

Prof. dr hab. inż. Leszek MIESZKALSKI
Katedra Organizacji i Inżynierii Produkcji, Wydział Inżynierii Produkcji
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

METODY MATEMATYCZNEGO MODELOWANIA KSZTAŁTU NASIONA LNU[®]

Methods mathematical modeling shape flax seeds[®]

Słowa kluczowe: len, nasiona, kształt, krzywe parametryczne, krzywe Béziera, krzywe przekrojów, modele matematyczne, modele 3D.

W artykule przedstawiono propozycję trzech metod matematycznego modelowania kształtu nasion lnu z wykorzystaniem krzywych parametrycznych, krzywych Béziera i krzywych przekrojów poprzecznych. W metodzie 1 matematycznego opisu kształtu nasion lnu zastosowano równania parametryczne bryły z ostrym wierzchołkiem. W metodzie 2 zastosowano równania parametryczne bryły z łukowym wierzchołkiem. W metodzie 3 zastosowano równania parametryczne krzywych Béziera i krzywych przekrojów poprzecznych. Wybrane do modelowania nasiona sfotografowano w płaszczyźnie XZ aparatem Panasonic LUMIX DMC-TZ3. Miarą oceny była na ustalonej wysokości w płaszczyźnie XZ maksymalna różnica odległości między krawędzią nasiona a krawędzią modelu. Metoda z wykorzystaniem krzywych Béziera i krzywych przekrojów poprzecznych może być stosowana do matematycznego modelowania kształtu nasion lnu.

Key words: flax, seeds, shape, parametric curves, Bezier curves, curves sections, mathematical models, 3D models.

The article presents of three methods of mathematical modeling of the shape of flax seed with the use of parametric curves, Bezier curves and curves of cross sections. In the method 1 mathematical description of the shape of the flax seed used parametric equations with a sharp apex. In method 2 uses parametric equations topped with an arched apex. The method 3 uses parametric equations of curves and Bezier curves of cross sections. Selected to modeling seeds photographed in the XZ plane Panasonic LUMIX DMC-TZ3 camera. Measure of assessment at a fixed height in plane XZ is maximum difference in distance between the edge of the seed and the edge of the model. Method using Bézier curves and cross-sections can be used for mathematical modeling of the shape of the flax seeds.

WSTĘP

Powierzchnia uprawy lnu na świecie w 2013 roku wynosiła 2,3 mln ha, a w Polsce 1400 ha [14]. Nasiona lnu są cennym surowcem dla przemysłu spożywczego [9, 10] zawierają duże ilości tłuszczu (38 ÷ 45 %), białka (24 ÷ 25 %), błonnika (20 ÷ 28 %) i związków mineralnych (3,5 ÷ 4 %) oraz są najbogatszym roślinnym źródłem kwasu α -linolenowego [3, 11, 12]. Siemię lniane jest stosowane do produkcji żywności funkcjonalnej ze względu na zawarte w nim składniki, które korzystnie wpływają na zdrowie człowieka [3, 4, 6, 8, 13, 17]. Sharma i Prasad [15] twierdzą, że właściwości fizyczne nasion i ziaren, w tym cechy geometryczne, odgrywają istotną rolę w projektowaniu urządzeń do przechowywania, transportu i przetwarzania. Anders, Markowski i Kaliniewicz [1] do określania podstawowych właściwości geometrycznych drobnych nasion stosowali metodę skanowania 3D i analizę obrazu. Singh i in. stwierdzili, że wzrost wilgotności nasion lnu powoduje istotny, liniowy wzrost wymiarów nasion, masy 1000 nasion, kąta zsypania i prędkości unoszenia [16]. Według Eissa [5] prędkość strumienia powietrza dla nasion lnu w kanale aspiracyjnym waha się od 2 do 6 m/s i związane jest to z kształtem nasion oraz ich wilgotnością. Nasiona

lnu mają długość od 3,0 do 6,4 mm, szerokość od 1,8 do 3,4 mm, a grubość od 0,5 do 1,6 mm [2, 7]. Anders opisuje kształt nasion lnu jako spłaszczony z zaznaczonym wierzchołkiem o powierzchni gładkiej i błyszczącej barwie od jasnożółtej do czerwono-brązowej [2].

W dostępnej literaturze nie spotkano prac z zakresu modelowania kształtu nasion lnu.

Celem artykułu jest opracowanie metod matematycznego modelowania kształtu nasion lnu na podstawie równań parametrycznych dla dwóch brył oraz wykorzystanie w zapisie parametrycznym krzywych Béziera i krzywych przekrojów poprzecznych nasion.

METODYKA I METODY

Nasiona lnu zakupiono w hurtowni w Broniszach i przechowywano w pomieszczeniu o temperaturze 20°C i wilgotności powietrza 53%. Do modelowania wybrano dwa nasiona (*A*, *B*) różniące się kształtem (rys. 1). Wymiary nasiona *A* były następujące: długość 4,8 mm; szerokość 2,5 mm; grubość 0,9 mm. Wymiary nasiona *B* były następujące: długość 5,1 mm; szerokość 2,4 mm; grubość 1,1 mm. Wilgotność nasion wynosiła 5,5%. Wybrane do modelowania nasiona

Adres do korespondencji – Corresponding author: Leszek Mieszkalski, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Wydział Inżynierii Produkcji, Katedra Organizacji i Inżynierii Produkcji, ul. Nowoursynowska 164, 02-787 Warszawa, e-mail: mieszko@poczta.fm

sfotografowano w płaszczyźnie XZ aparatem Panasonic LU-MIX DMC-TZ3 (obiektyw 4,6 do 48 mm, matryca 7200000 pikseli). Uzyskane zdjęcia o rozdzielczości 2560x1920 pikseli kadrowano i zapisywano w formacie JPEG.



Rys. 1. Wybrane nasiona lnu do modelowania. Pierwsze jest nasionem A, a drugie nasionem B.

Fig. 1. Flax seeds selected for modeling. First the semen of A, and the second semen of B.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

W celu matematycznego opisu kształtu nasion lnu opracowano równania parametryczne dwóch brył (metoda 1 i 2) odwzorowujących kształt nasion lnu. Do opracowania trzeciej metody matematycznego opisu kształtu nasion lnu wykorzystano w zapisie parametrycznym dwie krzywe Béziera opisujące kontur nasiona w płaszczyźnie XZ i opracowano cztery krzywe opisujące kontury przekrojów poprzecznych nasiona w płaszczyźnie XY . Z krzywych Béziera i krzywych przekrojów poprzecznych nasiona zbudowano bryłę 3D.

Oceny dokładności opracowanych modeli brył odwzorowujących kształt nasion lnu dokonano na podstawie porównania fotografii nasion lnu z rzutami na płaszczyznę XZ modeli brył odwzorowujących te nasiona. Miarą oceny była maksymalna odległość między krawędzią nasiona a krawędzią modelu mierzona na ustalonej wysokości w płaszczyźnie XZ . Pomiaru odległości między krawędzią nasiona a krawędzią modelu dokonano wykorzystując do tego celu graficzny program komputerowy Inkscape.

METODA 1. MATEMATYCZNY OPIS KSZTAŁTU NASION LNU NA PODSTAWIE RÓWNAŃ PARAMETRYCZNEGO BRYŁY Z OSTRYM WIERZCHOŁKIEM

Macierzowe równania współrzędnych punktów $X1$, $Y1$, $Z1$ leżących na powierzchni bryły zakończonej ostrym wierzchołkiem mają następującą postać:

$$X1_{i,j} = b1 \cdot \varphi_i \cdot \sin \varphi_i \cdot \sin \vartheta_j \quad (1)$$

$$Y1_{i,j} = a1 \cdot (\sin \varphi_i)^{d1} \cdot (\cos \vartheta_j)^{e1} \quad (2)$$

$$Z1_{i,j} = c1 \cdot \cos \varphi_i \quad (3)$$

gdzie:

$$\varphi_i = i \cdot \frac{\pi}{N} \quad (4)$$

$$\vartheta_j = j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \quad (5)$$

METODA 2. MATEMATYCZNY OPIS KSZTAŁTU NASION LNU NA PODSTAWIE RÓWNAŃ PARAMETRYCZNEGO BRYŁY Z ŁUKOWO ZAKOŃCZONYM WIERZCHOŁKIEM

Macierzowe równania współrzędnych punktów $X2$, $Y2$, $Z2$ leżących na powierzchni bryły zakończonej łukowym wierzchołkiem zamieszczono niżej:

$$X2_{i,j} = b2 \cdot \cos \left(\frac{i \cdot e2}{N} \right) \cdot \sin \left[\varphi_i - \frac{i}{N} \right] \cdot \sin \vartheta_j \quad (6)$$

$$Y2_{i,j} = a2 \cdot \frac{i}{2 \cdot N} \cdot (\sin \varphi_i)^{d2} \cdot \cos \vartheta_j \quad (7)$$

$$Z2_{i,j} = c2 \cdot \cos \varphi_i \quad (8)$$

Dane potrzebne do modeli według metod 1 i 2 zamieszczono w macierzy 9:

$$\begin{bmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \\ c1 & c2 \\ d1 & d2 \\ e1 & e2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0,7 & 2 \\ 2,5 & 2,4 \\ 2 & 0,5 \\ 3 & 1,2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

METODA 3. MATEMATYCZNY OPIS KSZTAŁTU NASION LNU NA PODSTAWIE RÓWNAŃ PARAMETRYCZNYCH KRZYWYCH BÉZIERA I KRZYWYCH PRZEKROJÓW POPRZECZNYCH

Równania parametryczne pierwszej krzywej Béziera opisującej dolną część nasiona lnu mają następującą postać:

$$X1_t = Ax \cdot \left(1 - \frac{t}{N}\right)^3 + A1x \cdot 3 \cdot \frac{t}{N} \cdot \left(1 - \frac{t}{N}\right)^2 + B1x \cdot 3 \cdot \left(\frac{t}{N}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{t}{N}\right) + Bx \cdot \left(\frac{t}{N}\right)^3 \quad (10)$$

$$Z1_t = Az \cdot \left(1 - \frac{t}{N}\right)^3 + A1z \cdot 3 \cdot \frac{t}{N} \cdot \left(1 - \frac{t}{N}\right)^2 + B1z \cdot 3 \cdot \left(\frac{t}{N}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{t}{N}\right) + Bz \cdot \left(\frac{t}{N}\right)^3 \quad (11)$$

$$Y1_t = z1 \cdot \cos(t - t) \quad (12)$$

Równania parametryczne drugiej krzywej Béziera opisującej wierzchołek nasiona lnu mają następującą postać:

$$X2_t = Ax \cdot \left(1 - \frac{t}{N}\right)^3 + A2x \cdot 3 \cdot \frac{t}{N} \cdot \left(1 - \frac{t}{N}\right)^2 + B2x \cdot 3 \cdot \left(\frac{t}{N}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{t}{N}\right) + Bx \cdot \left(\frac{t}{N}\right)^3 \quad (13)$$

$$Z2_t = Az \cdot \left(1 - \frac{t}{N}\right)^3 + A2z \cdot 3 \cdot \frac{t}{N} \cdot \left(1 - \frac{t}{N}\right)^2 + B2z \cdot 3 \cdot \left(\frac{t}{N}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{t}{N}\right) + Bz \cdot \left(\frac{t}{N}\right)^3 \quad (14)$$

$$Y2_t = Y1_t \quad (15)$$

Parametry skalujące krzywych Béziera zamieszczono w macierzy 16:

$$\begin{bmatrix} Ax & A1x & B1x & Bx & A2x & B2x & z11 \\ Az & A1z & B1z & Bz & A2z & B2z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,926 & -2,48 & 3,09 & 0,49 & -0,43 & -0,24 & 0,3 \\ 3,54 & -1,83 & -0,74 & 4,43 & 3,54 & 5,52 & 0 \dots N \end{bmatrix} \quad (16)$$

Krzywa opisująca przekroje poprzeczne nasiona lnu ma postać:

$$Xpn_{i,j} = Cn + Dn \cdot \sin\left(\frac{\varphi_i}{2} + 2\right)^{fn} \quad (17)$$

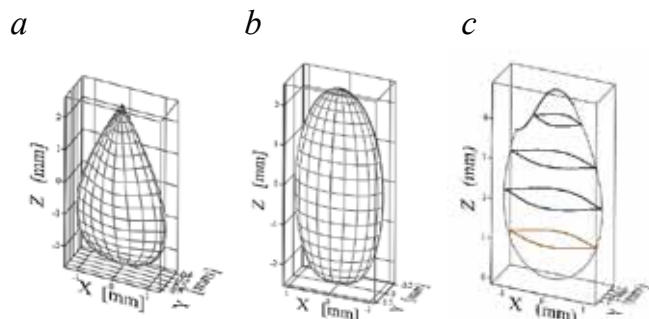
$$Ypn_{i,j} = An + Bn \cdot \cos\left(\frac{\varphi_i}{2} + 2\right)^{kn} \quad (18)$$

$$Zpn_i = zn \quad (19)$$

Parametry skalujące krzywych przekrojów poprzecznych nasiona lnu zamieszczono w macierzy 20:

$$\begin{bmatrix} A1 & B1 & C1 & D1 & f1 & k1 & z1 \\ A2 & B2 & C2 & D2 & f2 & k2 & z2 \\ A3 & B3 & C3 & D3 & f3 & k3 & z3 \\ A4 & B4 & C4 & D4 & f5 & k4 & z4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 & 0 & 1,8 & 13 & 1 \\ 0,3 & 0,5 & 0 & 1,2 & 13 & 2 \\ 0,3 & 0,4 & 0 & 1,056 & 13 & 3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 & 0,588 & 13 & 4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Opisane według metod 1, 2 i 3 modele 3D nasion lnu zamieszczono rysunku 2.



Rys. 2. Modele 3D kształtu nasiona lnu: a - według metody 1, b - według metody 2, c - według metody 3.

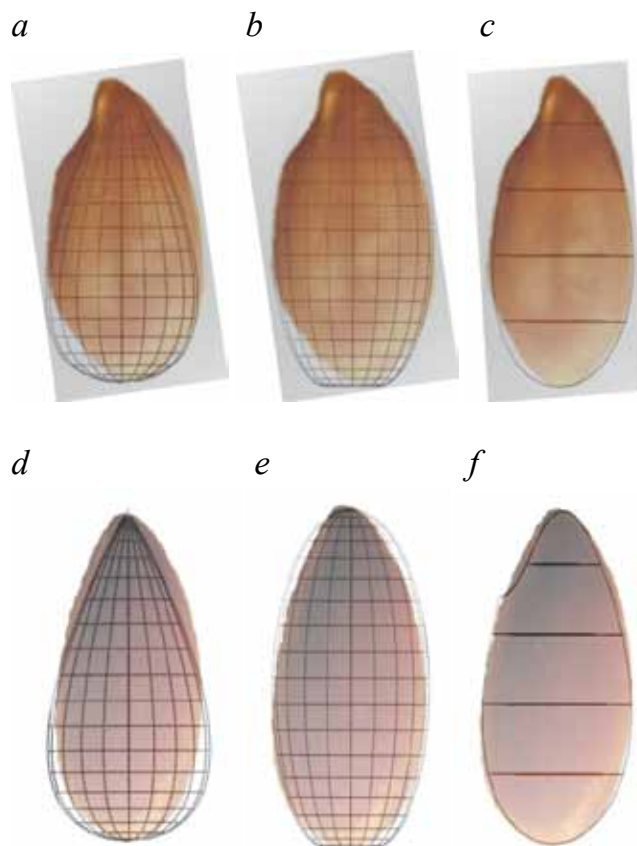
Fig. 2. 3D models of the shape of the seed flax: a - according to method 1, b - according to method 2, c - according to method 3.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

OCENA DOKŁADNOŚCI ODWZOROWANIA

Na rysunku 3 zamieszczono nałożone na siebie fotografie nasion lnu i rzuty ich modeli 3D na płaszczyznę XZ.



Rys. 3. Porównanie rzutów w płaszczyźnie XZ nasion lnu i ich modeli 3D: a - nasiono A metoda 1, b - nasiono A metoda 2, c - nasiono A metoda 3, d - nasiono B metoda 1, e - nasiono B metoda 2, f - nasiono B metoda 3.

Fig. 3. Comparison throws in the XZ plane flax seed and 3D models: a - seed A method 1, b - seed A method 2, c - seed A method 3, d - seed B method 1, e - seed B method 2, f - seed B method 3.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

Wyniki oceny dokładności odwzorowania nasion lnu proponowanymi modelami brył 3D zamieszczono w tabeli 1.

Z tabeli 1 wynika, że maksymalna wartość odległości między krawędzią nasiona a krawędzią modelu w płaszczyźnie XZ wynosi 0,4 mm dla nasiona A i metody 1. Minimalna wartość odległości między krawędzią nasiona a krawędzią modelu w płaszczyźnie XZ wynosi 0,11 mm dla nasiona B i metody 3. Dla obu badanych nasion najmniejsza wartość odległości między krawędzią nasiona a krawędzią modelu w płaszczyźnie XZ wystąpiła w metodzie 3.

Tabela 1. Maksymalna odległość (mm) między krawędzią nasioną a krawędzią modelu w płaszczyźnie XZ

Table 1. The maximum distance (mm) between the edge of the seed and the edge of the model in a plane XZ

Numer metody	Wysokość pomiaru w płaszczyźnie XZ (mm)	Maksymalna odległość (mm)
Nasiono A		
1	3,7	0,4
2	4,3	0,31
3	0,4	0,12
Nasiono B		
1	4,1	0,27
2	4,4	0,17
3	3,8	0,11

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

WNIOSKI

1. Maksymalna wartość odległości między krawędzią nasioną a krawędzią modelu w płaszczyźnie XZ dla metody 1 wynosi od 0,27 mm do 0,4 mm.
2. Maksymalna wartość odległości między krawędzią nasioną a krawędzią modelu w płaszczyźnie XZ dla metody 2 wynosi od 0,17 mm do 0,31 mm.
3. Z proponowanych trzech metod matematycznego modelowania kształtu nasion lnu najdokładniejsze odwzorowanie uzyskano stosując metodę 3 polegającą na wykorzystaniu równań parametrycznych krzywych Béziera i krzywych przekrojów poprzecznych.

LITERATURA

- [1] **ANDERS A., P. MARKOWSKI, Z. KALINIEWICZ. 2014.** „Wykorzystanie skanera 3D do badania właściwości geometrycznych nasion konopi siewnych (*Cannabis Sativa* L.)”. *Acta Agrophysica* 21(4): 391 – 402.
- [2] **ANDERS A. 2008.** „Właściwości geometryczne części morfologicznych nasion lnu poddanych usuwaniu okrywy owocowo-nasiennej”. *Acta Agrophysica* 12(1): 7 – 17.
- [3] **DAUN J.K., V.J. BARTHET, T.L. CHORNICK, S. DUGUID. 2003.** “Structure, composition, and variety development of flaxseed”. In Thompson, L. U. and Cunnane, S. C. (Eds). *Flaxseed in Human Nutrition*, 2nd ed., 1-40. Champaign, Illinois: AOCS Press.
- [4] **DWIVEDI C., K. NATARAJAN, D. MATTHEES. 2005.** “Chemopreventive effects of dietary flaxseed oil on colon tumor development”. *Nutrition and Cancer* 51 (1): 52 – 58.
- [5] **EISSA A.H.A. 2009.** “Aerodynamic and solid flow properties for flaxseeds for pneumatic separation by using air stream”. *Int J Agric&BiolEng.* Vol. 2, 4: 31 – 45. <http://www.ijabe.org>
- [6] **FEDENIUK R. W., C. G. BILIADERIS. 1994.** “Composition and Physicochemical Properties of Linseed (*Linum usitatissimum* L.) Mucilage”. *J. Agric. Food Chem.* 42: 240 – 247.
- [7] **FREEMAN T.P. 1995.** “Structure of flaxseed”. In S. C. Cunnane & L. U. Thompson (Eds.), *Flaxseed in Human Nutrition*. Champaign, IL, AOCS Press: 11 – 21.
- [8] **GANORKAR P. M., R. K. JAIN. 2013.** “Flaxseed – a nutritional punch”. *International Food Research Journal* 20(2): 519 – 525.
- [9] **GUTIÉRREZ G., M. RUBILAR, C. JARA, M. VERDUGO, J. SINEIRO, C. SHENE. 2010.** “Flaxseed and flaxseed cake as a source of compounds for food industry”. *J. Soil Sci. Plant Nutr.* 10 (4): 454 – 463.
- [10] **JHALA A. J., L. M. HALL. 2010.** “Flax (*Linum usitatissimum* L.): Current Uses and Future Applications”. *Australian Journal of basic and Applied Sciences* 4(9): 4304 – 4312. ISSN 1991-8178.
- [11] **MIŃKOWSKI K., S. GRZEŚKIEWICZ, M. JERZEWSKA, M. ROPELEWSKA. 2010.** „Charakterystyka składu chemicznego olejów roślinnych o wysokiej zawartości kwasów linolenowych”. *Żywność. Nauka. Technologia. Jakość* 6 (73): 146 – 157.
- [12] **MIŃKOWSKI K., A. KALINOWSKI, A. KRUPSKA. 2014.** „Wpływ sposobu przygotowania nasion oraz dławienia masy nasiennej w prasie ślimakowej na parametry procesu tłoczenia i cechy jakościowe oleju lnianego”. *Żywność. Nauka. Technologia. Jakość* 4 (95): 75 – 87. DOI: 10.15193/ZNTJ/2014/95/075-087
- [13] **MAZZA G., C.G. BILIADERIS. 1989.** “Functional properties of flaxseed mucilage”. *J. Food Sci.* 54: 1302 – 1305.
- [14] **POPIS E., K. RATUSZ, M. PRZYBYSZ, K. KRYGIER, A. SAKOWSKA, M. KONARSKA. 2015.** „Światowa oraz polska produkcja lnu oleistego i oleju lnianego”. *Zeszyty Naukowe Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie. Problemy Rolnictwa Światowego* 15 (XXX), 2: 106 – 116.
- [15] **SHARMA S., K. PRASAD. 2013.** “Comparative Physical Characteristics of Linseed (*Linum usitatissimum*) Kernels”. *International Journal of Agriculture and Food Science Technology* 4, 7 (2013): 671 – 678. ISSN 2249-3050. <http://www.ripublication.com/ijafst.htm>
- [16] **SINGH K.K., D. MRIDULA, P. BARNWAL, J. REHAL. 2012.** “Physical and chemical properties of flaxseed”. *Int. Agrophys.*, 26, 423 – 426. DOI: 10.2478/v10247-012-0060-4
- [17] **TOURE, A., X. XUEMING. 2010.** “Flaxseed lignans: Source, biosynthesis, metabolism, antioxidant activity, bioactive components and health benefits”. *Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety* 9 (3): 261 – 269.