

dr inż. Barbara MAZUR-CHRZANOWSKA^a, Rafał CHRZANOWSKI^b

^a Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Szczecinie, Edukacja Techniczno-Informatyczna
Higher School of Technology and Economics in Szczecin, Informatics and Technical Education

^b Uniwersytet Szczeciński, Wydział Matematyczno-Fizyczny, Katedra Edukacji Informatyczno-Technicznej (*absolwent*)
University of Szczecin, Faculty of Mathematics & Physics, Department of Informatics & Technical Education (*graduate*)

MODELOWANIE PARAMETRÓW PRACY BELKI WSPORNIKOWEJ OBCIĄŻONEJ RÓWNOMIERNIE SIŁĄ CIĄGLĄ NA CAŁEJ DŁUGOŚCI Z INTERPRETACJĄ W PROGRAMIE *MATHEMATICA*

Streszczenie

Wstęp i cel: W pracy pokazano modelowanie analityczno-numeryczne belki jednostronnie utwierdzonej o przekroju prostokąta i obciążoną równomiernie siłą ciągłą na całej długości belki. W pracy pokazano wyprowadzenie równania ugięcia belki oraz wzorów na kąt ugięcia i strzałkę ugięcia belki. Celem pracy jest analiza numeryczno-graficzna funkcji kąta ugięcia belki i funkcji strzałki ugięcia belki.

Materiał i metody: Wykorzystano model mechaniczny belki bazując na literaturze z wytrzymałości materiałów. Zastosowano metodę analityczną i numeryczną z programem *Mathematica*.

Wyniki: Z otrzymanych równań uzyskano wzory na kąt ugięcia i strzałkę ugięcia belki. Wykorzystując program *Mathematica* przeprowadzono analizę numeryczną dla wybranych parametrów pracy belki jak siła ciągła, długość belki i moduł Younga materiału belki badając parami ich wzajemne zależności.

Wniosek: Stosując program *Mathematica* można przeprowadzić analizę wytrzymałościową funkcji kąta ugięcia i strzałki ugięcia belki dla odpowiednich parametrów.

Słowa kluczowe: Belka wspornikowa, jednostronnie utwierdzona, przekrój prostokątny, obciążenie równomierne siłą ciągłą, model teoretyczny, analiza numeryczna, *Mathematica*.

(Otrzymano: 01.03.2016; Zrecenzowano: 05.03.2016; Zaakceptowano: 10.03.2016)

MODELLING OF WORKING PARAMETRES FOR ONE-SIDEDLY FIXED CANTILEVERED BEAM LOADED WITH A CONTINUOUS FORCE EVENLY IN ALONG THE LENGTH WITH INTERPRETATION IN *MATHEMATICA* PROGRAM

Abstract

Introduction and aim: The study shows the analytical and numerical modeling of cantilevered beam with a rectangular cross section and loaded with a continuous force evenly in along beam length. The study shows the derivation of equations and formulas for beam deflection angle and deflection of the beam. The aim of the study is to numerical and graphical analysis for function of deflection angle of the beam and function of the beam deflection.

Material and methods: In this paper has been shown a beam mechanical model based on the literature of the strength of materials. The analytical and numerical method by using *Mathematica* program have been described in the paper.

Results: From these equations were obtained formulas for the angle of deflection and deflection of the beam. Using *Mathematica* numerical analysis was performed for selected operating parameters beams as a continuous force, the length of the beam and Young's modulus of the beam material examining their interaction pairs.

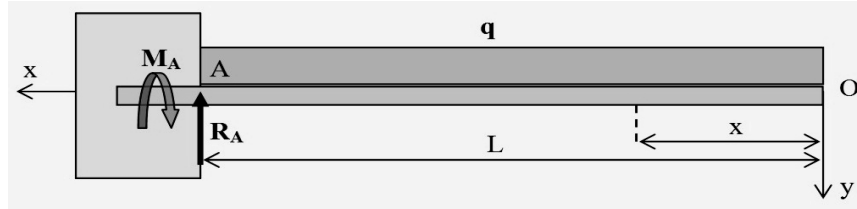
Conclusion: Using *Mathematica* it is possible to perform strength analysis for function of deflection angle and for function of beam deflection for the relevant parameters.

Keywords: Cantilevered beam, one-sidedly fixed, rectangular cross-section, loaded evenly by a continuous force, theoretical model, numerical analysis, *Mathematica*.

(Received: 01.03.2016; Revised: 05.03.2016; Accepted: 10.03.2016)

1. Model analityczny belki wspornikowej

Belka wspornikowa o długości L i o stałym przekroju w kształcie prostokąta o szerokości b i wysokości h jest obciążona siłą ciągłą q rozłożoną równomiernie na całej długości belki (Rys. 1) [5], [6], [8].



Rys. 1. Belka wspornikowa obciążona równomiernie siłą ciągłą q

Źródło: Opracowanie własne Autorów na podstawie [3]

Fig. 1. The cantilever beam uniformly loaded by continuous force q

Source: Elaboration of the Authors basing [3]

Przy obciążeniu belki wspornikowej siłą ciągłą q rozłożoną równomiernie na całej długości belki, moment M w przekroju o odciętej x wyraża się w postaci skalarnej wzorem [7]:

$$M = -\frac{q}{2} \cdot x^2. \quad (1)$$

Zatem równanie różniczkowe linii ugięcia belki wspornikowej ma postać [11]:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{2} \cdot x^2, \quad (2)$$

gdzie iloczyn EJ oznacza sztywność belki na zginanie. Równanie (2) obustronnie całkujemy względem zmiennej x :

$$EJ \int \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] dx = \frac{q}{2} \int x^2 dx. \quad (3)$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy:

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{q}{6} x^3 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Stałą C_1 wyznaczymy z warunku doskonałego utwierdzenia belki w punkcie A. Warunek ten wyraża fakt, że przekrój belki w tym miejscu nie obraca się. Fakt ten oznacza, że zgięta oś belki pozostanie styczna do osi odciętych w punkcie A. Zatem warunek brzegowy ma postać:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (5)$$

Wykorzystując warunek brzegowy (5) w równaniu (4) i po uporządkowaniu mamy:

$$C_1 = -\frac{qL^3}{6}. \quad (6)$$

Podstawiając wyznaczoną stałą C_1 do równania (4) i po podzieleniu obu jego stron przez stałą EJ dostajemy następującą jego postać:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{6EJ} x^3 - \frac{qL^3}{6EJ}. \quad (7)$$

Podstawiając $x = 0$ w równaniu (7) znajdziemy wartość kąta ϑ_0 nachylenia stycznej na końcu belki (kąt ugięcia belki):

$$\vartheta_0 \equiv \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{qL^3}{6EJ}. \quad (8)$$

Równanie różniczkowe (7) obustronnie całkujemy względem zmiennej x :

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \frac{q}{6EJ} \int x^3 dx - \frac{qL^3}{6EJ} \int dx. \quad (9)$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy:

$$y(x) = \frac{q}{24EJ} x^4 - \frac{qL^3}{6EJ} x + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Stałą C_2 wyznaczymy z drugiego warunku brzegowego, który zakłada, że ugięcie belki w miejscu utwierdzenia jest równe zeru. Zatem warunek ten ma postać:

$$y(x=L) = 0. \quad (11)$$

Wykorzystując warunek brzegowy (11) w równaniu (10) uporządkowaniu mamy:

$$C_2 = \frac{qL^3}{8EJ}. \quad (12)$$

Podstawiając wyznaczoną stałą C_2 do równania (10) dostajemy następującą jego postać:

$$y(x) = \frac{q}{24EJ} x^4 - \frac{qL^3}{6EJ} x + \frac{qL^3}{8EJ}. \quad (13)$$

Równanie (13) jest równaniem linii ugięcia belki wspornikowej o długości L oraz sztywności EJ obciążonej siłą ciągłą q rozłożoną równomiernie na całej długości belki.

Największe ugięcie belki czyli wartość strzałki ugięcia f jaka powstaje na swobodnym końcu belki wspornikowej otrzymamy, gdy w równaniu (13) położymy $x=0$:

$$f \equiv y(x=0) = \frac{qL^3}{8EJ}. \quad (14)$$

Rozwiązując równanie (14) względem EJ otrzymujemy:

$$EJ = \frac{qL^3}{8f}. \quad (15)$$

Zależność (15) oznacza, że sztywność zginania belki przy tych samych warunkach obciążenia i podparcia jest odwrotnie proporcjonalna do strzałki ugięcia sprężystego.

Po wprowadzeniu momentu bezwładności do wzorów (8) i (14) otrzymujemy wygodny w obliczeniach numerycznych wzór na kąt ugięcia belki

$$\vartheta_0 = -\frac{2q}{E \cdot b} \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^3, \quad (16)$$

i strzałkę ugięcia belki:

$$f = \frac{3q}{2E \cdot b} \left(\frac{L}{h}\right)^3. \quad (17)$$

2. Analiza numeryczna w programie *Mathematica*

Do analizy numerycznej przyjmuje się wartości parametrów dla belki jednostronnie utwierdzonej i obciążonej siłą ciągłą na całej jej długości, które są podane w tabeli 1. Przyjmuje się również, że belka o przekroju prostokątnym jest wykonana ze stali węglowej pospolitej [2], [10]. W analizie numerycznej bada się funkcję kąta ugięcia $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$ oraz funkcję strzałki ugięcia belki $f = f(q, E)$.

Tabela 1. Dane do analizy numerycznej dla belki obciążonej siłą ciągłą q równomiernie rozłożoną
Table 1. Data for numerical analysis for beam loaded by a continuous force q evenly in along the length

Oznaczenie:	Parametr:	Wartość:	
q	Wartość siły ciągłej	2,0 – 4,0 kg	19,6 – 39,2 N
L	Długość belki wspornikowej	50 – 100 cm	0,5 – 1,0 m
b	Szerokość belki wspornikowej	4,0 cm	0,04 m
h	Wysokość belki wspornikowej	0,6 cm	0,006 m
E	Moduł Younga (<i>stal węglowa pospolita</i>)	$2,1 \times 10^5$ – $2,2 \times 10^5$	MPa

Źródło: Opracowanie Autorów
Source: Elaborated by the Authors

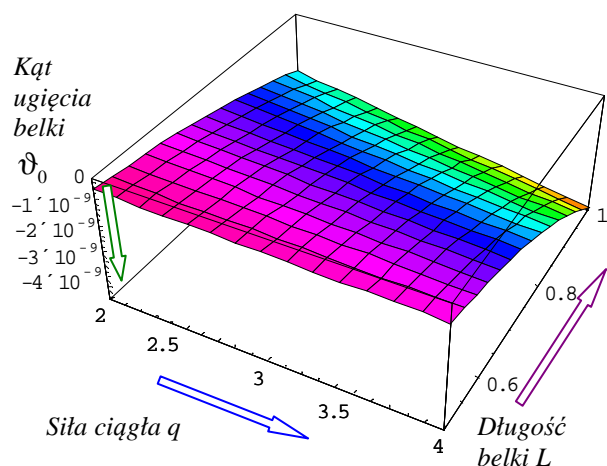
➤ Programy do analizy numerycznej funkcji kąta ugięcia $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$

Program 1. <i>Mathematica</i> [1], [4], [9]	Komentarz:
<pre>E:=2.1*10^5; b:40; h:=6 Plot3D[(-2*q*L^3)/(E*b*h^3), {q, 2, 4}, {L, 0.5, 1}, ColorFunction->Hue]</pre>	Moduł Younga, szerokość i wysokość belki Wykres przestrzenny 3D funkcji $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$
Program 2. <i>Mathematica</i> [1], [4], [9]	Komentarz:
<pre>E:=2.1*10^5; b:40; h:=6 ContourPlot[(-2*q*L^3)/(E*b*h^3), {q, 2, 4}, {L, 0.5, 1}, ColorFunction->Hue]</pre>	Moduł Younga, szerokość i wysokość belki Wykres warstwiczny funkcji $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$

➤ Programy do analizy numerycznej funkcji strzałki ugięcia belki $f = f(q, E)$

Program 3. <i>Mathematica</i> [1], [4], [9]	Komentarz
<pre>L:=575; b:40; h:=6 Plot3D[(3*q*L^3)/(2*E*b*h^3), {q, 2, 4}, {E, 2.1*10^5, 2.5*10^5}, ColorFunction->Hue]</pre>	Długość belki, szerokość i wysokość belki Wykres przestrzenny 3D funkcji $f = f(q, E)$
Program 4. <i>Mathematica</i> [1], [4], [9]	Komentarz
<pre>L:=575; b:40; h:=6 ContourPlot[(3*q*L^3)/(2*E*b*h^3), {q, 2, 4}, {E, 2.1*10^5, 2.5*10^5}, ColorFunction->Hue]</pre>	Długość belki, szerokość i wysokość belki Wykres warstwiczny funkcji $f = f(q, E)$

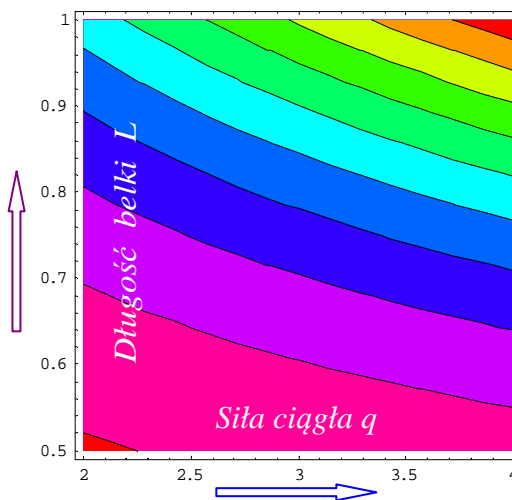
• Analiza numeryczna funkcji kąta ugięcia belki $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$



Rys. 2. Belka wspornikowa obciążona siłą ciągłą q równomiernie rozłożoną na całej długości. Wykres przestrzenny 3D funkcji kąta ugięcia belki $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$ zależnej od siły q i długości belki L
 Źródło: Opracowanie własne Autorów

Fig. 2. The cantilevered beam loaded by a continuous force q evenly in along the length. The graph 3D of function of deflection angle of the beam $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$ dependent of a continuous force q and the beam length L

Source: Elaboration of the Authors

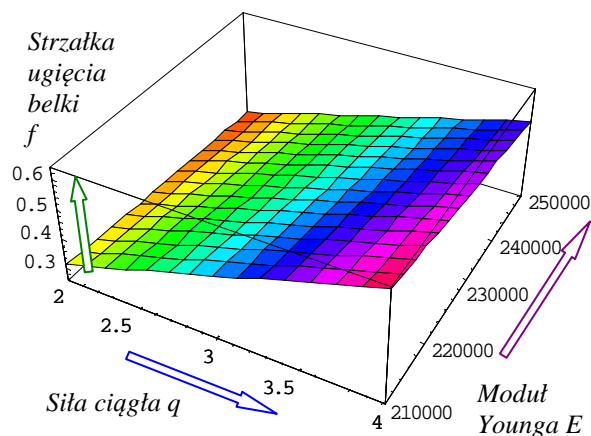


Rys. 3. Belka wspornikowa obciążona siłą ciągłą q równomiernie rozłożoną na całej długości. Wykres warstwiczny funkcji kąta ugięcia belki $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$ zależnej od siły q i długości belki L
 Źródło: Opracowanie własne Autorów

Fig. 3. The cantilevered beam loaded by a continuous force q evenly in along the length. The contour graph of function of deflection angle of the beam $\vartheta_0 = \vartheta_0(q, L)$ dependent of a continuous force q and the beam length L

Source: Elaboration of the Authors

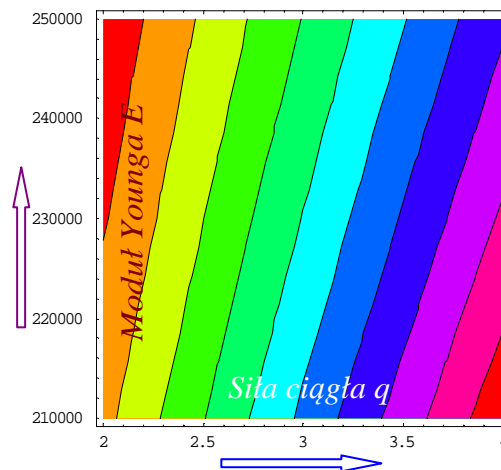
• Analiza numeryczna funkcji strzałki ugięcia belki $f = f(q, E)$



Rys. 4. Belka wspornikowa obciążona siłą ciągłą q równomiernie rozłożoną na całej długości. Wykres przestrzenny 3D funkcji strzałki ugięcia belki $f = f(q, E)$ zależnej od siły ciągłej q oraz modułu Younga E
 Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 4. The cantilevered beam loaded by a continuous force q evenly in along the length. The graph 3D of deflection function of the beam $f = f(q, E)$ dependent on continuous force q and Young's modulus E

Source: Elaboration of the Authors



Rys. 5. Belka wspornikowa obciążona siłą ciągłą q równomiernie rozłożoną na całej długości. Wykres warstwiczny funkcji strzałki ugięcia belki $f = f(q, E)$ zależnej od siły ciągłej q oraz modułu Younga E
 Źródło: Opracowanie własne Autora

Fig. 5. The cantilevered beam loaded by a continuous force q evenly in along the length. The contour graph of deflection function of the beam $f = f(q, E)$ dependent on concentrated force P and Young's modulus E

Source: Elaboration of the Authors

3. Wnioski

- Modelowanie analityczne belki o danej długości, jednostronnie utwierdzonej o przekroju prostokąta, obciążonej siłą ciągłą równomiernie rozłożoną na jej długości i danym module Younga pozwala wyprowadzić nie tylko równanie ugięcia belki, ale również wzory na strzałkę i kąt ugięcia belki.
- Analiza numeryczna w programie *Mathematica* belki o danej długości L , jednostronnie utwierdzonej o przekroju prostokąta, obciążonej siłą ciągłą równomiernie rozłożoną na jej długości i danym module Young E daje możliwość wyznaczenia wartości strzałki i kąta ugięcia belki.

Literatura

- [1] Abel M.L., Braselton J.P.: *Mathematica by example, Revised edition*. Georgia Southern University, Department of Mathematics and Computer Science, Statesboro, Georgia, AP Professional A Division of Harcourt Brace & Company, Boston San Diego New York London Sydney Tokyo Toronto 1993.
- [2] Ashby M.F.: *Dobór materiałów w projektowaniu inżynierskim*, Warszawa: WNT, 1998, w. II.
- [3] Banasiak M., Grossman K., Trombski M.: *Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*. Warszawa: Wyd. Naukowe PWN, 1998, w. II pop.
- [4] Drwal G., Grzymkowski R., Kapusta A., Słota D.: *Mathematica 4*. Gliwice: Wyd. Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, 2000.
- [5] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłowski Z.: *Wytrzymałość materiałów Tom 1*, Warszawa: WNT, 1996.
- [6] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłowski Z.: *Wytrzymałość materiałów Tom 2*, Warszawa: WNT, 1997.
- [7] Grabowski J., Iwanczeska A.: *Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*. Warszawa: Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej, 1997, w. V.
- [8] Kubiak J., Mielniczuk J., Wilczyński A.: *Mechanika techniczna*, Warszawa: WNT, 1983.
- [9] Wolfram S.: *The Mathematica Book, 4th edition*. Champaign and Cambridge: Wolfram Media and Cambridge University Press, 1999.
- [10] Wolny A., Siemieniec A.: *Wytrzymałość materiałów, Część 1 Teoria – Zastosowanie*. Kraków: Wyd. AGH, 2000.
- [11] Zielnica J.: *Wytrzymałość materiałów*. Poznań: Wyd. Pol. Poznańskiej, 1998.