amplitudy równej w przybliżeniu -2dB. W modelu klasycznym przetwornika stałe przesunięcie fazowe występuje do wartości około 10Hz oraz stałe wzmacnienie amplitudy równe w przybliżeniu dla częstotliwości od 3,2Hz do częstotliwości 60Hz. W przypadku modelu ułamkowego przetwornika nastąpiło rozszerzenie zakresu częstotliwości pomiarowych, przy którym występuje stałość amplitudy i fazy. Wartości mediany błędu względnego modelu przetwornika całkowitego i niecałkowitego rzędu przedstawiono w Tabeli 3.

Tab. 3. Wartości mediany błędu względnego modelu przetwornika całkowitego i niecałkowitego rzędu

Częstotliwość [Hz]	Mediana błędu względnego modelu całkowitego rzędu [%]	Mediana błędu względnego modelu niecałkowitego rzędu [%]	Różnica [%]
100	30,8089	20,8040	10,0049
200	30,2997	20,8041	9,4956
300	29,5564	20,8042	8,7522
400	28,3097	20,8039	7,5058
500	26,0184	20,8040	5,2144

W Tabeli 3 przedstawiono wartości mediany błędu względnego dla modelu o całkowitych i niecałkowitych rzędach. Mediana błędu względnego modelu przetwornika niecałkowitego rzędu jest w przybliżeniu stała dla wszystkich badanych częstotliwości i wynosi 20,8%. W przypadku modelu przetwornika całkowitego rzędu największa wartość mediany błędu względnego otrzymano dla najmniejszej częstotliwości 100Hz a najmniejszą wartość mediany błędu względnego dla największej częstotliwości 500Hz. Analogicznie przeprowadzono badania dla przetwornika z niecałkowitym rzędem ν_2 .

WNIOSKI

W zakresie modelowania elementów i układów dynamicznych ogromne znaczenie ma poszukiwanie nowych modeli, które charakteryzowałyby się wyższym stopniem uniwersalności i obejmujących szeroką klasę przypadków, a w szczególności modeli wyprzedzają-

cych aktualny poziom wiedzy konstrukcyjnej i materiałowej. W tym nurcie lokuje się temat referatu, poświęcony analizie właściwości dynamicznych akcelerometrów w oparciu o rachunek różniczkowy niecałkowitych rzędów.

Autorzy artykułu opracowali model matematyczny przetwornika pomiarowego charakteryzujący się bardziej ogólnym i bardziej uniwersalnym charakterem, pozwalającym objąć w przyszłości nowe rozwiązania konstrukcyjne lub materiałowe, które nie były dotychczas stosowane. Filarem przedstawionych badań jest opracowana w ramach rozprawy doktorskiej [15] uogólniona metoda opisu właściwości dynamicznych przetworników drgań mechanicznych – akcelerometrów, bazująca na rachunku różniczkowo-całkowym niecałkowitych rzędów, pozwalająca na opisanie właściwości dynamicznych szerokiej klasy przetworników pomiarowych, tj. całkowitych i niecałkowitych rzędów.

Wyniki proponowanych w artykule badań mają odpowiedzieć na pytania związane z zasadnością modelowania dynamiki akcelerometrów za pomocą równań różniczkowych o niecałkowitych rzędach, a w szczególności odpowiedzieć na pytanie „Czy odejście od klasycznego modelowania dynamiki za pomocą równań różniczkowych całkowitych rzędów na rzecz rzędów niecałkowitych jest uzasadnione z punktu widzenia dokładności modelowania dynamiki?”.

Otrzymane wyniki, choć skupiające się nad badaniem modelowania dynamiki akcelerometrów, będą miały znaczenie dla modelowania dynamiki bardzo szerokiej grupy czujników i przetworników pomiarowych ze względu na typowy zapis dynamiki w postaci równań różniczkowych. Ponieważ ten sposób modelowania jest powszechnie przyjętym nie tylko do modelowania obiektów, ale i zjawisk, zakłada się, że wyniki badań będą mieć znaczenie w rozważaniach nad ogólnym i powszechnym zastosowaniem równań różniczkowo-całkowych niecałkowitych rzędów do modelowania zjawisk fizycznych.

BIBLIOGRAFIA

1. Busłowicz M., *Wybrane zagadnienia z zakresu liniowych ciągłych układów niecałkowitego rzędu*. Pomiary Automatyka Robotyka nr 2/2010.
2. Chwaleba A., Luft M., *Właściwości i projektowanie wybranych przetworników mechano-elektrycznych*. Zakład Poligraficzny Politechniki Radomskiej, Wyd. II popr. i uzupeł., ISBN 83-88001-00-0, Radom 1998.
3. Kaczorek T., *Selected Problems of Fractional Systems Theory*. Springer-Verlag GmbH, 344 pages, ISBN 978-3-642-20501-9, Berlin, Germany 2011.
4. Luft M., Cioć R., Pietruszczak D., *Analysis of selected dynamic properties of quasi-fractional-order measuring transducer used in transportation facilities*. Archives of Transport System Telematics, Volume 7, Issue 3, pp. 17-21, September 2014, ISSN 1899-8208, Katowice 2014.
5. Luft M., Cioć R., Pietruszczak D., *Fractional calculus in modelling of measuring transducers*. ELECTRONICS AND ELECTRICAL ENGINEERING, Nr. 4(110), ISSN 1392-1215 (print), ISSN 2029-5731 (online), Kaunas, Lithuania 2011.
6. Luft M., Łukasik Z., Szychta E., Cioć R., Pietruszczak D., *Selected issues of fractional calculus in mathematical modelling of measuring transducers used in transportation facilities*. Scientific Journals Maritime University of Szczecin 29(101), pp. 109-116, ISSN 1733-8670, Szczecin 2012.
7. Luft M., Pietruszczak D., Szychta E., *Analysis of dynamic properties of accelerometer using fractional derivatives*. COMMUNICATIONS - Scientific Letters of the University of Zilina, ISSN 1335-4205, EDIS – Publishing Institution of the University of Zilina, Zilina, Slovak Republic, 2015, artykuł przyjęty do druku

8. Luft M., Szychta E., Cioć R., Pietruszczak D., *Effect of fractional orders in differential equation describing damping in the measuring transducer*. Communications in Computer and Information Science, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
9. Luft M., Szychta E., Cioć R., Pietruszczak D., *Application of fractional calculus in identification of the measuring system*. Transport Systems and Processes, CRC Press Balkema, Taylor & Francis Group, pp. 63-68, ISBN 978-0-415-69120-8, London, UK, 2011.
10. Luft M., Szychta L., Nowocień A., Cioć R., Pietruszczak D., *Charakterystyki częstotliwościowe modelu przetwornika ciśnienia opisanego równaniem różniczkowym niecałkowitego rzędu*. Logistyka 4(2015), ISSN 1231-5478, str. 4539-4545, Poznań 2015.
11. Luft M., Szychta E., Pietruszczak D., *Some applications of fractional calculus to the analysis of dynamic properties of selected measuring transducer*. THE 11TH EUROPEAN CONFERENCE OF YOUNG SCIENTISTS AND POSTGRADUATE STUDENTS, Transcom Proceedings 2015, Section 4, Electric Power System, Electrical and Electronic Engineering, ISBN 978-80-554-1046-3, pp. 29-34, 22-24 June 2015, Zilina, Slovak Republic, 2015.
12. Nowocień A., Luft M., Pietruszczak D., *Zastosowanie rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitych rzędów w nauce i technice*. Logistyka nr 3/2014, Poznań 2014.
13. Pietruszczak D., Szychta E., *Analysis of selected dynamic properties of fractional order accelerometers for application in telematics equipment*. Communications in Computer and Information Science, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
14. Ostalczyk P., *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowanie w automatyce*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, ISBN 978-83-7283-245-0, Łódź 2008.
15. Pietruszczak D., *Analiza właściwości układów pomiarowych wielkości dynamicznych z wykorzystaniem rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów*. 155 stron, Biblioteka Główna Uniwersytetu Technologiczno-Humanistycznego im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, (maszynopis), Radom 2012.
16. Podlubny I., *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Academic Press, 368 pages, ISBN 0125588402, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto, 1999.

elements are also indicated. Tests are executed in the MATLAB&Simulink programme.

Autorzy:

Prof. **Mirosław Luft** – Wydział Transportu i Elektrotechniki, Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, Polska, e-mail: m.luft@uthrad.pl

Dr inż. **Daniel Pietruszczak** – Wydział Transportu i Elektrotechniki, Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, Polska, e-mail: d.pietruszczak@uthrad.pl

Prof. **Elżbieta Szychta** – Wydział Transportu i Elektrotechniki, Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, Polska, e-mail: e.szychta@uthrad.pl

Prof. **Leszek Szychta** – Wydział Elektrotechniki, Elektroniki, Informatyki i Automatyki, Instytut Mechatroniki i Systemów Informatycznych, Politechnika Łódzka, ul. Stefanowskiego 18/22, 90-924 Łódź, Polska, e-mail: leszek.szychta@p.lodz.pl

APPLICATION OF FRACTIONAL CALCULUS TO ANALYSIS OF SELECTED DYNAMIC PROPERTIES OF ACCELEROMETER

Abstract

The paper presents simulation and laboratory studies of measuring transducers (accelerometers) which were modelled in the classical differential equations as well as fractional calculus. Measurement errors are examined and a comparison to classical and fractional models in terms of dynamic properties is made. The advantages of fractional calculus in modelling dynamic