

Tomasz Janusz TELESZEWSKI

Politechnika Białostocka, WBiIŚ
ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok
E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl

Wyznaczenie nieustalonego przepływu laminarnego cieczy lepkiej w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego przy wykorzystaniu metody MEB

1 Wprowadzenie

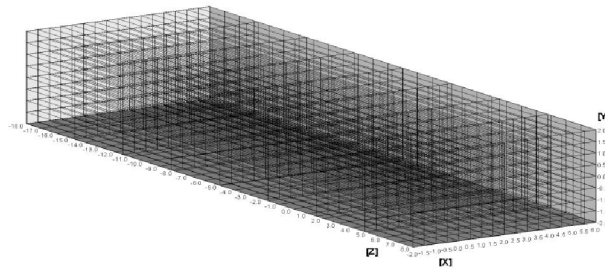
W pracy przedstawiono rozwiązanie niestacjonarnego laminarnego przepływu w przewodach prostoosiowych metodą elementów brzegowych (MEB).

Nieustalony przepływ laminarny ($c_x=0$, $c_y=0$) w przewodzie prostoliniowym opisany jest następującym równaniem różniczkowym [1]:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial c_z}{\partial t} \quad ; \quad v = \frac{\mu}{\rho} \quad , \quad (1)$$

gdzie: c_z oznacza prędkość przepływu, p jest to ciśnienie, t jest to czas, μ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej, ν jest współczynnikiem lepkości kinematycznej, natomiast ρ jest gęstością płynu.

W klasycznych metodach obszarowych [2, 3, 4] stosuje się skomplikowane i pracochłonne siatki przestrzenne. Wyprowadzony w publikacji algorytm pozwala zastąpić skomplikowaną siatkę przestrzenną wewnątrz przewodu (rys. 1) brzegiem przekroju poprzecznego przewodu. Przedstawiony poniżej algorytm MEB przepływu cieczy lepkiej w przewodach prostoliniowych został zaimplementowany w autorskim programie obliczeniowym VISCOUS UNSTEADY FLOW DUCT w języku Fortran.



Rys. 1. Przykładowa przestrzenna siatka kanału prostokątnego stosowana w symulacji przepływu w przewodach prostoosiowych w metodach obszarowych

Fig. 1. Structured mesh for rectangular channel using in mesh method

Zagadnienie nieustalonego ruchu laminarnego cieczy lepkiej w najogólniejszym przypadku jest rozumiane jako zjawisko tzw. rozbiegu hydraulicznego, kiedy na ciecz wypełniającą przewód pozostającą w bezruchu działa od pewnej chwili wymuszenie hydrauliczne w postaci stałej różnicy ciśnienia wzdłuż osi przewodu lub w przypadku, kiedy w pewnej chwili rozpoczyna się ruch przewodu ze stałą prędkością w stosunku do cieczy wypełniającej przewód.

2 Brzegowe równanie całkowe opisujące nieustalony laminarny przepływ cieczy lepkiej

Równanie (1) rozwiązuje się analogicznie do równania Fouriera w teorii przewodnictwa cieplnego. [5]. Zakładając warunek zerowej prędkości na brzegu L , gradient ciśnienia w przekroju kanału Λ oraz przedział czasu $[t^0; t^K]$, rozwiązaniem różniczkowanego równania (1) jest następujące równanie całkowe:

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{p})c_z(\mathbf{p}, t) + \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^t \int_{(L_f)} g_z(\mathbf{q}, t) N(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t^K, t) dL_{gq} dt = \\ \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^{t_K} \int_{(L_2)} c_z(\mathbf{q}, t) F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t^K, t) dL_{gq} dt + \\ \iint_{\Lambda} c_z(\mathbf{q}, t^0) N(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t^K, t^0) dL_{gq} d\Lambda + \\ \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^{t_K} \iint_{(\Lambda)} \frac{dp}{dz}(\mathbf{v}, t) N(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t^K, t) d\Lambda dt \end{aligned} \quad (2)$$

$(\mathbf{p}), (\mathbf{q}) \in L; (\mathbf{v}) \in \Lambda$

gdzie:

$$N(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t^K, t) = \frac{1}{4\pi\nu(t^K - t)} \exp\left(\frac{-(r_{pq})^2}{4\nu(t^K - t)}\right) \quad (2a)$$

$$r_{pq} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$$

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t^K, t) = \frac{\mu((x_p - x_q)n_x + (y_p - y_q)n_y)}{8\pi\nu^2(t^K - t)} \exp\left(\frac{-(r_{pq})^2}{4\nu(t^K - t)}\right) \quad (2b)$$

$$r_{pq} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$$

$$[n_x, n_y] = \left[\frac{\delta y_q}{\delta L_q}, -\frac{\delta x_q}{\delta L_q} \right]$$

$$N(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t^K, t^0) = \frac{1}{4\pi\nu(t^K - t^0)} \exp\left(\frac{-(r_{pv})^2}{4\nu(t^K - t^0)}\right) \quad (2c)$$

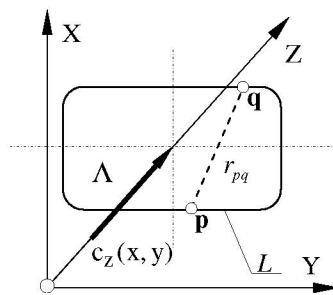
$$r_{pv} = |\mathbf{p} - \mathbf{v}|$$

$$N(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t^K, t) = \frac{1}{4\pi\nu(t^K - t)} \exp\left(\frac{-(r_{pv})^2}{4\nu(t^K - t)}\right) \quad (2d)$$

$$r_{pv} = |\mathbf{p} - \mathbf{v}|$$

gdzie: n_x oraz n_y są to wersory normalnej do brzegu (L).

Współczynnik $\chi(\mathbf{p})$ związany jest z położeniem rozpatrywanego punktu brzegowego, w przypadku gładkiego fragmentu brzegu $\chi(\mathbf{p})=0.5$, natomiast gdy $(\mathbf{p}) \in \Lambda$: $\chi(\mathbf{p})=1.0$.



Rys. 2. Szkic do analizy zagadnienia brzegowego w przekroju przewodu prostoliniowego

Fig. 2. Sketch to consideration of boundary conditions in cross-section of duct

Po wyznaczeniu gęstości $g_z(\mathbf{q}, t)$ na linii brzegowej (L), prędkość $c_z(\mathbf{p}, t)$ w dowolnym punkcie obszaru (Λ) wyznacza się z zależności:

$$\begin{aligned} c_z(\mathbf{p}, t) = & \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^{t_K} \int_{(L_g)} c_z(\mathbf{q}, t) F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t^K, t) dL_{gq} dt - \\ & \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^t \int_{(L_f)} g_z(\mathbf{q}, t) N(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t^K, t) dL_{fq} dt + \\ & \iint_{\Lambda} c_z(\mathbf{q}, t^0) N(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t^K, t^0) dL_{gq} d\Lambda + \\ & \frac{1}{\rho} \int_{t_0}^t \iiint_{(\Lambda)} \frac{dp}{dz}(\mathbf{v}, t) N(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t^K, t) d\Lambda dt \end{aligned} \quad (3)$$

$$(\mathbf{p}), (\mathbf{v}) \in \Lambda, (\mathbf{q}) \in L$$

3 Weryfikacja numerycznego modelu

W celu wykonania weryfikacji przedstawionego algorytmu porównano rozwiązania numeryczne MEB dla przepływu płynu o jednostkowym promieniu R i jednostkowej lepkości przez przewód kołowy ze znanym rozwiązaniem teoretycznym [6], [7]:

$$\frac{c}{c_{\max}}(r) = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8J_0\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{vt}{R^2}\right); c_{\max} = \frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dz}, \quad (4)$$

gdzie: c_{\max} jest to maksymalna prędkość w przewodzie kołowym, J_0 są to funkcje Bessela pierwszego rodzaju, natomiast λ_n są to miejsca zerowe funkcji Bessela.

Zgodność równania teoretycznego (4) z eksperymentem została potwierdzona w [8].

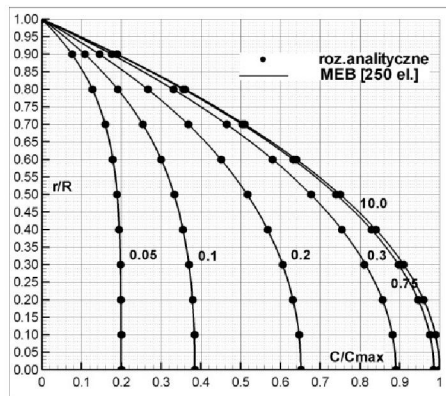
Błąd rozwiązania metody elementów brzegowych wyznaczono z zależności:

$$\delta_{c_{\text{MEB}}} = \left| \frac{c_{\text{TEO}}/c_{\text{maxTEO}} - c_{\text{MEB}}/c_{\text{maxMEB}}}{c_{\text{TEO}}/c_{\text{maxTEO}}} \right| * 100\%, \quad (5)$$

gdzie: c_{MEB} jest to prędkość wyznaczona metodą elementów brzegowych, natomiast c_{TEO} jest rozwiązaniem teoretycznym (4) [6, 7].

W tabeli 1 zestawiono błąd metody MEB dla brzegu składającego się z 50 i 250 liniowych elementów po czasie $t=0.40$ [s]. Wzrost dyskretyzacji brzegu powoduje zmniejszenie błędu metody elementów brzegowych.

Graficzne rezultaty porównania wyników obliczeń metody elementów brzegowych z rozwiązaniem teoretycznym (4) po czasie $t=0.05; 0.1; 0.2; 0.3; 0.75; 10.0$ [s] zostały przedstawione na rysunku 3.



Rys. 3. Porównanie rezultatów obliczeń MEB z rozwiązaniem teoretycznym (4) [6, 7]
 Fig. 3. Comparison of BEM results with theoretical solution (4) [6, 7]

*Wyznaczenie nieustalonego przepływu laminarnego cieczy lepkiej
w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego
przy wykorzystaniu metody MEB*

*Tab. 1. Rozbieg hydrauliczny płynu lepkiego w przewodzie okrągłym ($t=0.40[s]$)
- błąd rozwiązania MEB*

*Tab. 1. Instantaneous velocity profiles for starting flow in a pipe with circular cross
section ($t=0.40[s]$) - error analysis applied in BEM*

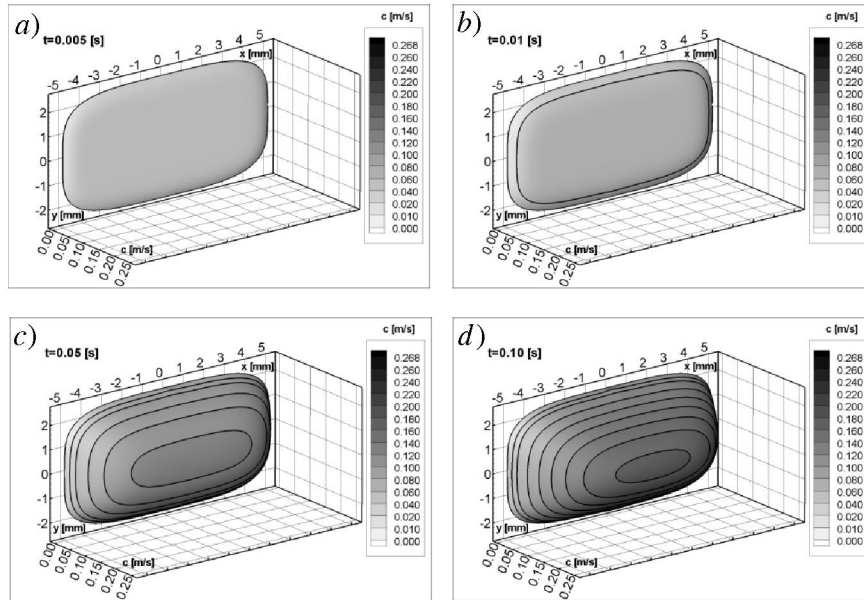
Lp.	Współrz. węzłów	Roz. teoretyczne	Roz. num. MEB 50el.	Błąd met. MEB 50 el.	Roz. num. MEB 250el.	Błąd met. MEB 250 el.
-	r [m]	$C_{TEO}/C_{MAX\ TEO}$ [-]	$C_{MEB}/C_{MAX\ MEB}$ [-]	δC_{MEB} [%]	$C_{MEB}/C_{MAX\ MEB}$ [-]	δC_{MEB} [%]
1	0,0E+00	8,9037E-01	9,0948E-01	2,1464E+00	8,9920E-01	9,9185E-01
2	1,0E-03	8,8195E-01	9,0076E-01	2,1330E+00	8,9040E-01	9,5832E-01
3	2,0E-03	8,5662E-01	8,7452E-01	2,0899E+00	8,6400E-01	8,6180E-01
4	3,0E-03	8,1418E-01	8,3068E-01	2,0271E+00	8,1996E-01	7,1038E-01
5	4,0E-03	7,5430E-01	7,6920E-01	1,9755E+00	7,5812E-01	5,0655E-01
6	5,0E-03	6,7655E-01	6,8992E-01	1,9757E+00	6,7840E-01	2,7292E-01
7	6,0E-03	5,8042E-01	5,9264E-01	2,1054E+00	5,8056E-01	2,4185E-02
8	7,0E-03	4,6531E-01	4,7716E-01	2,5456E+00	4,6448E-01	1,7941E-01
9	8,0E-03	3,3062E-01	3,4327E-01	3,8251E+00	3,2994E-01	2,0735E-01
10	9,0E-03	1,7572E-01	1,8372E-01	4,5549E+00	1,7664E-01	5,2569E-01
11	1,0E-02	0,0000E+00	0,0000E+00	-	0,0000E+00	-

4 Przykłady obliczeniowe

Poniżej przedstawiono przykład symulacji rozbiegu hydraulicznego przepływu obliczonego metodą elementów brzegowych programem VISCOUS UNSTEADY FLOW DUCT w przewodzie, którego brzeg został zadany krzywą Lamego ($n=4$, $a=5.0$ [mm], $b=2.5$ [mm]):

$$\left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1 \quad (6)$$

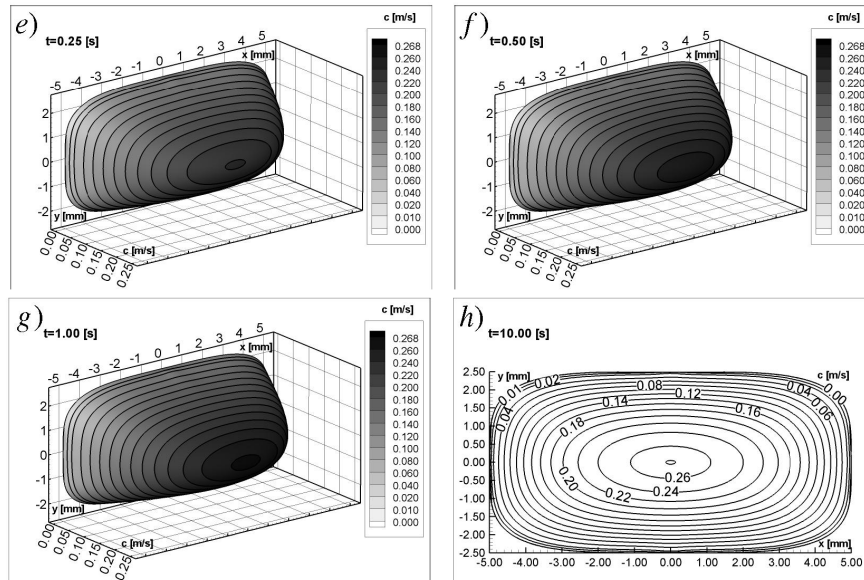
Symulację wykonano dla glikolu etylenowego ($\mu=0.021329$ [Pa*s], $\rho=1115.6$ [kg/m³]). Graficzne rezultaty obliczeń pól prędkości po czasie 0.005, 0.01, 0.05, 0.10, 0.25, 0.50, 1.00, 10.00 [s] zostały przedstawione na rysunkach: 4a-d, 5a-d. Obliczenia wykonano dla brzegu składającego się z 1000 linowych elementów.



Rys. 4. Rozbieg hydrauliczny w przewodzie prostoosiowym o przekroju zadanym krzywą Lamego wyznaczony metodą MEB: a) $t=0.005$ [s], b) $t=0.01$ [s], c) $t=0.05$ [s], d) $t=0.10$ [s]

Fig.4. Starting flow in a superellipse channel - BEM solution: a) $t=0.005$ [s], b) $t=0.01$ [s], c) $t=0.05$ [s], d) $t=0.10$ [s]

Wyznaczenie nieustalonego przepływu laminarnego cieczy lepkiej
w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego
przy wykorzystaniu metody MEB



Rys. 5. Rozbieg hydrauliczny w przewodzie prostoosiowym o przekroju zadanym krzywą Lamego wyznaczony metodą MEB: a) $t=0.25$ [s], b) $t=0.50$ [s], c) $t=1.00$ [s], d) $t=10.00$ [s]

Fig.5. Starting flow in a superellipse channel - BEM solution: a) $t=0.005$ [s], a) $t=0.25$ [s], b) $t=0.50$ [s], c) $t=1.00$ [s], d) $t=10.00$ [s]

5 Podsumowanie

Przedstawiony algorytm metody elementów brzegowych pozwala w sposób efektywny rozwiązywać zagadnienia nieustalonych przepływów w przewodach prostoliniowych niezależnie od kształtu przekroju przewodu. Metody analityczne pozwalają rozwiązać tylko najprostsze przypadki przepływu niestacjonarnego w przewodach, natomiast alternatywne metody siatkowe wymagają wykonywania pracochłonnych przestrzennych siatek. Mały błąd metody MEB w porównaniu ze znanym rozwiązaniem analitycznym świadczy o dużej dokładności algorytmu. Zakres stosowania metody może być poszerzony o przepływy w mikrokanalach, tam, gdzie makroprzepływy są zgodne z mikroprzepływami [9]. Obecnie metoda elementów brzegowych należy do intensywnie rozwijających się. Na szczególną uwagę zasługuje fakt, iż jest bardzo konkurencyjna w stosunku do najczęściej stosowanych metod siatkowych.

Literatura

1. Batchelor G. K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press 2000
2. Chung T. J.: *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*. Mc-Graw-Hill, New York 1978
3. Zieniewicz O. C., Taylor R. L.: *The Finite Element Method Fluid Dynamics*, Fifth Edition Vol. 3, Elsevier Singapore 2005

4. Versteeg H. K., Malalasekera W.: *Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method*, NY, 1995
5. Brebbia C. A., Telles J. F. C., Wrobel L. C.: *Boundary element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, NY, 1984
6. Szymanski G.: Quelques solutions exactes des équations d'hydrodynamique du fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 9e série, tom 11, p. 67-108, 1932
7. White F. M.: *Viscous Fluid Flow*, Third Edition McGraw-Hill Mechanical Engineering, 2005
8. Lefebvre P. J., White F. M.: Experiments on Transition to Turbulence in a Constant-Acceleration Pipe Flow, *Journal of Fluids Engineering*, vol. 111, Issue 4, p. 428-432, 1989
9. Sharp K. V.; Adrian, R. J.: Transition from laminar to turbulent flow in liquid filled microtubes, *Experiments in Fluids*, vol. 36, Issue 5, p. 741-747, 2004

Streszczenie

W publikacji przedstawiono algorytm metody elementów brzegowych nieustalonego przepływu laminarnego cieczy lepkiej w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego. Weryfikacja metody elementów brzegowych została wykonana poprzez porównanie rezultatów obliczeń MEB ze znanym rozwiązaniem analitycznym w postaci rozbiegu hydraulicznego w przewodzie o przekroju kołowym. W publikacji wykonano przykładowe symulacje przepływów niestacjonarnych, dla których nie są znane rozwiązania analityczne. W celu wykonania walidacji metody oraz symulacji napisano autorski program obliczeniowy VISCOUS UNSTEADY FLOW DUCT w języku Fortran.

Słowa kluczowe: metoda elementów brzegowych, przepływy niestacjonarne, przewody prostoosiowe

Application Boundary Element Method to calculate unsteady flows in a duct with arbitrary cross-section

Summary

The paper presents the numerical application Boundary Element Method to calculate unsteady flows in a duct with arbitrary cross-section. The efficiency and the credibility of proposed algorithm were verified by numerical tests. This algorithm can be used to calculate unsteady flows in a duct with arbitrary cross-section e.g. starting flow in a duct. Numerical examples are presented. The computer program VISCOUS UNSTEADY FLOW DUCT was written in Fortran programming languages.

Keywords: boundary element method, duct with arbitrary cross-section, unsteady flows

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy statutowej nr S/WBiIS/5/2011.