

Algorytmy i pomiary nachylenia i odchyłek prostoliniowości prostej 2D głowicą pomiarową ze sztywnym trzpieniem na manualnej współrzędnościowej maszynie pomiarowej

dr inż. Ryszard Filipowski, mgr inż. Zbigniew Lechniak, dr hab. inż. Józef Zawora
Instytut Technik Wytwarzania, Wydział Inżynierii Produkcji, Politechnika Warszawska

Przedstawiono podstawy matematyczne i obliczenia nachylenia prostych, odchyłek prostoliniowości względem prostej 2D i odchyłkę prostoliniowości średnio kwadratową. Parametry prostej wyznaczono za pomocą regresji stosując metodę najmniejszych kwadratów. Prosta aproksymacyjna przechodzi przez środek ciężkości zbioru punktów pomiarowych. Z warunku koniecznego na minimum funkcji aproksymacyjnej Lagrange'a z warunkiem ubocznym uzyskano układy równań jednorodnych o dwóch niewiadomych dla prostej 2D. Rozwiązanie tych równań pozwala znaleźć wartości własne $\lambda_i, i = 1, 2$ oraz wektory własne $v(2,2)$ będące wektorami prostopadłymi do dwóch wzajemnie prostopadłych prostych przechodzących przez środek ciężkości. Wektor normalny do szukanej prostej odpowiada najmniejszej wartości własnej $\lambda_i, i = 1, 2$.

1. Wstęp

Linie proste generują podczas pomiarów płaszczyzny na korpusach, żebrach profilów lotniczych, pryzmach itp.

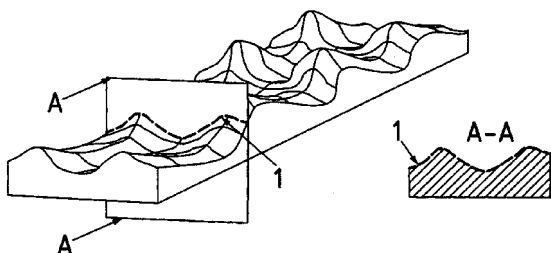
Odchyłka prostoliniowości prostej jest sumą ochyłki dodatniej i ujemnej od prostej regresji ustalonej według kryterium najmniejszych kwadratów od zarysu rzeczywistego (rys. 1) [9].

Odchyłka prostoliniowości dodatnia i ujemna mierzona jest w kierunku normalnym do prostej regresji (rys. 2).

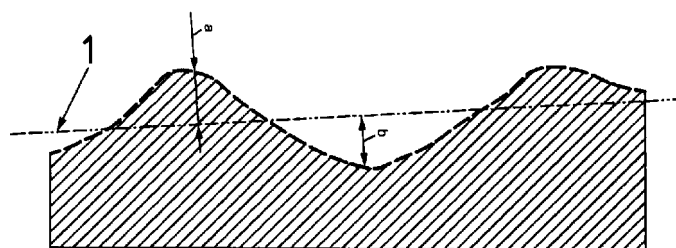
Prostą ortogonalną określa się na podstawie współrzędnych punktów pozyskanych podczas pomiarów prostych z CMM,

np. *Koordinatometr* firmy VIS Warszawa, *CMM VISTA* firmy Zeiss. Współrzędne punktów pomiarowych prostych odnoszą się do środka kulki głowicy pomiarowej, która stykała się z płaszczyzną na przedmiocie mierzonym lub do punktu styku wiązki promieni rentgenowskich z przedmiotem mierzonym na przemysłowych tomografach komputerowych (*METROTOM 800 – Zeiss*) [3].

Oprogramowanie CMM, np.: *Calypso* firmy Zeiss [1], *XYZ88* firmy VIS Warszawa [6], wykonuje automatyczną korektę współrzędnych punktów o promień kulki głowicy pomiarowej w trzech osiach. Promień kulki sondy pomiarowej jest ustalany podczas kalibracji sondy pomiarowej w trybie automatycznym (*CMM VISTA Zeiss*) lub wprowadza się wymiar



Rys. 1. Profil prostoliniowości: A-A – płaszczyzna prostoliniowości, 1 – linia zaobserwowana



Rys. 2. Odchyłki prostoliniowości względem prostej odniesienia: 1 – prosta odniesienia najmniejszych kwadratów, a – odchyłka prostoliniowości lokalna dodatnia, b – odchyłka prostoliniowości lokalna ujemna

sfery sztywnego trzpienia do procedury pomiarowej sterującej pracą CMM (np. Koordynatograf VIS Warszawa). Jest to tzw. tryb pracy OFF LINE [7].

Równania prostych na płaszczyźnie uzyskane według współrzędnych punktów z CMM są przesunięte o promień sondy pomiarowej od powierzchni mierzonej. Równania prostych wymagają translacji o wartość promienia sondy pomiarowej. Dla współrzędnych punktów pozyskanych z przemysłowego tomografu komputerowego nie ma potrzeby translacji, gdyż współrzędne leżą na powierzchni przedmiotu [2].

2. Algorytm obliczania parametrów prostej na płaszczyźnie

2.1. Równanie kierunkowe ortogonalnej prostej regresji, według Linnika,

Prostą ortogonalną wyznacza się metodą aproksymacji opartej o kryterium najmniejszych kwadratów. Dla prostych na płaszczyźnie wykorzystano w oprogramowaniu XYZ88 firmy VIS Warszawa [6] wzory dla ortogonalnej prostej regresji według Linnika [5].

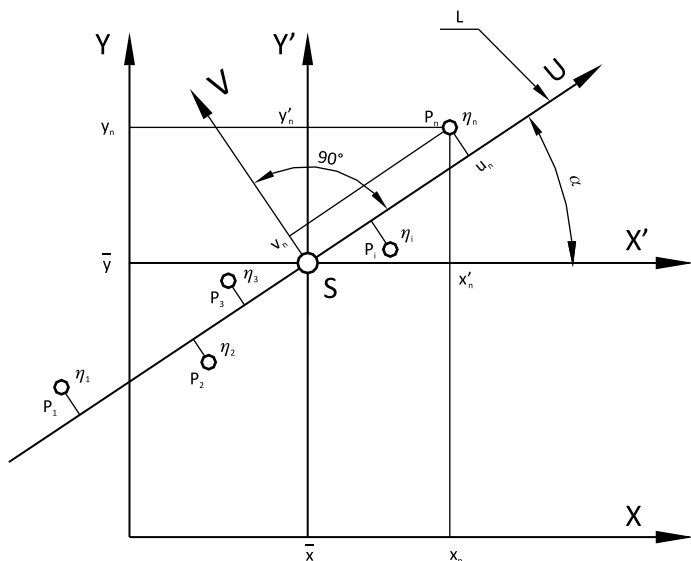
Równanie kierunkowe prostej ma postać:

$$y = m \cdot x + n \tag{1}$$

Współczynnik kierunkowy m prostej ortogonalnej (rys. 3) został obliczony dla prostej przechodzącej przez środek ciężkości $S(\bar{x}, \bar{y})$ punktów pomiarowych P_i . Wartość współczynnika m wg Linnika [5] oblicza się z następującego wzoru:

$$m = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \cdot \arctg \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \right) \right) \tag{2}$$

stała: $n = \bar{y} - m \cdot \bar{x}$ (3)



Rys. 3. Ortogonalna prosta regresji L na płaszczyźnie, wg [5]: $S(\bar{x}, \bar{y})$ – środek ciężkości punktów pomiarowych, α – kąt nachylenia prostej z dodatnim kierunkiem osi OX

(\bar{x}, \bar{y}) – współrzędne środka ciężkości punktów pomiarowych $P(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$ prostej w układzie globalnym:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n, \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i / n \tag{4}$$

2.2. Równanie prostej ortogonalnej według Lagrange'a

Ogólniejszą metoda definiowania prostych ortogonalnych jest metoda Lagrange'a, którą stosuje się zarówno dla prostych na płaszczyźnie jak i dla prostych w przestrzeni [4].

Ortogonalną prostą regresji metodą Lagrange'a z warunkiem ubocznym definiuje się również w środku ciężkości $S(\bar{x}, \bar{y})$ zbioru punktów pomiarowych (rys. 4). W tym przypadku równanie prostej nie zawiera stałej i przyjmuje formę:

$$b_1 \cdot x' + b_2 \cdot y' = 0 \tag{5}$$

Kryterium najmniejszych kwadratów Lagrange'a z warunkiem ubocznym odchyłek od prostej ortogonalnej w układzie lokalnym o początku w środku ciężkości $S(\bar{x}, \bar{y})$ ma postać funkcji:

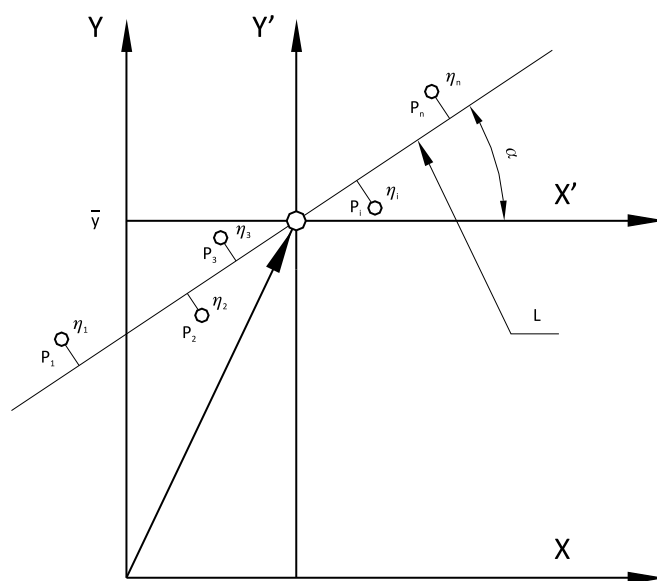
$$F(b_1, b_2, \lambda) = \sum_{i=1}^n (b_1 \cdot x'_i + b_2 \cdot y'_i)^2 - \lambda \cdot (b_1^2 + b_2^2 - 1) = \min \tag{6}$$

gdzie: $b_1^2 + b_2^2 = 1$ - warunek uboczny,

$x'_i = (x_i - \bar{x})$, $y'_i = (y_i - \bar{y})$ – współrzędne punktu w układzie lokalnym,

\bar{x} , \bar{y} - współrzędne środka ciężkości S , zbioru punktów pomiarowych,

b_1, b_2, λ - nieznanne parametry.



Rys. 4. Ortogonalna prosta regresji L na płaszczyźnie, wg [4]: $S(\bar{x}, \bar{y})$ – środek ciężkości punktów pomiarowych, η_i – odchyłki w kierunku normalnym od prostej, $\operatorname{tg}(\alpha)$ – współczynnik kierunkowy prostej ortogonalnej

Równanie (6) nie zawiera stałej, gdyż prosta przechodzi przez środek ciężkości zbioru punktów pomiarowych P_i , $i = 1, \dots, n$. Obliczenia parametrów prostej (b_1, b_2) wykonywano w układzie lokalnym. W dalszym opisie znak „prim” przy współrzędnych pominięto.

Warunkiem koniecznym na minimum funkcji Lagrange’a (5) z warunkiem ubocznym jest zerowanie się jej pochodnych cząstkowych względem zmiennych: b_1, b_2, λ , tj.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(b_1, b_2, \lambda)}{\partial b_1} &= b_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \lambda \cdot b_1 = 0 \\ \frac{\partial F(b_1, b_2, \lambda)}{\partial b_2} &= b_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 - \lambda \cdot b_2 = 0 \\ \frac{\partial F(b_1, b_2, \lambda)}{\partial \lambda} &= b_1^2 + b_2^2 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Po rozpisaniu warunku koniecznego (7) uzyskano układ równań jednorodnych o postaci:

$$\left. \begin{aligned} b_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \lambda \right) + b_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i &= 0 \\ b_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i + b_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - \lambda \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wprowadzono oznaczenia macierzowe $A_{2 \times 2}$, $B_{2 \times 1}$, $E_{2 \times 2}$:

$$A2 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{bmatrix}, \quad b2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad E2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Układ równań jednorodnych (9) zapisano równaniem macierzowym:

$$(A2 - \lambda \cdot E) \cdot b = 0 \quad (10)$$

Układ równań jednorodnych (10) ma niezerowe rozwiązanie, jeśli wyznacznik układu spełnia warunek:

$$\det(A2 - \lambda \cdot E) = 0 \quad (11)$$

Przez rozwinięcie wyznacznika (11) uzyskuje się tzw. wielomian charakterystyczny drugiego stopnia względem zmiennej λ , tj. $W_2(\lambda) = 0$. Pierwiastki tego równania, zwane wartościami własnymi: (λ_1, λ_2) wstawione do układu równań jednorodnych (8) pozwalają obliczyć dwa wektory własne, które określają dwie proste prostopadłe względem siebie. Można udowodnić, że wartości własne λ_i ($i = 1, 2$) są średnimi kwadratami odległości punktów pomiarowych od obu prostych [2]. Szukaną prostą jest ta, której odpowiada najmniejsza wartość własna λ_i .

Do obliczenia wartości własnych i wektorów własnych posłużono się standardowymi podprogramami z biblioteki IBM o nazwach NROOT oraz EIGEN [8]. W wyniku obliczeń uzyskano:

wektor $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ z wartościami własnymi

oraz macierz

$B2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ z wektorami własnymi, która w zapisie blo-

kowym ma postać: $B2 = [b_1, b_2]$. Kolejnej wartości własnej λ_i odpowiada kolejny wektor w tablicy B2. Najmniejszej wartości własnej λ_i odpowiada poszukiwany wektor. Znalezione wektor jest prostopadły do poszukiwanej prostej, którą definiuje się w postaci równania normalnego prostej $x \cdot b_{1i} + y \cdot b_{2i} - p = 0$. Odległość p prostej od początku układu globalnego obliczano z zależności: $p = (-\bar{x} \cdot b_{1i} - \bar{y} \cdot b_{2i})$. Indeks i określa wektor w tablicy B2.

Niżej przytoczono przykład wyników obliczeń wektora wartości własnych $\lambda(2,1)$ oraz tablicy wektorów własnych B2(3,3) dla prostej kontrolnej 2D (opisanej niżej w p. 3.1).

Obliczone wartości własne λ_i , dla $i = 1, 2$ zapisane w wektorze $\lambda(2,1)$ wynoszą:

$$\lambda(2,1) = \begin{bmatrix} 897.2255 \\ 0.0001 \end{bmatrix}$$

Obliczone wektory własne zapisane w macierzy B2(2,2) wynoszą:

$$B2(2,2) = \begin{bmatrix} 0.8660 & -0.5000 \\ 0.8660 & 0.8660 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Indeks najmniejszej wartości własnej $\lambda_2 = 0.0001$ określa ostatnią kolumnę w macierzy B2(2,2) będącą składowymi wektora poszukiwanej prostej ortogonalnej, tj.:

$$b_2 = \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.8660 \end{bmatrix}.$$

3. Odchyłki prostoliniowości oraz kąty nachylenia prostej względem osi OX

Opracowano uniwersalny program SIGML.EXE, który umożliwia obliczenie nachylenia i odchyłki prostoliniowości prostej leżącej na płaszczyźnie (2D) i prostej w przestrzeni (3D). Polecenie dla programu wykonania obliczeń dla prostej 2D lub 3D sygnalizowane jest w danych do programu przez parametr o wartości liczbowej „2” lub „3”. Dane pozyskane z pomiarów na CMM mają zawsze trzy współrzędne (x_i, y_i, z_i) .

Poprawność obliczeń dla prostej 2D wykonywanych przez program SIGML.EXE sprawdzono dla sześciu kompletów danych. Pierwsze cztery komplety kontrolne zawierają współrzędne 18 punktów leżących na prostych i w ich sąsiedztwie nachylonych pod kątami 30° oraz 120° (tabl. 1). Pozostałe dwa komplety danych stanowią pliki ze współrzędnymi punktów uzyskanymi podczas skanowania prostych o kącie nachylenia 45° oraz 135° głowicą pomiarową z sztywnym trzpieniem z końcówką sferyczną na CMM VIS Warszawa (tabl. 2).

3.1. Nachylenie prostej 2D i odchyłki prostoliniowości od prostej kontrolnej

Zadawanie punktów na prostej kontrolnej 2D i w jej sąsiedztwie przedstawiono na rys. 4. W celu sprawdzenia poprawności obliczeń odchyłek prostoliniowości prostej 2D przez program SIGML.EXE przygotowano dwa zbiory punktów leżących na dwóch prostych nachylonych pod kątami $\alpha = 30^\circ$ i $\alpha = 120^\circ$ do osi OX, których równania normalne mają postać:

$$x \cdot \cos(30) + y \cdot \sin(30) - 0,866 = 0 \quad (12)$$

$$x \cdot \cos(120) + y \cdot \sin(30) + y \cdot \sin(120) - 50 = 0 \quad (13)$$



Tablica 1. Nachylenie i odchyłki prostoliniowości od prostej kontrolnej 2D

Lp.	Zbiory punktów (x_i, y_i, z_i)	Liczba punkt.	Odchyłki prostolin. MIN/MAX	Odchyłka suma DEVLC	Współczyn./ kąt b_{1i} / α_i°	Współczyn./ kąt b_{2i} / β_i°	Odległ. prostej p
1	Prosta 30°	18	0,0/0,0	0,0	-0,50/30,0	0,866/60,0	-0,866
2	Pro. Sąsiedz. 30°	18	-0,0165/0,0184	0,0349	-0,50/30,0002	0,866/59,9998	-0,8649
3	Prosta 120°	18	0,0/0,0	0,0	0,866,120,0/	0,50/30,0	-50,0
4	Pro. Sąsiedz. 120°	18	-0,0110/0,0119	0,0229	0,0866/119,9986	0,50/29,9986	-49,994

Na obu prostych wyznaczono 18 punktów, dla $x \in \langle 0, \dots, 85 \rangle$, z krokiem co 5 mm. Ponadto utworzono dwa dodatkowe zbiory punktów o nazwie sąsiedztwo zmieniając współrzędną y_i przemiennie o wartość $\pm 0,02$. Dane z czterech utworzonych zbiorów wprowadzono kolejno do programu SIGML.EXE. Wyniki obliczeń programu dla plików z danymi o kącie nachylenia prostych 30° i 120° zamieszczono w tablicy 1 (L.p.1 oraz L.p.3). Wyniki obliczeń programu dla plików 30° i 120° sąsiedztwa zamieszczono w tablicy (L.p.2 oraz L.p.4). Zmiana współrzędnych y_i punktów w zbiorach sąsiedztwa (L.p.2 oraz L.p.4) ma niewielki wpływ na parametry prostej normalnej (b_{1i}, b_{2i}) i jej nachylenie. Zmienia się tylko nieznacznie parametr p , określający odległość prostej od początku układu globalnego. Program SIGML.EXE oblicza odchyłkę prostoliniowości ujemną – MIN, dodatnią – MAX względem prostej regresji oraz odchyłkę sumę – DEVLC. Dla zbiorów oznaczonych (L.p.1 i L.p.3) odchyłki te wynoszą 0, gdyż punkty leżą na prostych.

Program SIGML.EXE umożliwia ponadto obliczenia parametrów prostej regresji (b_{1i}, b_{2i}, p) oraz nachylenia wyrażonych w stopniach.

3.2. Nachylenie i odchyłki prostoliniowości od dwóch prostych 2D po skanowaniu

Skanowanie prostej 2D na manualnej WMP wykonano na ramionach przyzmy (rys. 7). Kąty ramion przyzmy wynosiły 45° i 135° względem układu globalnego.

Wyniki obliczeń programu SIGML.EXE dla punktów po skanowaniu prostych na przyzmy, pozyskanych z WMP VIS Warszawa, zamieszczono w tablicy 2.

W celu poprawienia dokładności obliczeń środka ciężkości $S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ program SIGML.EXE usuwa punkty bliskoznaczne

uzyskane podczas skanowania. Przyjęto wzajemną odległość punktów pomiarowych ≤ 1 mm. Liczba punktów w zbiorze zmalała z 52 do 16. Program oblicza odchyłki prostoliniowości ujemną – MIN, dodatnią – MAX oraz sumę DEVLC względem prostej regresji, parametry prostej regresji (b_{1i}, b_{2i}, p) oraz nachylenie w stopniach.

Programem SIGML.EXE obliczono nachylenia, odchyłki prostoliniowości, tzn. odchyłkę ujemną – MIN, dodatnią – MAX oraz odchyłkę – sumę DEVLC, względem prostej regresji. Dla zbioru danych L.p.1 odchyłki te wynoszą 0, gdyż punkty leżą na prostej. Dalej program SIGML.EXE oblicza parametry prostej regresji (b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}) (i – indeks wektora w tablicy wektorów własnych **B2**), nachylenia oraz kąty: $W1^\circ$ i $W2^\circ$ w płaszczyznach OXY i OXZ.



Rys. 5. Skanowanie prostej 2D na manualnej CMM głowicą pomiarową z sztywnym trzpieniem i końcówką sferyczną

Tablica 2. Nachylenie prostej i odchyłki prostoliniowości od prostej 2D po skanowaniu

Lp.	Zbiory punktów (x_i, y_i, z_i)	Liczba punkt.	Odchyłki prostolin. MIN/MAX	Odchył. Suma DEVLC	Współczyn./ Kąt b_{1i} / α_i°	Współczyn./ Kąt b_{2i} / β_i°	Odległ. od prostej p
1	Pro.Skanow. 45°	55/16	-0,0131/0,011	0,0241	0,7174/45,8382	-0,6967/44,1618	13,2069
2	Pro.Skanow. 135°	52/16	-0,0115/0,0147	0,0297	0,7127/134,5462	0,7015/44,5462	49,3021

4. Podsumowanie i wnioski

Zalecanym oprogramowaniem do obliczenia odchyłek prostoliniowości w manualnych CMM jest regresja ortogonalna. Jeśli w oprogramowaniu CMM (np. XYZ88.FOR VIS [5]) takich podprogramów nie ma, należy pliki z wynikami pomiarów prostych 2D lub 3D na CMM wykorzystać do obliczeń odchyłek prostoliniowości poza maszyną współrzędnościową. Na przykład, współrzędne punktów $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, n$ uzyskane z pomiarów prostych wprowadzić do programu regresji ortogonalnej (np. SIGML.EXE) i uzyskać poprawne wyniki odchyłek prostoliniowości. Przedstawiony program ustala również równanie prostej (na płaszczyźnie i w przestrzeni) co pozwala skontrolować poprawność wykonania nachyleń kątowych prostych na mierzonym przedmiocie.

Lepszym rozwiązaniem mogłoby być wprowadzenie uzupełnień do programu współrzędnościowej maszyny pomiarowej (np. XYZ88.FOR [5]), ale nie jest to zadanie proste a czasami wręcz niemożliwe, gdyż twórcy oprogramowania nie udostępniają programów źródłowych użytkownikom, którym przekazano maszynę współrzędnościową do użytkowania.

Literatura

1. CALYPSO, Software für Koordinatenmesstechnik, Benutzerhandbuch, Version 2.3, Carl Zeiss, Industrielle Messtechnik, Oberkochen, 6/2000.

2. Dziubiński I., Świątkowski T.; Poradnik matematyczny, cz.2. PWN, Warszawa 1985.

3. Kowaluk T., Ratajczyk E.: Wzorce do badania dokładności przemysłowych tomografów komputerowych i przykłady ich stosowania. Mechanik nr 4/2015, str. 291-296.

4. Leitner R.: Zarys matematyki wyższej dla inżynierów, cz. I. WNT, Warszawa 1977.

5. Linnik J.W.: Metoda najmniejszych kwadratów i teoria opracowania obserwacji. PWN, Warszawa 1962.

6. Łazuchiewicz A., Kotnowski M., Koordynatometr XYZ, IO NE Nr 5/88, Ośrodek Badawczo-Rozwojowy Narzędzi VIS, Warszawa 1988.

7. Pfeifer T., Hemdt A.: Berechnung der Basiselemente und die Tasterkompensation in der Koordinatenmesstechnik, Teil. 1, Basiselemente, Technisches Messen, t. 57, (1990), 3, R. Oldenburg Verlag.

8. Sbornik Naučných Program na Fortranie 2, Rukavodstvo dla Programista, Vypusk 2, Matričnaja Algebra i Liniejnaja Algebra, Moskva <STATISTICA> 1974: SUBROUTINE MINV str. 72, SUBROUTINE EIGEN str. 187, SUBROUTINE NROOT, str. 191.

9. PN-EN ISO 12780-1:2012, Specyfikacja geometrii wyrobów (GPS). Prostoliniowość, Część 1: Terminologia i parametry prostoliniowości. ■

reklama

4METAL.PL

Ponad 2000 podwykonawców z całego świata

- [katalog firm] PONAD 2000 FIRM Z CAŁEGO ŚWIATA PODZIELONYCH NA KATEGORIE
- [giełda pracy] OGŁOSZENIA PRACOWNIKÓW I PRACODAWCÓW Z BRANŻY
- NEW** [giełda materiałów] OGŁOSZENIA KUPNA I SPRZEDAŻY, SZCZEGÓLOWO PODZIELONE NA GATUNKI I KSZTAŁTY MATERIAŁÓW
- [giełda maszyn] PONAD 2300 AKTUALNYCH OGŁOSZEŃ KUPNA I SPRZEDAŻY
- [wydarzenia] LISTA TARGÓW I IMPREZ BRANŻOWYCH ZE ŚWIATA
- [aktualności] TECHNOLOGIE, WYWIADY, SPRAWOZDANIA, WSZYSTKO CZEGO POTRZEBUJESZ
- [media] INFORMACJE O CZASOPISMACH BRANŻOWYCH Z CAŁEGO ŚWIATA
- [video] RELACJE, WYWIADY, PREZENTACJE

2005 2006 2007 2008 2009 2010 GET THE MEMBERSHIP

staleo.pl
portal branży metalowej

SIŁA INTERNETU

NEWSLETTER, Z KRAJU I ZE ŚWIATA, BUSINESS, VIDEO, PRZYŁĄCZ SIĘ, GIEŁDA OGŁOSZEŃ, KATALOG FIRM