

**Maria WRZUSZCZAK<sup>1</sup>, Yuriy KHOMA<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> POLITECHNIKA OPOLSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI I INFORMATYKI, ul. Sosnkowskiego 31, 45-272 Opole

<sup>2</sup> POLITECHNIKA LWOWSKA, KATEDRA TECHNOLOGII INFORMACYJNO – POMIAROWYCH, ul. S. Bandery 28a, 79013 Lwów

## Błędy zastosowania Jednopunktowej Transformaty Fouriera do sygnałów wygenerowanych techniką bezpośredniej syntezy cyfrowej

Dr hab. inż. Maria WRZUSZCZAK

Jest profesorem nadzwyczajnym na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki Politechniki Opolskiej. W 2012 r. uzyskała stopień naukowy doktora habilitowanego. Jest autorką lub współautorką kilkudziesięciu publikacji naukowych. Zainteresowania naukowe to metrologia, cyfrowe układy pomiarowe oraz badania materiałów metodą prądów wirowych.



e-mail: m.wruszczak@po.opole.pl

Mgr inż. Yuriy KHOMA

Absolwent Instytutu Technologii Komputerowych, Automatyki i Metrologii Narodowego Uniwersytetu „Politechnika Lwowska” (Ukraina) oraz Wydziału Informatyki i Automatyki Uniwersytetu Technologicznego Ilmenau (Niemcy). Obecnie doktorant. Zainteresowania naukowe: cyfrowe przetwarzanie sygnałów w układach pomiarowych oraz projektowanie analizatorów impedancji.



e-mail: khomay@gmail.com

### Streszczenie

Artykuł dotyczy zastosowania Jednopunktowej Transformaty Fouriera (JTF) do przetwarzania sygnałów sinusoidalnych uzyskanych techniką bezpośredniej syntezy cyfrowej DDS. Metoda cyfrowej syntezy sygnałów stosowana jest co raz szerzej w nowoczesnych przyrządach pomiarowych. Przedstawiono analizę błędów w przypadku zastosowania JTF w przyrządzie cyfrowym do rozdzielania składowych sygnału wygenerowanego techniką DDS na część rzeczywistą i urojoną.

**Słowa kluczowe:** bezpośrednia synteza cyfrowa, przetwarzanie cyfrowe składowych sygnału.

### Errors of employing Single - Point Fourier Transform for signals generated by Direct Digital Synthesis

#### Abstract

The paper deals with employing the Single-Point Fourier Transform (SPFT) in processing signals generated by a direct digital synthesis (DDS). The method of digital synthesis of signals is more and more frequent implemented in smart measuring devices. The error analysis was performed in the case study of applying the SPFT in a digital device for separating real and imaginary components of a signal synthesized with a DDS technique. The analysis of the impact of sinewave distortions on the SPFT performance is presented. In Figure 1 the impact of the spurious harmonics on the SPFT output spectrum for the reference signal in the form of the ideal sine signal versus the sine signal synthesized by DDS is depicted. Analytical expressions estimating processing errors are derived. The value of a signal decomposition error of SPFT related to the total harmonic distortion value are given in Tab. 1. In Figure 2 the spectra of the signals: a) with uniformly distributed spurious harmonics, b) with a single spurious harmonic is shown. For these two kinds of test signals the error of SPFT according to formula (3) is calculated and the results are presented in Figure 3.

**Keywords:** SPFT, Direct Digital Synthesis, DDS.

## 1. Wprowadzenie

W wielu współczesnych przyrządach pomiarowych stosuje się technikę bezpośredniej syntezy cyfrowej (ang. *Direct Digital Synthesis*) do generowania różnych sygnałów, w tym do generowania sygnałów sinusoidalnie zmiennych [1]. Przykładem mogą być mierniki impedancji lub przyrządy wiropiętrowe (defektometry, grubościomierze i inne) [2, 3]. Częścią składową tych przyrządów są detektory fazoczułe, które są stosowane w celu rozdzielania sygnałów na części synfazową i kwadraturową (rzeczywistą i urojoną) [4, 5]. Zaletą tych układów są bardzo dobre właściwości filtracyjne, umożliwiające przetwarzanie sygnałów na tle szumu o dużej wartości skutecznej.

Cyfrową realizacją detekcji fazoczułej jest Jednopunktowa Transformata Fouriera (JTF) [6]. Wzór analityczny JTF można zapisać jako

$$U_x(k) = \sum_{i=0}^{N-1} u_x(i) \left[ \cos\left(\frac{2\pi k}{N} i\right) - j \sin\left(\frac{2\pi k}{N} i\right) \right] \quad (1)$$

gdzie:

- $i$  – numer próbki,
- $N$  – liczba próbek w okresie,
- $k$  – ta harmoniczna dyskretnego sygnału okresowego,
- $u_x(i)$  – napięcie  $i$ -tej próbki analizowanego sygnału,
- $U_x(k)$  – amplituda  $k$ -tego prążka widma analizowanego sygnału.

Algorytm JTF oblicza korelację pomiędzy sygnałem analizowanym (pomiarowym) oraz sinusoidalnym i kosinusoidalnym sygnałem odniesienia. W wyniku przetwarzania JTF otrzymuje się jedynie tę część widma częstotliwościowego sygnału, która jest tożsama z częstotliwością sygnałów odniesienia.

W praktyce ortogonalne sygnały odniesienia generowane są najczęściej również za pomocą techniki bezpośredniej syntezy cyfrowej, więc syntezowane sygnały są "zanieczyszczone" niepożądanymi harmonicznymi powstającymi na skutek obcinania fazy i kwantyzacji [7]. W przypadku, gdy sygnał wzbudzenia podawany na badany obiekt zostanie wytworzony przez bezpośrednią syntezy cyfrową, niepożądane harmoniczne zawarte będą również w sygnale pomiarowym. Wobec tego można się spodziewać znacznej korelacji pomiędzy niepożądanymi harmonicznymi sygnału pomiarowego i odniesienia.

Celem artykułu jest przedstawienie wyników badań wpływu niepożądanych harmonicznych na dokładność algorytmu Jednopunktowej Transformaty Fouriera zastosowanego do rozdzielania składowych sygnału pomiarowego na część synfazową i kwadraturową.

## 2. Model Jednopunktowej Transformaty Fouriera w dziedzinie częstotliwości dla sygnałów wygenerowanych techniką DDS

Analizę zależności wyników przetwarzania Jednopunktowej Transformaty Fouriera od wpływu niepożądanych harmonicznych wygodnie przeprowadzić w dziedzinie częstotliwości. Iloczyn chwilowych wartości dwóch sygnałów (analizowanego i odniesienia) odpowiada spłotowi widm sygnałów w dziedzinie częstotliwości. Końcowy wynik JTF jest całką z iloczynu tych sygnałów.

W dziedzinie częstotliwości jest to równoważne wydzieleniu harmonicznej w punkcie zero. Wynikiem JTF jest wartość spłotu widm dwu sygnałów cyfrowych: analizowanego  $u_x$  oraz odniesienia  $u_{Ref}$  przy zerowym przesunięciu między nimi co wyraża wzór

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} u_x(i) \cdot u_{Ref}(i) &= conv_{m=0} [U_x(k), U_{Ref}(k)] = \sum_{k=0}^{N-1} U_x(-k) \cdot U_{Ref}(k) = \\ &= \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} U_x(k) \cdot U_{Ref}(k) = 2 \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} U_x(k) \cdot U_{Ref}(k) \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:

- $u_x(i)$  i  $u_{Ref}(i)$  – wartości  $i$ -tej próbki sygnału analizowanego i odniesienia,
- $U_x(k)$  i  $U_{Ref}(k)$  – wartości  $k$ -tej harmonicznej w widmie sygnału analizowanego i odniesienia,
- $conv(*)$  – symbol operacji spłotu.

Widmo idealnego sygnału odniesienia zawiera tylko jedną harmoniczną  $k_{carrier}$ , więc wynik JTF w tym przypadku jest równy jej iloczynowi z harmoniczną o tej samej częstotliwości zawartej w widmie sygnału analizowanego (rys. 1a). Jeżeli jednak w sygnale odniesienia są wyższe - niepożądane harmoniczne (a tak jest w rzeczywistości) wynik JTF będzie obciążony błędem (rys. 1b), ponieważ w wyniku całkowania funkcji ortogonalnych uzyskuje się niezerowe iloczyny dla niepożądanych harmonicznych. Na podstawie wyrażenia (2) można uzyskać wzór do oszacowania błędów dekompozycji składowych sygnału według algorytmu JTF

$$\begin{aligned} \delta_{harm} &= \frac{2 \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} U_x(k) \cdot U_{Ref}(k) - 2U_x(k_{carrier}) \cdot U_{Ref}(k_{carrier})}{2U_x(k_{carrier}) \cdot U_{Ref}(k_{carrier})} = \\ &= \frac{\sum_{k=0, k \neq k_{carrier}}^{\frac{N}{2}-1} U_x(k) \cdot U_{Ref}(k)}{U_x(k_{carrier}) \cdot U_{Ref}(k_{carrier})} \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$k_{carrier}$  – numer podstawowej harmonicznej (użytecznej).

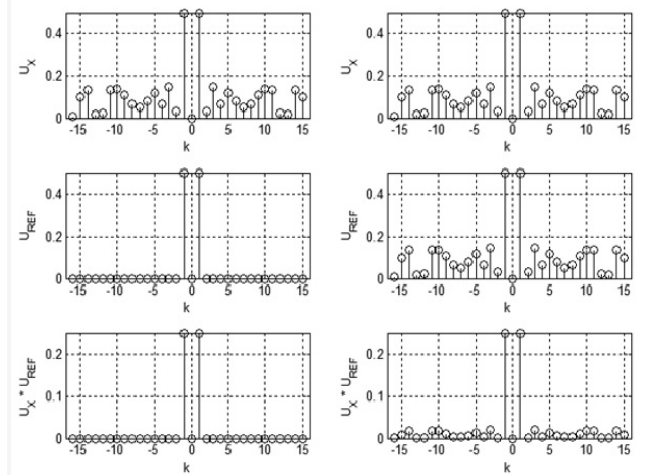
Wartości błędów dekompozycji sygnału za pomocą algorytmu Jednoprętowej Transformaty Fouriera obliczono dla sygnałów testowych uzyskanych przez dodanie harmonicznych zarówno w sygnale analizowanym, jak i w sygnale odniesienia. Wyniki symulacji dla różnych wartości THD - poziomu zniekształceń harmonicznymi (ang. *Total Harmonic Distortion*) przedstawiono w tab.1.

Tab. 1. Zależność błędów dekompozycji sygnału za pomocą algorytmu JTF od poziomu zniekształceń niepożądanymi harmonicznymi (THD)  
Tab. 1. Signal decomposition error of SPFT related to the total harmonic distortion value

Poziom zniekształceń niepożądanymi harmonicznymi THD, dBc	-60	-50	-40	-30	-20
Błąd algorytmu JTF, %	0	0,02	0,17	1,5	14,3

### 3. Analiza błędów przetwarzania JTF od charakteru dystrybucji harmonicznych w widmie częstotliwościowym sygnału

Interesująco przedstawiają się wyniki badań wpływu charakteru dystrybucji niepożądanych harmonicznych na błędy przetwarzania z wykorzystaniem Jednoprętowej Transformaty Fouriera.



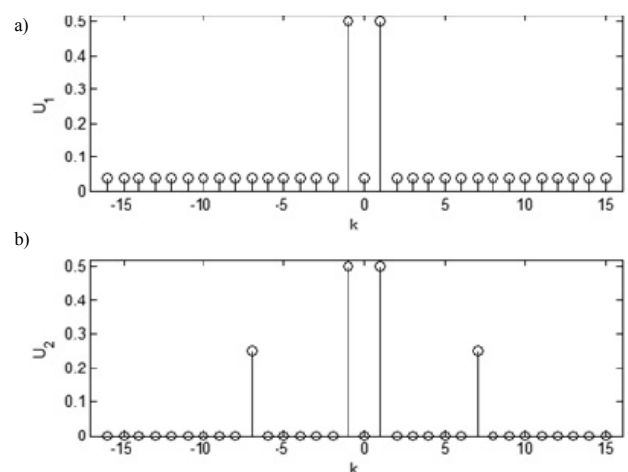
Rys. 1. Wpływ niepożądanych harmonicznych na wyniki przetwarzania Jednoprętowej Transformaty Fouriera JTF (lewa kolumna dotyczy przypadku gdy sygnał odniesienia jest idealnym sygnałem sinusoidalnym, prawa - gdy sygnał odniesienia został wygenerowany techniką DDS)  
Fig. 1. Impact of spurious harmonics on the SPFT output spectrum (the left column for the ideal sinewave reference, the right one - for the reference signal generated by DDS)

W celu zbadania wpływu charakteru dystrybucji niepożądanych harmonicznych w widmie utworzono dwa sygnały testowe o jednakowym poziomie mocy zniekształceń harmonicznych (THD). W pierwszym sygnale przyjęto, że zakłócenia są równomiernie rozłożone na osi częstotliwości (rys. 2a), a w drugim, że są skupione w dowolnym punkcie częstotliwości w postaci pojedynczego prążka (rys. 2b). Wartości każdej niepożądanej harmonicznej w widmie pierwszego sygnału oraz prążka drugiego sygnału są związane zależnością

$$U_2(k_{spur}) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq k_{carrier}}}^{\frac{N}{2}-1} U_1(k) = \left(\frac{N}{2} - 1\right) \cdot U_1(k) \quad (4)$$

gdzie:

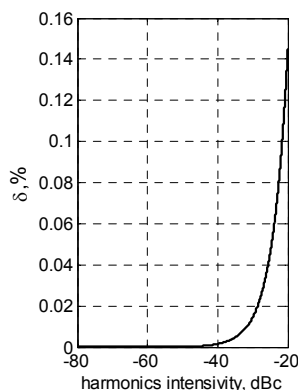
- $U_1(k)$  – amplituda  $k$ -tej harmonicznej widma pierwszego sygnału
- $U_2(k_{spur})$  – amplituda prążka w widmie drugiego sygnału.



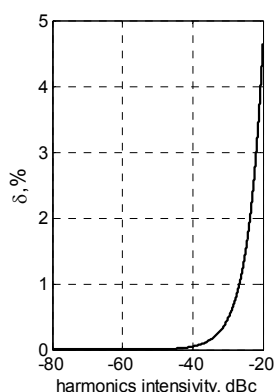
Rys. 2. Widmo sygnałów: a) równomiernym rozłożeniu niepożądanych harmonicznych (a) oraz sygnału z pojedynczą niepożądaną harmoniczną (b)  
Fig. 2. Spectrum of signals: with uniformly distributed spurious harmonics (a) and with a single spurious harmonic (b)

Wyniki symulacji dla różnych wartości współczynnika zawartości harmonicznym THD (stosunek wartości skutecznej niepożądanym harmonicznym do wartości skutecznej harmonicznym podstawowej wyrażonego w dBc) pokazano na rys. 3.

a)



b)



Rys. 3. Zależność błędów JTF od rodzaju zniekształceń harmonicznymi w sygnale dla harmonicznym niepożądanym równomiernie rozłożonych (a), oraz typu „jeden prążek” (b) dla liczby próbek  $N = 32$

Fig. 3. Single -Point Fourier Transform (SPFT) errors for different types of distribution of spurious harmonics: for uniform distribution harmonics (a) and “one spur” (b) for  $N = 32$

Na podstawie powyższego wykresu można stwierdzić, że dokładność JTF zależy nie tylko od amplitudy niepożądanym harmonicznym, ale także od charakteru ich dystrybucji w widmie. W przypadku równomiernej dystrybucji prążków po osi częstotliwości w widmie sygnału analizowanego i odniesienia, błąd JTF będzie minimalny i może być oszacowany według wzoru:

$$\delta_{\text{harm.1}} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq k_{\text{carrier}}}}^{N-1} \frac{U_1^2(k)}{U_1^2(k_{\text{carrier}})} = \left(\frac{N}{2} - 1\right) \cdot \frac{U_1^2(k)}{U_1^2(k_{\text{carrier}})} \quad (5)$$

Dla przypadku, gdy widmo sygnału zawiera dodatkową niepożądaną harmoniczną w postaci pojedynczego prążka, uwzględniając równanie (4) błąd JTF będzie maksymalny i jego wartość można obliczyć ze wzoru

$$\delta_{\text{harm.2}} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq k_{\text{carrier}}}}^{N-1} \frac{U_2^2(k)}{U_2^2(k_{\text{carrier}})} = \frac{U_2^2(k_{\text{spur}})}{U_2^2(k_{\text{carrier}})} = \left(\frac{N}{2} - 1\right) \cdot \frac{U_1^2(k)}{U_1^2(k_{\text{carrier}})} \quad (6)$$

Ze wzorów (5) i (6) można wywnioskować, że błąd przetwarzania JTF dla sygnałów z widmem o pojedynczym prążku niepożądanym w pewnym punkcie częstotliwości będzie  $(N/2) - 1$ -razy większy niż w przypadku zniekształceń w postaci równomiernie rozłożonych prążków. Dla sygnałów z dowolną dystrybucją niepożądanym harmonicznym błąd ten będzie zawarty w przedziale

$$\left(\frac{N}{2} - 1\right) \cdot \left[\frac{U_1(k)}{U_1(k_{\text{carrier}})}\right]^2 \leq \delta_{\text{harm}} \leq \left(\frac{N}{2} - 1\right)^2 \cdot \left[\frac{U_1(k)}{U_1(k_{\text{carrier}})}\right]^2 \quad (7)$$

## 4. Podsumowanie

W artykule przedstawiono model opisujący algorytm Jedno-punktowej Transformaty Fouriera w dziedzinie częstotliwości dla sygnałów wygenerowanych cyfrowo. Wyprowadzono wzory analityczne pozwalające obliczyć błędy w przypadku zastosowania algorytmu JTF do przetwarzania sygnałów wygenerowanych metodą bezpośredniej syntezy cyfrowej DDS.

Przeprowadzono badania symulacyjne sprawdzające działanie algorytmu JTF na sygnałach testowych, oraz wyprowadzono wzory do oszacowania błędów JTF spowodowane zawartością niepożądanym harmonicznym w sygnale analizowanym oraz odniesienia.

Pokazano, że błąd zastosowania algorytmu JTF dla zniekształceń skupionych w pewnych punktach widma jest większy niż w przypadku, gdy niepożądane harmoniczne rozłożone są równomiernie na osi częstotliwości.

## 5. Literatura

- [1] Fundamentals of Direct Digital Synthesis (DDS). MT-085 Tutorial, <http://www.analog.com>.
- [2] Goja J., Lentka G. A family of new generation miniaturized impedance analyzers for technical object diagnostics // Metrology and Measurement Systems, Vol. XX, (2013), No. 1, p. 43–52.
- [3] Khoma V., Wrzuszczak M.: Kompensacyjny miernik admitancji, Przegląd Elektrotechniczny nr 5/2008, str. 33-36.
- [4] Wrzuszczak M., Khoma Y., Khoma V.: Metoda cyfrowego pomiaru składowych sygnałów sinusoidalnych w zakresie małych częstotliwości, Przegląd Elektrotechniczny, vol.89, s. 302-305, 2013.
- [5] Wrzuszczak M., Khoma V.: System komputerowy do badań wiroprądowych z zastosowaniem cyfrowego przetwornika impedancji, PAK, vol. 57, s. 456-459, 2011.
- [6] Zieliński T.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań. WKŁ Warszawa 2009.
- [7] AD 5933. 1 MSPS, 12 bit Impedance Converter, Network Analyzer. Preliminary Data Sheet –<http://www.analog.com/>.

otrzymano / received: 16.12.2013

przyjęto do druku / accepted: 02.09.2014

artykuł recenzowany / revised paper