

# Estymacja niepewności charakterystyki z pomiarów w punktach kontrolnych

Zygmunt Lech Warszawa

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa

Jacek Puchalski

Główny Urząd Miar, ul. Elekoralna 2, 00-001 Warszawa

**Streszczenie:** W pracy omówiono dwie metody estymacji niepewności kilku wartości funkcji opisującej badaną charakterystykę na podstawie pomiarów w punktach kontrolnych. Metoda I, nazwana deterministyczną, wykorzystuje w interpolacji niepewności typu B w tych punktach korzystając z liniowej aproksymacji przebiegu maksymalnych dopuszczalnych błędów przyrządów. Metoda II polega na statystycznej estymacji niepewności dla wartości funkcji jako liniowej kombinacji wyników pomiarów w punktach kontrolnych. Do wyznaczenia niepewności użyto macierzowego równania propagacji wariancji w pośrednich pomiarach wieloparametrowych, podanego w Suplemencie 2 do Przewodnika GUM. Jest to rozszerzenie zastosowania tego Suplementu.

Dla dwu interpolowanych wartości porównano wyniki estymacji niepewności względnych i bezwzględnych oraz ich sumy i różnicy otrzymane obiema metodami. Do interpolacji badanej funkcji w całym zakresie podano zasadę minimalizacji liczby kontrolnych punktów pomiarowych. Obie metody można stosować w wielu obszarach współczesnej metrologii.

**Słowa kluczowe:** estymacja niepewność badanej funkcji, punkty kontrolne, pomiary pośrednie, multimenzurand, błędy graniczne

## 1. Wprowadzenie

W wielu obszarach praktyki pomiarowej, a w szczególności w pomiarach o dużej precyzji występuje zagadnienie: w ilu i których punktach badanej charakterystyki należy zmierzyć jej wartości i z jaką dysponowaną dokładnością, by w całym zakresie jej pomiarów nie przekroczyć wymaganych wartości niepewności bezwzględnej lub względnej. Dotyczy to na przykład kalibracji przyrządów, badania charakterystyk czujników, przetworników i innych członów systemów pomiarowych, a ponadto kontroli elementów i podzespołów w produkcji, testowania i diagnostyki eksploatowanych urządzeń.

W badaniach tych mogą wystąpić następujące sytuacje: –znane są równania opisujące badaną charakterystykę i dokładność użytych mierników, np. dla woltomierza cyfrowego jest to liniowa zależność dopuszczalnego błędu maksymalnego. Należy znaleźć przebieg niepewności tej charakterystyki;

- znany jest tylko rodzaj badanej funkcji menzurandu, należy znaleźć i jej parametry i przebieg niepewności;
- nieznany jest ani rodzaj badanej funkcji, ani równanie opisujące jej niedokładność.

W badaniach podstawowych, aplikacyjnych i naukowych nie ma zwykle istotnych ograniczeń co do gęstości punktów pomiarowych, kosztów i czasu badań. Jeśli parametry funkcji opisującej badaną charakterystykę znajduje się eksperymentalnie, to opis jej dokładności wyznacza się zwykle metodami statystycznymi, w tym stosując regresję liniową. Natomiast w wielu badaniach użytkowych istnieją różne ograniczenia, które powodują, że trzeba zminimalizować liczbę punktów kontrolnych badanej funkcji, ich rozmieszczenie i objętość informacji oraz czas i koszt jej pozyskiwania. Zależy to od jej rodzaju i zakresu wartości, od możliwości uzyskania wymaganej niepewności pomiarów i od dokładności użytej aparatury pomiarowej. Może też pojawić się wymaganie, by punkty kontrolne rozmieszczać nierównomiernie.

W pracy rozpatrzy się przypadki, gdy estymację niepewności wartości funkcji  $y = f(x)$  opisującej badaną charakterystykę należy przeprowadzić dla wartości  $x$  nie mierzonych bezpośrednio, położonych w przedziale między punktami kontrolnymi (interpolacja) i poza tym przedziałem (ekstrapolacja), ale w pobliżu. Estymacji tej dokona się na podstawie znanych wartości i niepewności w punktach kontrolnych. Zbada się ich zależność od rozstępu punktów kontrolnych i ich położenia wzdłuż zakresu badanej funkcji. Określi się

### Autor korespondujący:

Zygmunt Lech Warszawa, zlw936@gmail.com

### Artykuł recenzowany

nadesłany 19.11.2018 r., przyjęty do druku 14.12.2018 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

też granice przedziału, w którym estymowane niepewności nie przekroczą wymaganych wartości oraz zaproponuje się procedurę minimalizującą liczbę punktów kontrolnych.

Omówi się zastosowanie dwu metod estymacji niepewności dla dowolnych wartości badanej funkcji. Metoda I, nazwana tu deterministyczną, polega na wyznaczaniu niepewności z przebiegu błędu granicznego, znanego z przeprowadzonej wiarygodnie kalibracji lub z danych od producenta. Metoda II jest statystyczna i opiera się na wynikach pomiarów w punktach kontrolnych. Proponuje się by estymację tą metodą przeprowadzać tak, jak dla pośrednich pomiarów wieloparametrowych, tj. wg wektorowej metody propagacji niepewności, zalecaniej międzynarodowo w Suplemencie 2 do Przewodnika Wyrażania Niepewności o angielskim akronimie GUM [1]. Służy ona do szacowania niepewności zbioru pojedynczych wartości wielkości skojarzonych w pośrednich pomiarach wieloparametrowych, czyli elementów multimenzurandu. W pracy proponuje się zastosowanie tej metody do estymacji niepewności dowolnej wartości funkcji na podstawie pomiarów kontrolnych w ograniczonej liczbie punktów.

## 2. Zasady estymacji niepewności punktów charakterystyki wyznaczanych pośrednio

Omawianie zagadnienia rozpocznie analiza prostego przypadku, gdy w punktach kontrolnych mierzy się dwie wartości badanej wielkości  $x$ , tj.  $x_1, x_2$ , ( $x_2 > x_1$ ). Ich standardowe odchylenia, oznaczane jako  $\sigma_{x1}, \sigma_{x2}$ , są traktowane jako niepewności bezwzględne. Na podstawie tych pomiarów należy oszacować:

- niepewności bezwzględne  $\sigma_{xi}$  i względne  $\delta_i \equiv \sigma_{xi}/x_i$  dla wartości  $x_i$ , których nie mierzy się bezpośrednio;
- zakresy dla estymowanych niepewności o zadanych wartościach granicznych;
- niepewności innych wielkości zależnych od  $x$  wg znanej funkcji  $f(x)$ .

Omówi się też wybór liczby punktów kontrolnych zależnie od zakresu wartości badanej funkcji i wymaganej niepewności. Rozważania staną się bardziej ogólne, jeśli znormalizuje się mierzone wartości, tj. odniesie się je do szerokości przedziału pomiędzy punktami kontrolnymi  $x_2 - x_1$ , do zakresu pomiarowego  $x_{max} - x_0$  lub do wybranej wartości z tego zakresu, np.  $x_{max}$ .

Niepewność standardowa każdej z kontrolowanych wartości  $x_1, x_2$  jest według Przewodnika GUM [1] sumą geometryczną dwu składników

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \tag{1}$$

Niepewność  $u_A$  (typu A) wyznacza się metodami statystycznymi z rozrzutu wartości i liczby  $n$  powtarzanych pomiarów wielkości mierzonej.

Drugi składnik – niepewność  $u_B$  (typu B) obejmuje przewidywany łączny wpływ wielu różnych oddziaływań na badany obiekt, użyte przyrządy i system pomiarowy. Mają one charakter deterministyczny, lecz ich wartości nie są znane przy wykonywaniu pomiarów. Pochodzą od wpływów wielkości, które mogą pojawić się w warunkach dopuszczalnych w znamionowym okresie eksploatacji [1, 2]. Zrandomizowanym oszacowaniem tych wpływów jest wartość standardowej niepewności  $u_B$ . Wyznacza się ją heurystycznie dla przewidywanych rozkładów prawdopodobieństwa i granicznych wartości oddziaływań. W tej pracy nie będzie się szczegółowo analizować poszczególnych składników niepewności  $u_B$ .

Rozważania będą dotyczyć przypadków, gdy niepewności dla wartości  $x_1, x_2$  mierzonych w punktach kontrolnych są znane z pomiarów i z danych przyrządów. Gdy mierzy się je niesynchronicznie, na zakresach o różnej dokładności, lub różnymi przyrządami, to należy założyć, że ich współczynnik korelacji  $\rho_{12} \rightarrow 0$ . Niezmiernie rzadko  $\rho_{12} < 0$ . Przy pomiarach tym samym przyrządem i w jednakowych warunkach  $\rho_{12} \rightarrow 1$ . Ze wzrostem wartości mierzonych  $x_2 \geq x_1$  niepewność bezwzględna zwykle też wzrasta, tj.  $u_{x2} \geq u_{x1}$  i to często proporcjonalnie.

W metodzie I stosuje się opis niepewności punktów mierzonych wynikający z maksymalnego dopuszczalnego błędu przyrządów pomiarowych, ich przetworników i czujników [2, 3]. Moduł tego błędu podaje się jako sumę dwu składowych, addytywnej i multiplikatywnej, zależną liniowo od mierzonej wartości  $x$ , czyli menzurandu, w postaci [2, 3]:

$$|\Delta_x| \leq |\Delta_x|_{max} = |\Delta_{x_0}|_{max} + (x - x_0) |\mathcal{E}_S|_{max} \tag{2}$$

gdzie: moduły dopuszczalnych błędów bezwzględnych:  $|\Delta_x|$  – dla wartości  $x$  i  $|\Delta_{x_0}|_{max}$  – dla początkowej wartości zakresu  $x_0$ , (np.  $x_0 = 0$ );  $\mathcal{E}_S \equiv \Delta_{x-x_0} / (x - x_0)$  – względny błąd różnicy ( $x - x_0$ ) sygnału wyjściowego lub odczytu;  $|\mathcal{E}_S|_{max}$  – dopuszczalny moduł tego błędu.

Z dwu granicznych wartości  $\pm |\Delta_{x1}|_{max}, \pm |\Delta_{x2}|_{max}$  błędu dopuszczalnego (1) dla  $x_1, x_2$  menzurandu, wyznaczyć można liniowy przebieg funkcji niepewności. Dla rozrzutu  $x$  wewnątrz przedziału błędów granicznych  $\pm |\Delta_{x1}|_{max}, \pm |\Delta_{x2}|_{max}$  zwykle przyjmuje się równomierne rozkłady prawdopodobieństwa oraz ich odchylenia średnie kwadratowe  $\sigma_{x1}, \sigma_{x2}$  – jako standardowe niepewności bezwzględne. Współczynnik korelacji między niepewnościami z całego zakresu wynosi 1.

Odnosząc wartości  $x, x_1, x_2$  do maksymalnej wartości  $x_{max}$  zakresu pomiarowego otrzyma się wartości względne:

$$\gamma_x = \frac{x}{x_{max}}, \quad \gamma_{x1} = \frac{x_1}{x_{max}}, \quad \gamma_{x2} = \frac{x_2}{x_{max}} \tag{3}$$

oraz  $x - x_1 = (\gamma_x - \gamma_{x1})x_{max}$  i dla  $\mathcal{E}_S = \text{const}$  – liniowy przebieg niepewności o tangensie kąta nachylenia:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_{x1}}{\gamma_x - \gamma_{x1}} = \frac{\sigma_{x2} - \sigma_{x1}}{\gamma_{x2} - \gamma_{x1}} \tag{3a}$$

Standardowa niepewność bezwzględna  $\sigma_x$  wynosi

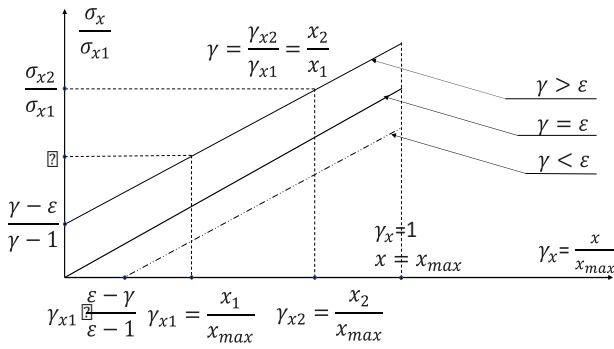
$$\sigma_x = \frac{\gamma_x - \gamma_{x1}}{\gamma_{x2} - \gamma_{x1}} (\sigma_{x2} - \sigma_{x1}) + \sigma_{x1} \tag{4}$$

Po jej normalizacji do niepewności  $\sigma_{x1} \neq 0$  pierwszego punktu kontrolnego  $x_1$ , otrzyma się  $\sigma_{nx} = \sigma_x / \sigma_{x1}$

$$\sigma_{nx} = \frac{\gamma_x - \gamma_{x1}}{\gamma_{x2} - \gamma_{x1}} \varepsilon + \frac{\gamma_{x2} - \gamma_x}{\gamma_{x2} - \gamma_{x1}} = \frac{\gamma_x}{\gamma_{x1}} \frac{\varepsilon - 1}{\gamma - 1} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma - 1} \tag{4a}$$

gdzie:  $\gamma \equiv x_2/x_1, \varepsilon \equiv \sigma_{x2}/\sigma_{x1}$  – stosunki wartości i niepewności punktów kontrolowanych  $x_1, x_2$ .

Liniowe przebiegi kilku znormalizowanych niepewności bezwzględnych przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Znormalizowana niepewność  $\sigma_x/\sigma_{x_1}$  jako liniowa funkcja znormalizowanej wielkości mierzonej  $\gamma_x = x/x_{max}$ ,  $\epsilon = \sigma_{x_2}/\sigma_{x_1}$ ,  $\gamma = x_2/x_1$ .  
Fig. 1. The normalized uncertainty  $\sigma_x/\sigma_{x_1}$  as linear function of the normalized of measured values  $\gamma_x = x/x_{max}$ ,  $\epsilon = \sigma_{x_2}/\sigma_{x_1}$  and  $\gamma = x_2/x_1$ .

Ze wzoru (3) wynika, że dla  $\sigma_x = 0$

$$\gamma_{\sigma_x=0} = \frac{\gamma_{x1}\sigma_{x2} - \gamma_{x2}\sigma_{x1}}{\sigma_{x2} - \sigma_{x1}} \quad (5)$$

Standardowa niepewność względna wielkości  $x$ :

$$\delta_x \equiv \frac{\sigma_x}{x} = \left(1 - \frac{\gamma_{x1}}{\gamma_x}\right) \delta_{(x_2-x_1)} + \frac{\gamma_{x1}}{\gamma_x} \delta_{x_1} \quad (6)$$

Odnosząc  $\delta_x$  do  $\delta_{x_1} \neq 0$  oraz oznaczając  $\gamma \equiv \frac{x_2}{x_1} = \frac{\gamma_{x2}}{\gamma_{x1}}$  otrzymuje się  $\delta_{(x_2-x_1)} = \frac{\epsilon-1}{\gamma-1} \delta_{x_1}$  i zależność hiperboliczną:

$$\frac{\delta_x}{\delta_{x_1}} = \frac{\gamma_{x1}}{\gamma_x} \frac{\gamma - \epsilon}{\gamma - 1} + \frac{\epsilon - 1}{\gamma - 1} \quad (7)$$

Ze wzoru (7) wynika, że  $\delta_x/\delta_{x_1} \rightarrow \infty$  dla małych wartości  $\gamma_x \rightarrow 0$ .

Metoda I jest bardzo prosta, jeśli dla maksymalnego błędu i niepewności można przyjąć zależności liniowe. Stosuje się ją do przybliżonej liniowej estymacji niepewności w całym zakresie, lub tylko w jego części niewiele szerszej od przedziału pomiędzy wartościami kontrolowanymi ( $x_1, x_2$ ). Nieliniowe przebiegi można aproksymować linię łamaną o innym nachyleniu w każdym przedziale między kolejnymi punktami kontrolnymi. W metodzie tej nie uwzględnia się jednak statystyki danych pomiarowych, w tym wpływu korelacji między niepewnościami wielkości mierzonych  $\sigma_{x1}, \sigma_{x2}$ , gdy współczynnik  $\rho_{x1,2} \neq 1$  oraz nie można wyznaczyć korelacji estymowanych wartości  $x_{c1}, x_{c2}$  i zależności ich niepewności od  $\rho_{x1,2}$ . Trzeba tu założyć, że wszystkie współczynniki korelacji są równe 1.

### 3. Metoda II – statystyczna

#### 3.1. Estymacja niepewności bezwzględnej w przedziale między punktami kontrolnymi

Zależność niepewności dla wielkości  $x$  wewnątrz i na zewnątrz przedziału między jej dwoma wartościami  $x_1, x_2$  zmierzonymi w punktach kontrolnych, w ogólnym przypadku może być nieznana. Wartość  $x_c$ , zależną liniowo od  $x_1, x_2$ , estymuje się z pomiarów jako ich superpozycję:

$$x_c = x_1 + k(x_2 - x_1) = (1 - k)x_1 + kx_2 \quad (8)$$

gdzie: współczynniki  $k(x_c)$  – współczynnik  $0 \leq k \leq 1$  dla  $x_1 \leq x_c \leq x_2$ ,

Jeśli zależność niepewności od mierzonej wielkości  $x$ ,  $\sigma_x = f(x)$  nie jest znana, to niepewność  $\sigma_{x_c}$  wartości  $x_c$  należy oszacować pośrednio z wartości i niepewności pomiarów kontrolnych. Przy statystycznym opisie dokładności za pomocą niepewności, wartości kontrolne, np.  $x_1, x_2$  ich niepewności  $\sigma_{x1}, \sigma_{x2}$ , jak i wartości, których niepewności estymuje się pośrednio z tych pomiarów, np.  $x_{c1}, x_{c2}$ , modeluje się zmiennymi losowymi. Skorzystamy też z wektorowej metody wyznaczania niepewności multimenzurandu podanej w Suplemencie 2 do Przewodnika GUM [1].

W metodzie tej analizowany multimenzurand wyjściowy  $\mathbf{Y}$  opisuje się ogólnie równaniem macierzowym

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (9)$$

Elementy wektora wyjściowego  $\mathbf{Y}$  wyznacza się pośrednio z pomiarów elementów wektora  $\mathbf{X}$ . Ich niepewności i współczynniki korelacji zawiera macierz kowariancji  $\mathbf{U}_Y$ . Macierz tę wyznacza się z wektorowego prawa propagacji wariancji [1]:

$$\mathbf{U}_Y = \mathbf{S} \mathbf{U}_X \mathbf{S}^T \quad (10)$$

Na przykład, gdy estymuje się niepewności dwu wartości analizowanej funkcji, tj. dla wyjściowego menzurandu  $\mathbf{x}_c = [x_{c1}, x_{c2}]^T$  o macierzy kowariancji  $\mathbf{U}_{x_c}$ , to macierz czułości  $\mathbf{S}$  i macierze kowariancji  $\mathbf{U}_X$  i  $\mathbf{U}_{x_c}$  wielkości  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$  i  $\mathbf{x}_c$  mają postaci:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{c1}}{\partial x_1} & \frac{\partial x_{c1}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x_{c2}}{\partial x_1} & \frac{\partial x_{c2}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (11a)$$

$$\mathbf{U}_X = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \rho_{x1,2} \sigma_{x1} \sigma_{x2} \\ \rho_{x1,2} \sigma_{x1} \sigma_{x2} & \sigma_{x2}^2 \end{bmatrix} \quad (11b)$$

$$\mathbf{U}_{x_c} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_{c1}}^2 & \rho_{x_{c1,2}} \sigma_{x_{c1}} \sigma_{x_{c2}} \\ \rho_{x_{c1,2}} \sigma_{x_{c1}} \sigma_{x_{c2}} & \sigma_{x_{c2}}^2 \end{bmatrix} \quad (11c)$$

gdzie:  $\sigma_{x1}, \sigma_{x2}$  i  $\sigma_{x_{c1}}, \sigma_{x_{c2}}$  – niepewności bezwzględne,  $\rho_{x1,2}, \rho_{x_{c1,2}}$  – współczynniki korelacji.

Jeśli niepewności względne w pomiarach nie przekraczają kilku procent, to z równania (10) wyznacza się niepewności dla nieliniowej funkcji przetwarzania  $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$  z użyciem jej jakobianu  $\mathbf{S} = \partial \mathbf{Y} / \partial \mathbf{X}$ .

Do opisu estymacji niepewności dla dwu wartości  $x_{c1}, x_{c2}$ , gdy zależą liniowo od mierzonych wartości  $x_1, x_2$ , zastosujemy kombinacje liniowe o współczynnikach  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  oraz  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , tj.:

$$x_{c1}(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 \quad (12a)$$

$$x_{c2}(\boldsymbol{\beta}) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 \quad (12b)$$

Współczynniki  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$  i  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$  nie zależą od wartości  $x_1$  i  $x_2$ . Wybiera się je w sposób dowolny. Są one ograniczone tylko przez warunki brzegowe. Można je wybrać tak, by były spełniane przez odpowiednie wartości  $x_1$  i  $x_2$  estymatorów, np. ich wartości średnie.

W szczególnym przypadku, gdy wyniki pomiarów kontrolnych  $x_1, x_2$  są nieskorelowane, czyli  $\rho_{x_1x_2} = 0$ , to z (10) i (12a, b) wynika, że wyjściowa macierz kowariancji  $U_{x_c}$  ma następującą postać rozwiniętą:

$$U_{x_c} = S U_x S^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 \sigma_{x_1}^2 + \alpha_2^2 \sigma_{x_2}^2 & \alpha_1 \beta_1 \sigma_{x_1}^2 + \alpha_2 \beta_2 \sigma_{x_2}^2 \\ \alpha_1 \beta_1 \sigma_{x_1}^2 + \alpha_2 \beta_2 \sigma_{x_2}^2 & \beta_1^2 \sigma_{x_1}^2 + \beta_2^2 \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Występujące w zależności (13) na głównej przekątnej kwadraty niepewności (variance) dla  $x_{c1}(\alpha)$  i  $x_{c2}(\beta)$  wynoszą

$$\sigma_{x_{c1}}^2 = \alpha_1^2 \sigma_{x_1}^2 + \alpha_2^2 \sigma_{x_2}^2 \quad \text{dla } x_{c1} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 \quad (14a)$$

$$\sigma_{x_{c2}}^2 = \beta_1^2 \sigma_{x_1}^2 + \beta_2^2 \sigma_{x_2}^2 \quad \text{dla } x_{c2} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 \quad (14b)$$

Zaś ich współczynnik korelacji

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \varepsilon^2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \varepsilon^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 \varepsilon^2}} \quad (15)$$

gdzie  $\varepsilon = \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}}$  – stosunek niepewności wielkości zmierzonych  $x_2$  i  $x_1$ .

Z równań (13) i (15) wynika, że wartości  $x_c$  i  $x_1$  też będą skorelowane. Ich współczynnik korelacji wynosi

$$\rho_{x_1x_c} = \frac{1-k}{\sqrt{(1-k)^2 + k^2 \varepsilon^2}} \quad (16)$$

Zależność (16) współczynnika korelacji  $\rho_{x_1x_c}$  jako funkcję parametru  $k$  dla kilku  $\varepsilon$  przedstawiono na rysunku 2.

Z wartości  $x_{c1}$  i  $x_{c2}$  można następnie wyznaczyć wielkości opisane inną funkcją wektorową  $G$ :

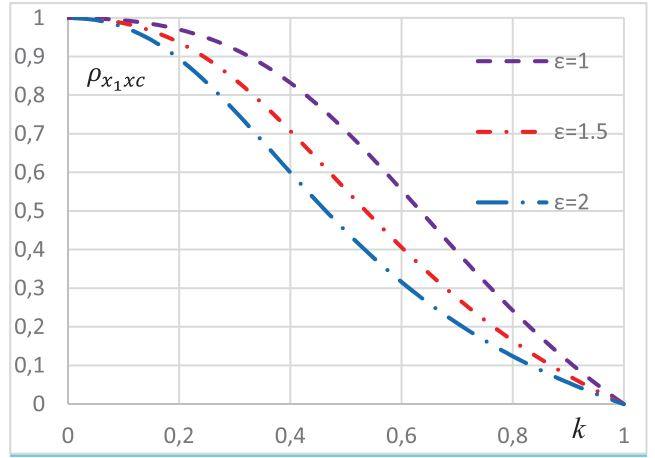
$$z = G(x_c) \quad (17)$$

Macierz kowariancji  $U_z$  wielkości  $z = [z_1, z_2]^T$  jest wówczas określona zgodnie z prawem propagacji wariancji dla układu wielowymiarowego (10) jako:

$$U_z = S_G U_{x_c} S_G^T \quad (18)$$

gdzie  $S_G = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_{c1}} & \frac{\partial z_1}{\partial x_{c2}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_{c1}} & \frac{\partial z_2}{\partial x_{c2}} \end{bmatrix}$ .

Z macierzy kowariancji  $U_z$  wyznacza się zarówno niepewności wielkości wyjściowych  $z$ , jak i ich współczynniki korelacji. Jeśli postać funkcji  $G$  jest prosta, np. liniowa, to wykonuje się najpierw operacje matematyczne na wartościach wejściowych  $x_{c1}$  i  $x_{c2}$ , a następnie stosuje się poprzednie formuły uzyskane dla elementów macierzy kowariancji, np. dla sumy/różnicy interpolowanych wielkości:



Rys. 2. Współczynnik korelacji  $\rho_{x_1x_c}$  w funkcji parametru  $k$  dla różnych parametrów  $\varepsilon = 1; 1.5; 2$

Fig. 2. Correlations coefficients  $\rho_{x_1x_c}$  as function of parameter  $k$  for different parameters  $\varepsilon = 1; 1.5; 2$

$$\Delta x_c = x_{c2} \pm x_{c1} \quad (19a)$$

$$\Delta x_c = (\beta_1 \pm \alpha_1) x_1 + (\beta_2 \pm \alpha_2) x_2 + \beta_3 \pm \alpha_3 \quad (19b)$$

Podobnie wyznacza się niepewność tej sumy/różnicy

$$\sigma_{\Delta x_c}^2 = (\beta_1 \pm \alpha_1)^2 \sigma_{x_1}^2 + (\beta_2 \pm \alpha_2)^2 \sigma_{x_2}^2 \quad (20)$$

Wzór (20) można też otrzymać bezpośrednio z niepewności (14a, b) i współczynnika korelacji (15). Należy zsumować kwadraty niepewności wielkości  $x_{c1}, x_{c2}$  i dodać/odjąć podwójny iloczyn ich współczynnika korelacji.

Wielkość  $x_c$ , której niepewność się estymuje, w przypadku liniowym jest związana z wielkościami  $x_1, x_2$  tak samo, jak w interpolacji metodą I, przez formułę (8). Współczynnik położenia  $k$  dla wielkości  $x_c$  wyznacza się rozwiązując równania (8), tj.:

$$k = \frac{x_c - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\gamma_{x_c} - \gamma_{x_1}}{\gamma_{x_2} - \gamma_{x_1}} \quad (21)$$

Zależność liniowa (8) występuje również dla  $k \leq 0$  i  $k \geq 1$ . Wielkość  $x_c$  jest wówczas ekstrapolowana. Stąd dla nieskorelowanych wielkości  $x_1, x_2$  z (15a, b) otrzymuje się

$$\sigma_{x_c}^2 = (1-k)^2 \sigma_{x_1}^2 + k^2 \sigma_{x_2}^2 \quad (22)$$

Po znormalizowaniu niepewności  $\sigma_{x_c}$  i  $\sigma_{x_2}$  do  $\sigma_{x_1}$ , czyli dla

$$\sigma_{nxc} = \frac{\sigma_{x_c}}{\sigma_{x_1}} \quad \text{i} \quad \varepsilon = \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}} \quad \text{oraz odniesieniu wartości zmierzonych}$$

$x_1, x_2$  i wartości estymowanej  $x_c$  do zakresu pomiarów  $x_{max} - x_0$ , dla  $x_0 = 0$  otrzymuje się

$$\sigma_{nxc} = \frac{\sigma_{x_c}}{\sigma_{x_1}} = \sqrt{(1-k)^2 + \varepsilon^2 k^2} \quad (23)$$

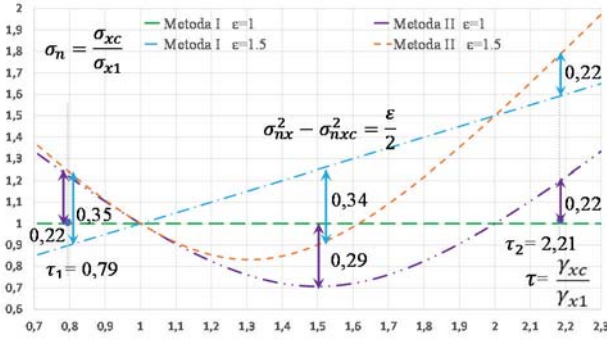
lub dla względnych wartości wartości względnych  $\gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}, \gamma_{x_c}$

$$\sigma_{nxc} = \frac{1}{\gamma_{x_2} - \gamma_{x_1}} \sqrt{(\gamma_{x_2} - \gamma_{x_c})^2 + \varepsilon^2 (\gamma_{x_c} - \gamma_{x_1})^2} \quad (24)$$

W metodzie II wyrażeniu (4a) odpowiada:

$$\sigma_{nxc} = \frac{1}{\gamma-1} \sqrt{\left(\gamma - \frac{\gamma_{xc}}{\gamma_{x1}}\right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\gamma_{xc}}{\gamma_{x1}} - 1\right)^2} \quad (25)$$

Przykłady przebiegów niepewności bezwzględnych dla obu metod przy dwu wartościach stosunku niepewności  $\varepsilon$  i  $\gamma = 2$  przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Porównanie metod I i II do interpolacji  $\tau = \frac{\gamma_{xc}}{\gamma_{x1}}$  niepewności

bezwzględnych dla  $x_c$  w funkcji parametru dla różnych wartości

stosunku niepewności  $\varepsilon = \frac{\sigma_{x2}}{\sigma_{x1}}$ ,  $\varepsilon = 1; 1,5$  i  $\gamma = 2$

Fig. 3. Comparison of two method of interpolation of absolute uncertainties of values  $x$  as function of parameter  $\tau = \frac{\gamma_{xc}}{\gamma_{x1}}$  for different values of the uncertainties' ratio  $\varepsilon = 1; 1,5$  and parameter  $\gamma = 2$

Ze zróżniczkowania funkcji (24) po  $\gamma_{xc}$  i powrocie do wartości  $x_c$  wynika, że osiąga ona minimum dla

$$x_c |_{\sigma_n = \min} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{1 + \varepsilon^2} \quad (26)$$

Z (26) wynika, że położenie minimum wewnątrz przedziału  $< x_1, x_2 >$  zależy tylko od jego szerokości  $x_2 - x_1$  i stosunku

niepewności  $\varepsilon \equiv \frac{\sigma_{x2}}{\sigma_{x1}}$  jego krańców. Położenie przedziału kontrolnego w badanym zakresie  $x_{\max} - x_0$ , np. zakresie pomiarowym przyrządu, nie ma wpływu. W wartościach względnych otrzymuje się

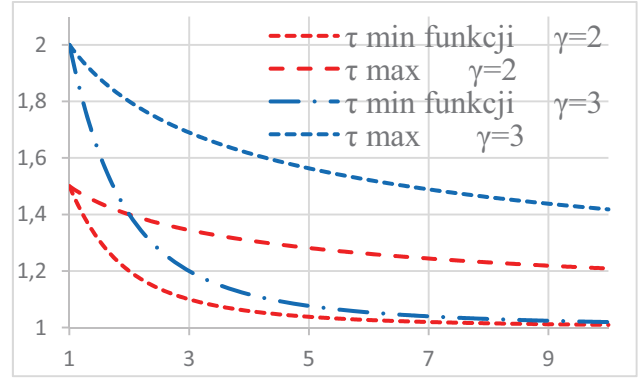
$$\gamma_{xc} |_{\sigma_n = \min} = \frac{\gamma_{x1} \varepsilon^2 + \gamma_{x2}}{1 + \varepsilon^2} = \gamma_{x1} + \frac{\gamma_{x2} - \gamma_{x1}}{1 + \varepsilon^2} \quad (27)$$

oraz spełniony jest warunek  $\gamma_{x1} < \gamma_{xc} |_{\sigma_n = \min} < \gamma_{x2}$ . Po normalizacji do  $\gamma_{x1}$

$$\tau_{\min} = \tau_{xc} |_{\sigma_n = \min} = \frac{\varepsilon^2 + \gamma}{1 + \varepsilon^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{1 + \varepsilon^2} \quad (28)$$

Położenie maksimum różnicy między niepewnościami interpolowanymi oboma metodami

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{\gamma_{xc} |_{\sigma_n = \min}}{\gamma_{x1}} + \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2(1 + \varepsilon^2)} (\gamma - 1)(\varepsilon - 1) = \\ &= 1 + \frac{\gamma - 1}{1 + \varepsilon^2} + \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2(1 + \varepsilon^2)} (\gamma - 1)(\varepsilon - 1) \end{aligned} \quad (29)$$



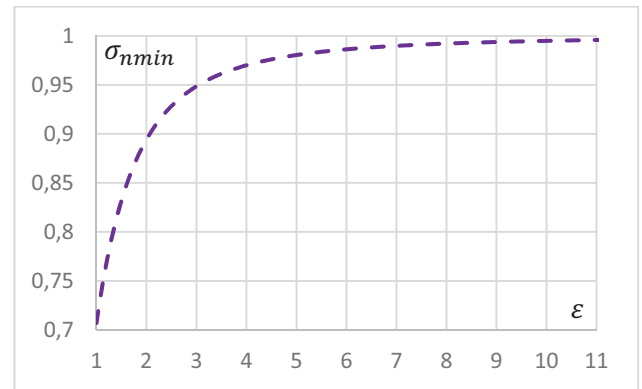
Rys. 4. Wykresy położenia minimum funkcji niepewności interpolowanej metodą II i położenia maksymalnej odległości między niepewnościami interpolowanymi metodami I i II

Fig. 4. Plots of the position of minimum of interpolation function in the method II and the position of the maximum distance between uncertainties estimated by methods I and II

Minimalna unormowana niepewność  $\sigma_{n,\min}$  zależy tylko od stosunku niepewności  $\varepsilon$  punktów kontrolnych:

$$\sigma_{n,\min} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad (30)$$

Na rysunku 5 podano wykres funkcji  $\sigma_{n,\min} = f(\varepsilon)$ . Wynika z niego, że interpolowana metodą II niepewność bezwzględna w przedziale  $x_1, x_2$  jest mniejsza od niepewności w punkcie początkowym  $x_1$  dla  $\varepsilon = 1$  o mniej niż 30%. Dla  $\varepsilon = 2$  zmniejszenie to nie przekracza 10%, a dla  $\varepsilon \approx 22,3$  estymowana niepewność jest mniejsza od  $\sigma_{x1}$  tylko o 0,1%. Dla pierwszego i innych przedziałów, gdy jedna z niepewności krańców, np. początkowa  $\sigma_{x1} \rightarrow 0$ , to minimum nie występuje. Będzie tak m.in. w mostkach i przyrządach z automatycznym lub ręcznym ustawianiem wartości  $x_1$  wg wzorca.



Rys. 5. Znormalizowana minimalna niepewność bezwzględna  $\sigma_{n,\min}$  w funkcji stosunku niepewności  $\varepsilon$  krańców przedziału

Fig. 5. Normalized minimum absolute uncertainty in the interpolation interval as a function of parameter  $\varepsilon$

Wzór (25) może też służyć do ekstrapolacji niepewności poza

interpolowanym przedziałem, tj. dla  $\frac{\gamma_{xc}}{\gamma_{x1}} < 1$  oraz  $\frac{\gamma_{xc}}{\gamma_{x1}} > \gamma$ . Róż-

nica kwadratów interpolowanej oboma metodami niepewności

w punkcie  $\tau = \frac{\gamma_{xc}}{\gamma_{x1}} = \frac{\gamma + 1}{2}$  wynosi

$$\left(\sigma_{nx}^2 - \sigma_{nxc}^2\right) |_{\max} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (31)$$



Zależność kwadratu niepewności dla metody II jest paraboliczna. Przy ekstrapolacji wg (25) jej wzrost o  $\varepsilon/2$  występuje w jednakowych odległościach od wierzchołka paraboli o współ-

$$\text{rzędnej } \tau = \frac{\gamma+1}{2}, \text{ tj. w punktach: } \tau_{1,2} = \frac{\gamma_{xc1,2}}{\gamma_{x1}} = \frac{\gamma+1}{2} \pm \sqrt{2} \frac{\gamma-1}{2}.$$

Przykładowo, dla  $\gamma = 2$  otrzyma się  $\tau_{1,2} = \frac{\gamma_{xc1,2}}{\gamma_{x1}} \approx 0,79$  oraz 2,21.

Niepewność estymowana metodą II jest w tych punktach większa od uzyskiwanej metodą I. Ich różnica kwadratów

$$\sigma_{nx}^2 - \sigma_{nxc}^2 = -\frac{\varepsilon}{2} \text{ ma znak przeciwny niż w } \text{środku przedziału.}$$

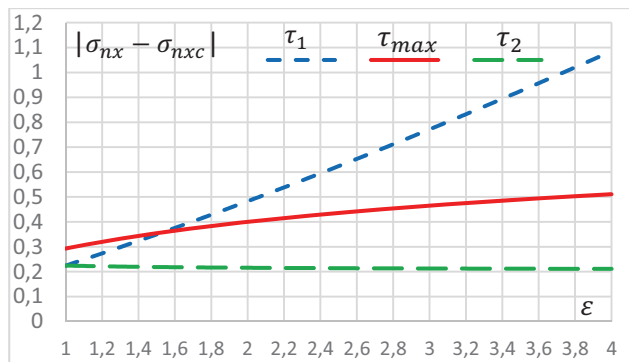
Maksymalna różnica między niepewnościami estymowanymi obiema metodami wewnątrz przedziału występuje w pobliżu punktu  $\gamma_{xc} |_{\sigma_{n, \min}}$ , tj. dla punktu o

$$\tau_{\max} = \frac{\gamma_{xc} |_{\sigma_{n, \min}}}{\gamma_{x1}} + \frac{\sqrt{2\varepsilon}(\gamma-1)}{2(1+\varepsilon^2)}(\varepsilon-1) \text{ i wynosi}$$

$$(\sigma_{nx} - \sigma_{nxc})_{\max} = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon-\sqrt{2\varepsilon})}{1+\varepsilon^2} \quad (32)$$

Dla  $\varepsilon = 2$  maksymalna różnica znormalizowanych niepewności wynosi 0,4.

Na rysunku 6 zestawiono zależność modułu różnicy niepewności dla obu metod w funkcji parametru dla trzech wybranych punktów.



Rys. 6. Wartość bezwzględna różnicy znormalizowanych niepewności między obiema metodami w przedziale interpolacji i poza nim

w punktach  $\tau_{1,2} = \frac{\gamma+1}{2} \pm \sqrt{2} \frac{\gamma-1}{2}$  i dla wartości maksymalnej

$$\tau_{\max} = \gamma_{xc} |_{\sigma_{n, \min}} + \frac{\sqrt{2\varepsilon}(\gamma-1)}{2(1+\varepsilon^2)}(\varepsilon-1) \text{ w funkcji } \varepsilon \equiv \frac{\sigma_{x2}}{\sigma_{x1}} \text{ czyli stosunku}$$

niepewności krańców przedziału

Fig. 6. Modul of absolute difference between two methods inside and

outside of interpolation interval in points  $\tau_{1,2} = \frac{\gamma+1}{2} \pm \sqrt{2} \frac{\gamma-1}{2}$  and for

maximum value  $\tau_{\max} = \gamma_{xc} |_{\sigma_{n, \min}} + \frac{\sqrt{2\varepsilon}(\gamma-1)}{2(1+\varepsilon^2)}(\varepsilon-1)$  as function of ratio

$$\varepsilon \equiv \frac{\sigma_{x2}}{\sigma_{x1}}$$

Kilka przykładów różnicy niepewności i różnicy kwadratów niepewności z rys. 6, przybliżonych do dwóch cyfr po przecinku, zamieszczono w tabeli 1.

Z tabeli 1 wynika, że różnice bezwzględnych niepewności, wyznaczone metodami I i II w jednostkach znormalizowanych nie przekraczają 0,4 dla  $\varepsilon \leq 2$ . Natomiast na rysunku 6 widać, że dla  $\varepsilon \leq 3$  różnica ta nie przekracza 0,5. Odległość punktu  $\tau_2$  od linii prostej w metodzie I jest mniejsza niż odległość maksymalna w przedziale interpolacyjnym. W punkcie  $\tau_1$  przekracza się wartość maksymalną w przedziale interpolacyjnym dla  $\varepsilon = 2$

Tabela 1. Różnice znormalizowanych niepewności obu metod w wybranych punktach

Table 1. Differences of normalized uncertainty of both the method in chosen points

$\varepsilon$	$\sigma_{nxc} - \sigma_{nx}$ $\tau = 0,79$	$\sigma_{nxc} - \sigma_{nx}$ $\tau = 2,21$	$\sigma_{nxc} - \sigma_{nx}$		$\sigma_{nxc}^2 - \sigma_{nx}^2$ $\tau = 0,79$ $\tau = 2,21$
			$\tau_{\max}$	$\tau_{\min}$	
1	≈ 0,22	≈ 0,22	≈ 0,29	≈ 0,29	0,5
1,5	≈ 0,35	≈ 0,22	≈ 0,35	≈ 0,35	0,75
2	≈ 0,48	≈ 0,22	≈ 0,40	≈ 0,38	1

i odległość między krzywymi ekstrapolacyjnymi jest większa o 0,08 od wartości maksymalnej.

### 3.2. Estymacja niepewności względnej metodą II

Z zależności  $\sigma_{xc} = \delta_{xc} x_{xc}$  otrzymuje się dla niepewności względnej w punkcie  $x_c$  równanie

$$\delta_{xc} = \frac{\sigma_{xc}}{x_c} = \frac{1}{x_c} \sqrt{\left(\frac{\gamma_{x2} - \gamma_{xc}}{\gamma_{x2} - \gamma_{x1}}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\gamma_{xc} - \gamma_{x1}}{\gamma_{x2} - \gamma_{x1}}\right)^2 \sigma_{x2}^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\gamma_{x2} - 1}{\gamma_{x1}}\right)^2 \delta_{x1}^2 + \left(\frac{1 - \gamma_{x1}}{\gamma_{x2}}\right)^2 \delta_{x2}^2} \quad (33)$$

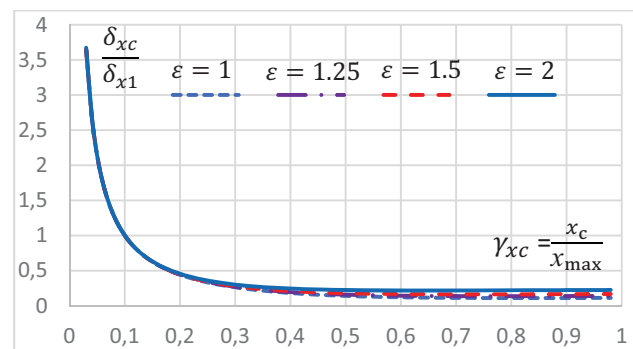
A po normalizacji do niepewności  $\delta_{x1}$  otrzymuje się:

$$\frac{\delta_{xc}}{\delta_{x1}} = \frac{\gamma_{x1}}{\gamma_{x2} - \gamma_{x1}} \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma_{x2}}{\gamma_{xc}}\right)^2 + \left(1 - \frac{\gamma_{x1}}{\gamma_{xc}}\right)^2} \varepsilon^2 \quad (34)$$

Zależność (34) jest zbliżona do hiperbolicznej i w całym zakresie  $\gamma_{xc}$  jest ona malejąca.

Na rysunku 7 zestawiono zależności niepewności względnych w funkcji  $\gamma_{xc}$  dla parametrów  $\gamma_{x1}$ ,  $\gamma_{x2}$  i stosunku nie-

pełności punktów kontrolnych  $\varepsilon = \frac{\sigma_{x2}}{\sigma_{x1}} = \frac{x_2 \delta_{x2}}{x_1 \delta_{x1}} = \frac{\gamma_{x2} \delta_{x2}}{\gamma_{x1} \delta_{x1}}$ .



Rys. 7. Niepewność względna wielkości wyjściowych  $\frac{\delta_{xc}}{\delta_{x1}}$  w funkcji

znormalizowanego prądu  $\gamma_{xc} = \frac{x_c}{x_{\max}}$  dla parametrów  $\gamma_{x1} = 0,1$ ;

$\gamma_{x2} = 0,9$ ;  $\varepsilon = 1; 1,25; 1,5; 2$

Fig. 7. Relative uncertainty of output uncertainties  $\frac{\delta_{xc}}{\delta_{x1}}$  as function of

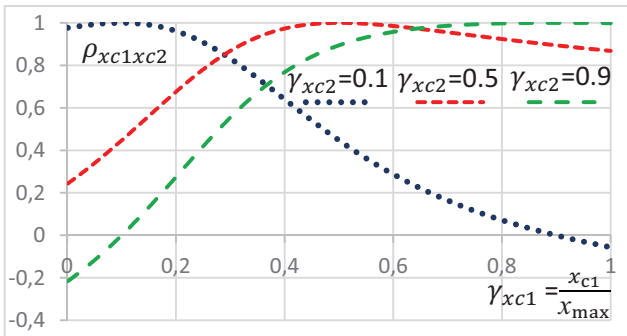
normalized current  $\gamma_{xc} = \frac{x_c}{x_{\max}}$  for parameters  $\gamma_{x1} = 0,1$ ;  $\gamma_{x2} = 0,9$ ;  $\varepsilon = 1; 1,25; 1,5; 2$

Podobne wykresy  $\frac{\delta_{xc}}{\delta_{x1}}$  otrzyma się też dla innych wartości parametrów  $\varepsilon$  i  $\gamma_{x1}, \gamma_{x2}$ .

Z zależności (15) otrzymuje się współczynnik korelacji między dwoma dowolnymi estymowanymi znormalizowanymi wartościami  $\gamma_{xc1}$  i  $\gamma_{xc2}$  z danego zakresu pomiarowego

$$\rho_{xc1xc2} = \frac{\left(\gamma - \frac{\gamma_{xc1}}{\gamma_{x1}}\right)\left(\gamma - \frac{\gamma_{xc2}}{\gamma_{x1}}\right) + \left(\frac{\gamma_{xc2}}{\gamma_{x1}} - 1\right)\left(\frac{\gamma_{xc1}}{\gamma_{x1}} - 1\right)\varepsilon^2}{\sqrt{\left(\gamma - \frac{\gamma_{xc1}}{\gamma_{x1}}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xc1}}{\gamma_{x1}} - 1\right)^2\varepsilon^2} \cdot \sqrt{\left(\gamma - \frac{\gamma_{xc2}}{\gamma_{x1}}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xc2}}{\gamma_{x1}} - 1\right)^2\varepsilon^2}} \quad (35)$$

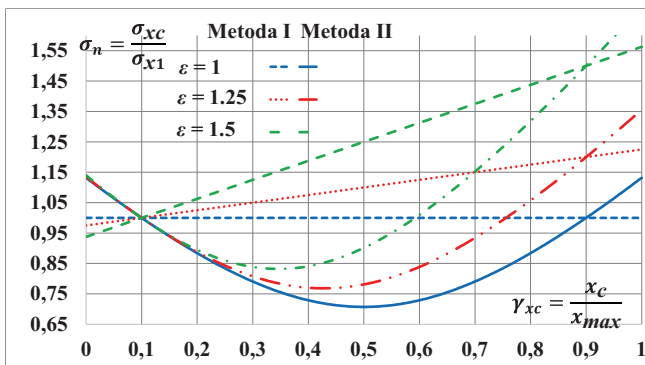
Jest on identyczny dla względnych i bezwzględnych niepewności. Jego przykładowe przebiegi dla trzech wartości  $\gamma_{xc}$  podano na rysunku 8.



Rys. 8. Współczynnik korelacji  $\rho_{xc1xc2}$  estymowanych wartości  $x_{c1}, x_{c2}$  w funkcji znormalizowanej wartości  $x_{c1}$  ( $\gamma_{xc1} = x_{c1}/x_{max}$ ) dla  $\gamma_{x1} = 0,1$ ;  $\gamma_{x2} = 0,9$ ;  $\varepsilon = 2$ ;  $\gamma_{xc2} = 0,1; 0,5; 0,9$   
 Fig. 8. Correlations coefficient of output values  $x_{c1}, x_{c2}$  as function of normalized quantities  $x_{c1}$  ( $\gamma_{xc1} = x_{c1}/x_{max}$ ) for  $\gamma_{x1} = 0.1$ ;  $\gamma_{x2} = 0.9$ ;  $\varepsilon = 2$ ;  $\gamma_{xc2} = 0.1; 0.5; 0.9$

#### 4. Porównanie interpolacji metodami I i II

Do analizy wybrano pomiary w dwóch punktach kontrolnych  $\gamma_{x1} = 0,1$ ;  $\gamma_{x2} = 0,9$ . Na podstawie ich niepewności wyznaczono wartości niepewności w całym zakresie pomiarowym metodą I dla liniowego przebiegu błędu granicznego – wzór (4) i metodą II dla propagacji wariancji – wzór (25). Charakterystyki obu estymowanych niepewności podano na rysunku 9.



Rys. 9. Estymacja niepewności dla metody I i II  $\gamma_{x1} = 0,1$ ;  $\gamma_{x2} = 0,9$  dla różnych stosunków niepewności wyznaczonych w dwu punktach pomiarowych  $\varepsilon = \sigma_{x2}/\sigma_{x1} = 1; 1,25; 1,5$   
 Fig. 9. Estimation of uncertainties by two methods for  $\gamma_{x1} = 0.1$ ;  $\gamma_{x2} = 0.9$  and few ratios of uncertainties in measurements points:  $\varepsilon = \sigma_{x2}/\sigma_{x1} = 1; 1.25; 1.5$

Niepewności względne wg obu metod znormalizowano jako stosunki z niepewnością względną w pierwszym punkcie pomiarowym, tj. do  $\delta_{x1}$ . Zatem

$$\frac{\sigma_{xc}}{\delta_{x1}} = \frac{x_{xc}\delta_{xc}}{x_1\delta_{x1}} = \frac{\gamma_{xc}\delta_{xc}}{\gamma_{x1}\delta_{x1}} \quad (36)$$

Znormalizowane niepewności względne wynoszą

$$\frac{\delta_{xc}}{\delta_{x1}} = \frac{\gamma_{x1}\sigma_{xc}}{\gamma_{xc}\sigma_{x1}} \quad (37)$$

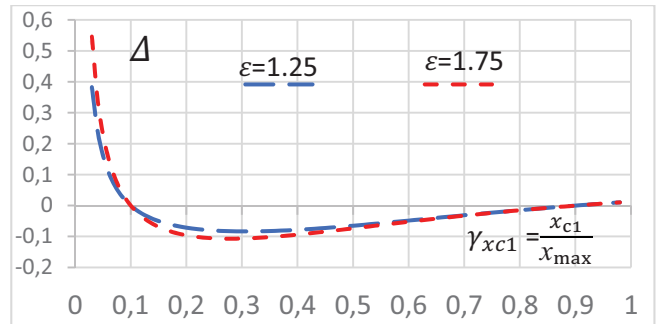
Dla metody I otrzymuje się

$$\left.\frac{\delta_{xc}}{\delta_{x1}}\right|_I = \frac{\gamma_{x1}\gamma - \varepsilon}{\gamma_{xc}\gamma - 1} + \frac{\varepsilon - 1}{\gamma - 1} \quad (38)$$

oraz dla metody II:

$$\left.\frac{\delta_{xc}}{\delta_{x1}}\right|_{II} = \frac{1}{\gamma - 1} \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma_{x2}}{\gamma_{xc}}\right)^2 + \left(1 - \frac{\gamma_{x1}}{\gamma_{xc}}\right)^2} \varepsilon^2 \quad (39)$$

Dla porównania obu metod, różnicę znormalizowanych niepewności względnych oznaczono jako  $\Delta = \left.\frac{\delta_{xc}}{\delta_{x1}}\right|_{II} - \left.\frac{\delta_{xc}}{\delta_{x1}}\right|_I$ . Jej przebieg podano na rysunku 10.



Rys. 10. Porównanie niepewności względnych estymowanych metodami I i II: dla wielkości kontrolnych o  $\gamma_{x1} = 0,1$ ;  $\gamma_{x2} = 0,9$  i różnych stosunków ich niepewności  $\varepsilon = \sigma_{x2}/\sigma_{x1} = 1,25; 1,5$   
 Fig. 10. Comparison of relative uncertainties estimated by methods I and II for  $\gamma_{x1} = 0.1$  and  $\gamma_{x2} = 0.9$  of control quantities and few ratios of their uncertainties:  $\varepsilon = \sigma_{x2}/\sigma_{x1} = 1.25; 1.5$

W tabeli 2 zamieszczono znormalizowane niepewności bezwzględne wyznaczone dla obu metod w punktach, w których przy stosowaniu metody II występuje wartość minimalna estymowanej niepewności

Niepewność bezwzględna estymowana metodą I zmienia się liniowo w funkcji wielkości mierzonej  $x$  w całym zakresie, zaś względna zależy od  $x$  hiperbolicznie. Natomiast niepewność bezwzględna wg metody II ma przebieg o charakterze parabolicznym, a względna – o hiperbolicznym. Pełna zgodność wyników obu wariantów występuje tylko w punktach pomiarowych. Poza krańcami ich przedziału, niepewność estymowana metodą II szybko wzrasta. Metodą tą uzyskuje się mniejsze wartości niepewności wewnątrz przedziału.

Maksymalne różnice niepewności względnych dla wybranych, dosyć odległych punktów kontrolnych, poniżej  $\gamma_{xc1} < 0,1$  nie przekraczają 0,4 dla stosunku niepewności końców przedziału  $\varepsilon = 1,2$ , zaś niepewności względne wg metody II są większe.

**Tabela 2. Znormalizowanych niepewności bezwzględnych dla obu metod w punktach dla minimum niepewności estymowanej metoda II**  
 Table 2. Normalized absolute uncertainties for both method in points of minimum of uncertainties estimated by method II

$x_c/x_{max}$	$\sigma_{xc}/\sigma_{x1}$ dla $\varepsilon = 1$		$\sigma_{xc}/\sigma_{x1}$ dla $\varepsilon = 1,25$		$\sigma_{xc}/\sigma_{x1}$ dla $\varepsilon = 1,5$	
	Metoda I	Metoda II	Metoda I	Metoda II	Metoda I	Metoda II
0,10	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,35	1,00	0,76	1,08	0,79	1,15	0,83
0,41	1,00	0,72	1,10	0,78	1,20	0,85
0,50	1,00	0,71	1,13	0,80	1,25	0,90
0,90	1,00	1,00	1,25	1,25	1,50	1,50

W środku przedziału dla  $\gamma_{xcl} > 0,1$  i dla  $\varepsilon = 1,25; 1,75$  estymowane metodą II niepewności względne są poniżej 10% mniejsze od wyznaczonych metodą I.

Jeśli w oparciu o wiedzę o badanym menzurandzie można przyjąć liniowy przebieg niepewności, to należy stosować metodę I, która jest prostsza. Jeśli brak jest informacji o zależności niepewności od wielkości mierzonej, to należy stosować metodę II. Liczbę i rozmieszczenie punktów kontrolnych ogranicza dopuszczalny wzrost niepewności za krańcami odcinka kontrolowanego, np. o 10%.

Ponadto metoda II dostarcza też informacji o współczynniku korelacji między niepewnościami w różnych punktach. Ma to istotne znaczenie dla poprawnego wyznaczeniu niepewności dla funkcji kilku wartości wielkości mierzonej. Interpolacje niepewności względnych wyznacza się z niepewności bezwzględnych. Estymacja niepewności wyników prostych działań matematycznych dla dwu wartości charakterystyki badanej jest omówiona na końcu pracy.

### 4.1. Interpolacja niepewności funkcji przy pomiarach w n punktach kontrolnych

Interpolacja liniowa metodą I oparta jest w całym zakresie badanym tylko na dwóch punktach pomiarowych. Interpolacja niepewności wielkości mierzonej w żądanym zakresie z n punktów pomiarowych dotyczy metody II. W tym przypadku rozpięcie funkcji niepewności opisanej wzorem (25) na dwóch sąsiednich punktach daje zmniejszenie jej wartości do poziomu opisanego w (28). Ilustruje to rys. 11.

Po oznaczeniu n kolejnych analizowanych wartości mierzonej wielkości  $x_i$  i znormalizowanych do wartości maksymalnej jako  $\gamma_{x0}, \dots, \gamma_{xj}, \dots, \gamma_{xn-1}$  dla  $i = 0, 1, \dots, n-1$  oraz ich wyznaczo-

nych z pomiarów niepewności bezwzględnych jako  $\sigma_{xi}$ , wyznacza się współczynniki:

$$\varepsilon_{i+1} = \frac{\sigma_{xi+1}}{\sigma_{xi}} \tag{40}$$

przy założeniu, że  $\sigma_{x0} \neq 0$ .

Niepewności znormalizowane interpoluje się w przedziałach wielkości x, na które podzielono zakres pomiarowy. Są one określone następująco:

$$\sigma_{nj,j+1} = \frac{\sigma_{xj,j+1}}{\sigma_{x0}} = \prod_{i=1}^j \varepsilon_i \sqrt{\left(\frac{\gamma_{xj+1} - \gamma_{xc}}{\gamma_{xj+1} - \gamma_{xj}}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xc} - \gamma_{xj}}{\gamma_{xj+1} - \gamma_{xj}}\right)^2} \varepsilon_{j+1}^2 \tag{41}$$

gdzie:  $\gamma_{xj} < \gamma_{xc} < \gamma_{xj+1}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

W każdym z przedziałów interpolowane niepewności są nie mniejsze niż

$$\sigma_{xj,j+1} = \sigma_{nj,j+1} \sigma_{x0} \geq \frac{\varepsilon_{j+1} \sigma_{xj}}{\sqrt{1 + \varepsilon_{j+1}^2}} \tag{42}$$

Z (30) wynika, że maksymalne odchylenie od interpolacji liniowej w każdym z przedziałów, wyrażone w niepewności drugiego punktu, wynosi

$$\Delta \sigma_{xj,j+1} = \mu_{j+1} \sigma_{xj+1} \tag{43}$$

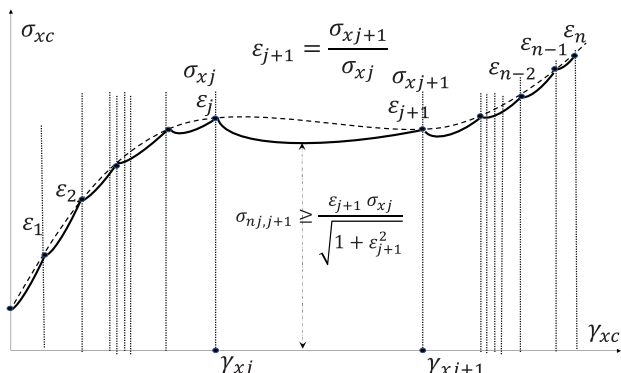
gdzie:

$$\mu_{j+1} = \frac{1 + \varepsilon_{j+1} - \sqrt{2\varepsilon_{j+1}}}{1 + \varepsilon_{j+1}^2} \tag{43a}$$

Dla malejącego przebiegu zależności  $\mu_{j+1}$  od  $\varepsilon_{j+1}$  – wzór (41), na rysunku 12 podano maksymalną różnicę wartości interpolowanych metodą II i liniową metodą I, obliczoną wg (41) w każdym z przedziałów oraz maksymalną wartość w tym zbiorze

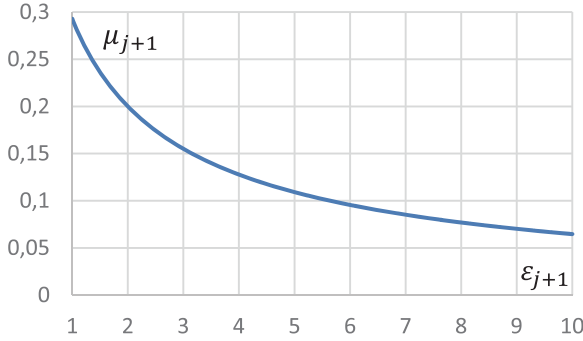
$$\Delta \sigma_{max} = \max_{0 \leq j \leq n-1} \Delta \sigma_{xj,j+1} \tag{44}$$

Początkowo wydawało się, że dla minimalizacji  $\mu_{j+1}$  wystarczy zwiększenie parametru  $\varepsilon_{j+1}$ , aby otrzymać minimalne odchylenie względne dla obu metod, jednak wówczas rośnie też wartość niepewności  $\sigma_{xj+1}$ . Przy stosowaniu metody II może to spowodować wzrost bezwzględnego odchylenia w porównaniu do interpolacji



**Rys. 11. Interpolacja metodą II dla n punktów pomiarowych**  
 Fig. 11. The interpolation of II method on n measurements points





Rys. 12. Zależność  $\mu_{j+1}$  funkcji parametru  $\varepsilon_{j+1}$   
Fig. 12. Dependence  $\mu_{j+1}$  as function of parameter  $\varepsilon_{j+1}$

liniowej. Zatem w każdym z przedziałów jest optymalna wartość parametru  $\varepsilon_{j+1}$ , która minimalizuje różnicę (43).

W praktyce, gdy punktem kontrolnym pierwszego przedziału jest wartość początkowa  $x_0 = 0$ , to wartość niepewności  $\sigma_{x0}$  może być bliska zeru. Może się to nawet zdarzyć i dla punktów początkowych innych przedziałów. Należy wówczas interpolację odcinka początkowego przenieść na sąsiednie dwa punkty, w których niepewność początkowa jest różna od zera i do niej normalizować niepewność wyrażoną zależnością (36). Dla odcinka początkowego, którego  $\sigma_{x0} = 0$  oraz, gdy  $x_0 = 0$ , niepewność można interpolować liniowo w całym przedziale względem sąsiedniego punktu  $\sigma_1$  wg formuły:

$$\sigma_{xp} = \frac{x_e \sigma_1}{x_1 - x_0} \quad (45)$$

## 4.2. Minimalizacja liczby punktów kontrolnych

W tym i następujących rozdziałach wprowadza się oznaczenie zmiennej normalizującej  $\gamma_{xc}$  do  $\gamma_{x1}$ , tj.  $\lambda = \gamma_{xc}/\gamma_{x1}$ , aby odróżnić ją od  $\gamma = x_2/x_1 = \gamma_{x2}/\gamma_{x1} = \lambda_2$ .

### Metoda I

Równanie liniowej interpolacji między punktami  $\lambda_1, \lambda_3$  prowadzi do uzyskania w punkcie  $\lambda_2$  wartości znormalizowanej interpolacji niepewności:

$$\frac{\sigma_{xc=xc2}}{\sigma_{x1}} = \lambda_2 \frac{\varepsilon_3 - 1}{\lambda_3 - 1} + \frac{\lambda_3 - \varepsilon_3}{\lambda_3 - 1} \quad (46)$$

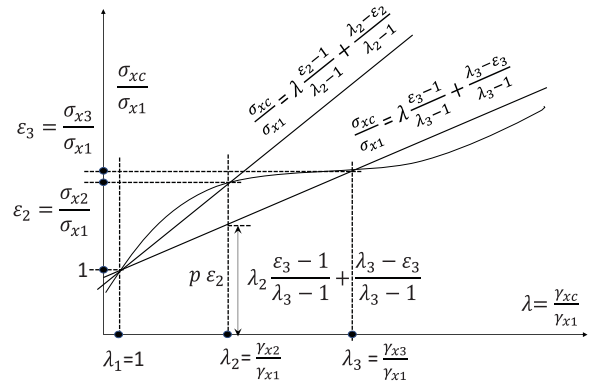
Stąd parametr dopasowania  $0 \leq p \leq 1$ :

$$p \leq \frac{\sigma_{xc=xc2}}{\sigma_{x2}} = \frac{\lambda_2 \varepsilon_3 - 1}{\varepsilon_2 \lambda_3 - 1} + \frac{\lambda_3 - \varepsilon_3}{\lambda_3 - 1} \quad (47)$$

W interpolacji charakterystyki niepewności (rys. 13) przy  $\lambda_2 > \varepsilon_2$ ; można zastąpić dwie krzywe rozpięte między punktami  $\lambda_1, \lambda_2$  i  $\lambda_2, \lambda_3$  jedną krzywą między punktami  $\lambda_1, \lambda_3$  z pominięciem punktu pośredniego  $\gamma_2$

$$\varepsilon_3 \geq \frac{\varepsilon_2 \left[ p(\lambda_3 - 1) - \lambda_3 \right] + \lambda_2}{\lambda_2 - \varepsilon_2} \quad (48)$$

Na przykład dla  $\varepsilon_2 = 1,5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ , otrzymuje się dla  $p = 0,9, \varepsilon_3 \geq 0,4$ . A zatem punkt  $\lambda_2$  można pominąć, a interpolację między punktami  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  zastąpić interpolacją między



Rys. 13. Ilustracja minimalizacji punktów pomiarowych dla metody pierwszej  
Fig. 13. Illustration of minimalization measurements points for first method

$\lambda_1$  i  $\lambda_3$  przy odchyleniu od punktu  $\lambda_2$  o  $(1-p) \sigma_{x2} = 10\sigma_{x2}\%$  już dla  $\varepsilon_3 = 0,4$ .

### Metoda II

W tej metodzie, krzywa interpolacyjna (39) łącząca skrajne punkty pomiarowe  $\gamma_{x1}$  i  $\gamma_{x3}$ , w punkcie  $\gamma_{x2}$  osiąga następującą niepewność znormalizowaną

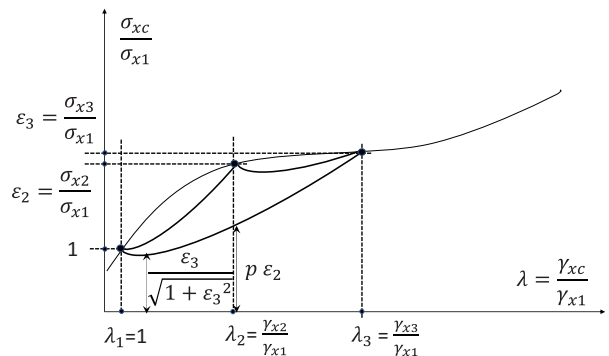
$$\frac{\sigma_{xc=xc2}}{\sigma_{x1}} = \sqrt{\left( \frac{\gamma_{x3} - \gamma_{x2}}{\gamma_{x3} - \gamma_{x1}} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_{x2} - \gamma_{x1}}{\gamma_{x3} - \gamma_{x1}} \right)^2} \varepsilon_3^2 \quad (49)$$

Parametr dopasowania  $0 \leq p \leq 1$  umożliwiający zastąpienie rozpięcia dwóch krzywych niepewności (rys. 14) na trzech punktach pomiarowych  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , jedną krzywą rozpiętą na skrajnych punktach  $\lambda_1$  i  $\lambda_3$  z pominięciem punktu  $\lambda_2$  z odpowiednią dokładnością, spełnia nierówność:

$$p \leq \frac{\sigma_{xc=xc2}}{\sigma_{x2}} = \frac{1}{\varepsilon_2} \sqrt{\left( \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 - 1} \right)^2 + \left( \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_3 - 1} \right)^2} \varepsilon_3^2 \quad (50)$$

Po wyznaczeniu parametru  $\varepsilon_3$  z nierówności (50) wynika:

$$\varepsilon_3 \geq \frac{1}{\lambda_2 - 1} \sqrt{\left( p \varepsilon_2 (\lambda_3 - 1) \right)^2 + (\lambda_3 - \lambda_2)^2} \quad (51)$$



Rys. 14. Ilustracja minimalizacji liczby punktów pomiarowych przy interpolacji niepewności Metodą II  
Fig. 14. Illustration of minimalization measurements points – second method

### 4.3. Estymacja niepewności dla kilku prostych operacji matematycznych

Niepewności wyznaczone metodami I i II można też zastosować do oszacowania dokładności matematycznych operacji wykonywanych na wartościach charakterystyki badanej. Przedstawimy to dla prostych działań, np. sumy lub różnicy wartości  $x_{c1} \pm x_{c2}$  oraz ich iloczynu i ilorazu.

#### Metoda I

Przy stosowaniu metody I brakuje informacji o korelacji między estymowanymi wartościami niepewności. Jeśli wartości w punktach kontrolnych badanej charakterystyki były mierzone niezależnie, różnymi przyrządami i w różnych warunkach, lub jeśli z rozrzutu danych pomiarowych wynika, że dominuje niepewność typu A, to należy przyjąć, że pośrednio estymowane niepewności wartości tej charakterystyki nie są ze sobą skorelowane. Wówczas można założyć, że z prawa propagacji wariancji wynika geometryczne sumowanie niepewności bezwzględnych dla sumy jak i różnicy  $x_{c1}$  i  $x_{c2}$ , tj.:

$$\sigma_{(x_{c1} \pm x_{c2})}^2 = \sigma_{\Delta x_c}^2 = \sigma_{x_{c1}}^2 + \sigma_{x_{c2}}^2 \quad (52)$$

Po skorzystaniu z równania (6), otrzymuje się niepewność względną estymowanej sumy/różnicy

$$\delta_{(x_{c1} \pm x_{c2})} = \frac{\sigma_{\Delta x_c}}{x_{c1} \pm x_{c2}} = \frac{\sqrt{\left[ \left( 1 - \frac{\gamma_{x1}}{\gamma_{xc1}} \right) \delta_{(x_2-x_1)} + \frac{\sigma_{x1}}{\gamma_{xc1} x_{max}} \right]^2 + \left[ \left( \frac{\gamma_{xc2} - \gamma_{x1}}{\gamma_{xc1}} \right) \delta_{(x_2-x_1)} + \frac{\sigma_{x1}}{\gamma_{xc1} x_{max}} \right]^2}}{\frac{\gamma_{xc2}}{\gamma_{xc1}} \pm 1} \quad (53)$$

Przy małej wartości  $\frac{\sigma_{x1}}{\gamma_{xc1} x_{max}}$  w porównaniu z pozostałą częścią wyrażenia umieszczoną pod pierwiastkiem

$$\delta_{\Delta x_c} \cong \frac{\delta_{(x_2-x_1)}}{\gamma_{xc2} \pm \gamma_{xc1}} \sqrt{(\gamma_{xc1} - \gamma_{x1})^2 + (\gamma_{xc2} - \gamma_{x1})^2} \quad (54)$$

Po normalizacji  $\lambda_1 = \frac{\gamma_{xc1}}{\gamma_{x1}}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\gamma_{xc2}}{\gamma_{x1}}$  otrzymuje się

$$\frac{\delta_{\Delta x_c}}{\delta_{(x_2-x_1)}} \cong \frac{\sqrt{(\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2}}{\lambda_2 \pm \lambda_1} \quad (55)$$

Zależność (55), tj. niepewność względnej sumy/różnicy interpolowanych wielkości dla metody I ( $\lambda_2 = 3$ ) o charakterystyce rosnącej ze wzrostem wielkości mierzonej w funkcji  $\lambda_1$  przedstawiono na rysunku 15.

W sytuacji przeciwnej, gdy istotnie dominuje niepewność typu B, tj. rozrzut danych pomiarowych jest pomijalny oraz pomiary są wykonywane w jednakowych warunkach i tą samą aparaturą, to z ostrożności można założyć, że występuje niemal całkowita korelacja. Ze wzorów (11), (15) wynika, że gdy współczynnik korelacji  $\rho_{xc1,2} \rightarrow 1$ , to w granicy dla sumy  $x_{c1} + x_{c2}$  i różnicy  $\Delta x_c$  otrzymana się:

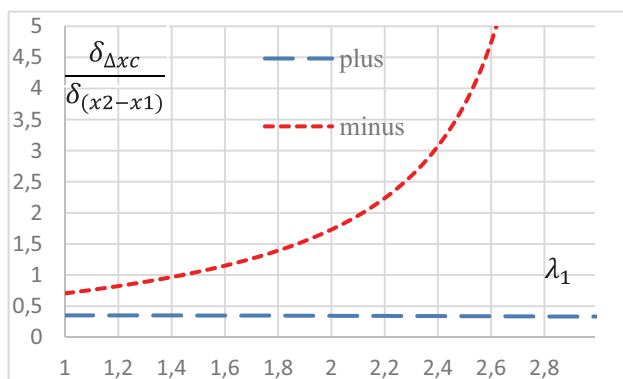
$$\sigma_{(x_{c1} + x_{c2})} = \sqrt{\sigma_{x_{c1}}^2 + 2\sigma_{x_{c1}}\sigma_{x_{c2}} + \sigma_{x_{c2}}^2} = \sigma_{x_{c1}} + \sigma_{x_{c2}} \quad (56a)$$

$$\sigma_{(x_{c1} - x_{c2})} = |\sigma_{x_{c1}} - \sigma_{x_{c2}}| \quad (56b)$$

Oznacza to, że przybliżona formuła (55) ulega modyfikacji do postaci

$$\frac{\delta_{\Delta x_c}}{\delta_{(x_2-x_1)}} \cong \frac{\sqrt{(\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2} \pm (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)}{\lambda_2 \pm \lambda_1} \quad (56c)$$

Ilustruje to rysunek 15.



Rys. 15. Charakterystyka znormalizowanej niepewności względnej sumy/różnicy między estymowanymi wielkościami

Fig. 15. Relative uncertainty normalized characteristic of sum/differences between estimated quantities

Podobne zależności zachodzą też dla niepewności względnych iloczynu i ilorazu, tj.:

$$\delta_{(x_{c1} \cdot x_{c2})} = \delta_{x_{c1}} + \delta_{x_{c2}} \quad (57a)$$

$$\delta_{(x_{c1}/x_{c2})} = |\delta_{x_{c1}} - \delta_{x_{c2}}| \quad (57b)$$

#### Metoda II

Po normalizacji do  $\sigma_{x1}$ , wariancja sumy/różnicy dwóch wielkości dana równaniem (20) wynosi

$$\frac{\sigma_{\Delta x_c}^2}{\sigma_{x1}^2} = \left( \frac{\gamma_{xc1} \pm \gamma_{xc2}}{\gamma - 1} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_{xc2} \pm \gamma_{xc1}}{\gamma - 1} \right)^2 \varepsilon^2 \quad (58)$$

gdzie:

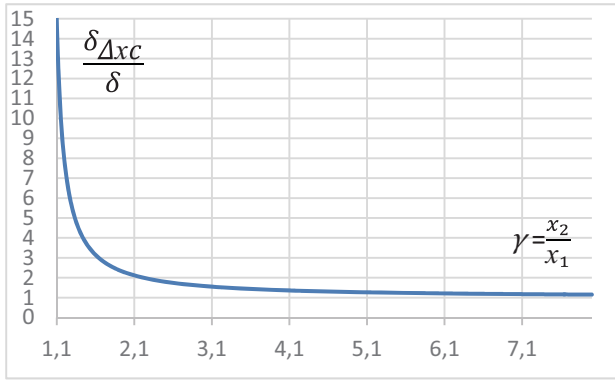
$$\alpha_2 = \frac{\gamma_{xc1} - 1}{\gamma - 1}, \alpha_1 = 1 - \alpha_2, \beta_2 = \frac{\gamma_{xc2} - 1}{\gamma - 1}, \beta_1 = 1 - \beta_2, \varepsilon = \sigma_{x2}/\sigma_{x1}$$

Znormalizowana niepewność sumy/różnicy niepewności bezwzględnych w badanych punktach wynosi

$$\frac{\sigma_{\Delta x_c}}{\sigma_{x1}} = \frac{|\gamma_{xc2} \pm \gamma_{xc1}|}{\gamma - 1} \sqrt{1 + \varepsilon^2} \quad (59)$$

Wykorzystując (19) i (20) otrzymuje się niepewność względną  $\delta_{\Delta x_c}$  sumy lub różnicy estymowanych wartości jako:

$$\delta_{\Delta x_c} = \frac{\sigma_{\Delta x_c}}{\Delta x_c} = \frac{1}{\gamma - 1} \sqrt{\delta_{x1}^2 + \delta_{x2}^2 \gamma^2} \quad (60)$$



Rys. 16. Zależność znormalizowanej niepewności względnej sumy/różnicy estymowanych wielkości w funkcji ilorazu wielkości kontrolnych

Fig. 16. Dependence of normalized relative uncertainty of sum/difference of estimated quantities as function of control values ratio

Z rysunku 16 wynika, że gdy  $\delta_{x_1} = \delta_{x_2} = \delta$ , to względna znormalizowana niepewność  $\delta_{\Delta x_c}$  upraszcza się

$$\frac{\delta_{\Delta x_c}}{\delta} = \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{\gamma-1} \quad (61)$$

W przypadku pełnego skorelowania zmiennych  $x_{c1}$  i  $x_{c2}$  (rys. 16), formuła (61) ma postać

$$\frac{\delta_{\Delta x_c}}{\delta} = \frac{\sqrt{1+\gamma^2 \pm 2\gamma}}{\gamma-1} = \frac{|\gamma \pm 1|}{\gamma-1} \quad (61a)$$

Przy braku korelacji estymowana znormalizowana niepewność względna dla sumy/różnicy dwóch wielkości jest zawsze większa niż niepewność każdej z nich. Z rysunku 16 wynika, że już dla  $\gamma > 2$  względna niepewność sumy/różnicy spełnia warunek  $\delta_{\Delta x_c} < 2\delta$ . Gdy między danymi pomiarowymi punktów kontrolnych jest pełna korelacja, to niepewność sumy  $\delta_{\Delta x_c} < 2\delta$ . już dla  $\gamma > 3$  podczas, gdy niepewność różnicy jest równa  $\delta$ .

## 5. Podsumowanie i wnioski

Różne przypadki szacowania niepewności w pośrednich pomiarach wieloparametrowych autorzy omawiali w poprzednich pracach [2–10]. Dotyczyły one skojarzonych pomiarów temperatur, parametrów pola magnetycznego, układów rezystancji przy prądzie stałym (DC) i pomiarów składowych impedancji przy prądzie przemiennym (AC). W tej pracy zastosowano wektorowe równanie propagacji niepewności, podane m.in. w Suplemencie 2 Przewodnika GUM [1], do pośredniego szacowania dokładności punktów funkcji opisującej badaną charakterystykę na podstawie pomiarów w punktach kontrolnych. Można to wykorzystać w badaniach czujników, przetworników przyrządów i systemów pomiarowych oraz w badaniu zjawisk i procesów w technice, nauce i wielu innych dziedzinach.

W pracy przedstawiono w szczególności dwie metody estymacji niepewności bezwzględnych i względnych dla wartości funkcji opisującej badaną charakterystykę. Uzyskuje się je z wartości i niepewności wyznaczonych z pomiarów w punktach kontrolnych tej funkcji. Oszacowano też współczynniki korelacji dla estymowanych niepewności.

Estymację niepewności wykonano dwiema metodami – deterministyczną i statystyczną – oznaczonymi jako metody I i II. W metodzie I założono liniową zależność między niepewnością bezwzględną i wartością wielkości mierzonej, taką jak dla błędu granicznego i współczynnik korelacji w całym zakresie równy 1. W metodzie II, dla wartości estymowanych i kontrolowanych

przyjęto zależności statystyczne. Wartości w punktach badanej funkcji interpolowano jako liniową superpozycję wartości brzegowych zmierzonych w punktach kontrolnych. Z ich wartości i niepewności estymowano bezwzględne i względne niepewności w analizowanych punktach charakterystyki. Oszacowano też różnice niepewności wyznaczone obiema metodami, odniesione do znormalizowanych parametrów punktów kontrolnych.

Metoda I umożliwia liniową estymację nawet przy niewielkich zmianach niepewności między dwoma punktami pomiarowymi. Przy dużej liczbie punktów pomiarowych, równomiernie rozłożonych wzdłuż badanej charakterystyki, można estymować przebiegi nieznanej funkcji i jej niepewności dla badanego przyrządu lub przetwornika pomiarowego różnymi metodami regresji.

Porównano parametry metody II oraz metody I, stanowiącej rodzaj wzorca. Wyznaczono różnice niepewności interpolowanych obiema metodami. Gdy wartości niepewności sąsiednich punktów pomiarowych różnią się co najmniej tak samo jak wielkość badana, to dla stosunku tych niepewności  $\varepsilon = 2$  różnica ta w jednostkach niepewności znormalizowanych do końca przedziału wynosi 0,2, a dla  $\varepsilon = 3$  około 0,15.

Gdy znany jest tylko sam przebieg funkcji badanej, to przy stosowaniu obu metod – deterministycznej i statystycznej, nie można jednoznacznie wskazać liczby punktów pomiarowych  $n > 2$ . Należy założyć dopuszczalne zmiany estymowanych niepewności, np. odstępstwa od prostej łączącej wartości w punktach kontrolnych.

Dokładność oszacowania obiema metodami można określić ilościowo po wyznaczeniu zależności niepewności jako funkcji badanej wielkości, np. przewidywanej na podstawie posiadanej wiedzy lub uzyskiwanej zwykle w innych badaniach.

Użytecznym w praktyce sposobem jest też podział całego zakresu badanej charakterystyki na sąsiadujące ze sobą przedziały. Jeśli ich niepewność nie wzrasta więcej niż dwu lub trzykrotnie ( $\varepsilon = 2, 3$ ), to względne różnice interpolacji obiema metodami nie przekroczą 0,2; 0,15.

Na zakończenie należy podkreślić, że niniejsza praca dotyczy przypadków, gdy metodą statystyczną II estymuje się niepewności punktów funkcji badanej na podstawie pomiarów w punktach kontrolnych, o niepewnościach ze sobą nieskorelowanych. Wpływ takiego skorelowania i możliwość uwzględnienia w estymacji niepewności typ B przyrządów zastosowanych w pomiarach tych punktów rozpatrzy się w innej pracy.

## Bibliografia

1. JCGM 102:2011, Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities.
2. Warszawa Z.L., *Metody rozszerzenia analizy niepewności pomiarów*. Monografia PIAP 2016, ISBN 978-83-61278-31-3.
3. Warszawa Z.L., Ezhela V.V., *Wyznaczanie parametrów multi-menzurandu z pomiarów wieloparametrowych Część 1 Podstawy teoretyczne – w zarysie*. „Pomiary Automatyka Robotyka”, 1’2011, 40–46.
4. Warszawa Z.L., Ezhela V.V., *About evaluation of multivariate measurements results*. „Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems”, Vol. 6, No. 4, 2012, 27–32.
5. Warszawa Z.L., Evaluation and Numerical Presentation of the Results of Indirect Multivariate Measurements. [In:] *Advanced Mathematical & Computational Tools in Metrology and Testing IX*, ed. by F. Pavese. M. Bar et al, Serie: *Advances in Mathematics for Applied Sciences*, Vol. 84, World Scientific Books 2012, New Jersey · London · Singapore, 418–425.
6. Warszawa Z.L. Part 1, Warszawa Z.L., Puchalski J., Part 2: *Estimation of uncertainty of indirect measurement in multi-parametric systems with few examples*. PpT: in CD Procee-

- dings of conference: Problems and Progress of Metrology ppm'18 Szczyrk 04-06. June 2018. Series: Conferences No. 22, Metrology Commission of Katowice Branch of the Polish Academy of Science.
7. Warsza Z.L., Puchalski J., *Estymacja macierzowa niepewności wieloparametrowych pomiarów pośrednich z przykładami*. „Pomiary Automatyka Robotyka”, Nr 2, 2018, 31–39, DOI: 10.14313/PAR\_228/31.
  8. Warsza Z.L., Puchalski J., *Estimation of vector uncertainties of multivariable indirect instrumental measurement systems on the star circuit example*. XXII World Congress IMEKO 2018 Belfast. CD Proceedings PO-062 and IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1065 (2018) 052026, DOI: 10.1088/1742-6596/1065/5/052026.
  9. Warsza Z.L., Puchalski J., *Estymacja niepewności w pośrednich pomiarach wieloparametrowych na przykładzie dwuukładów rezystancyjnych 3D*. „Pomiary Automatyka Robotyka”, 4/2018, 31–38, DOI: 10.14313/PAR\_230/31.
  10. Warsza Z.L., Puchalski J., *Estimation of uncertainties of multivariable indirect measurements of two DC electrical circuits*. Proceedings of conference. Automation 2019, Warsaw. Szewczyk, R. et al (eds.), Advances in Automation, Robotics and Measurement Techniques, series “Advances in Intelligent Systems and Computing” Springer International Publishing AG 2019, Vol. 920, 624–635, DOI: 10.1007/978-3-030-13273-6-58.

## Estimation of the uncertainty of function values from measurements at control points

**Abstract:** The paper discusses two methods of interpolation and extrapolation of the uncertainty of a values of the tested function, based on measurements in several its points. The first of these is the deterministic method based on a linear approximation of the uncertainty function without considering the correlation of its interpolated values. The second statistical method consists in the statistical estimation of uncertainty for any values of the function under test as a linear combination of the measurement result parameters at several control points. To determine the uncertainty, a matrix equation for the propagation of variances of indirectly measured multivariable measurand, was used. This is an extension of the scope of application of Supplement 2 to the GUM guide. The relative and absolute uncertainties of values of linear function are interpolated by both methods and their sum and difference were compared. Interpolations in the whole range of the examined function were proposed and the procedure of minimizing the number of measuring points was presented. Both methods can be useful in all areas of modern metrology applications.

**Keywords:** estimation of the uncertainty of the examined function, measurement checkpoints, indirect measurements, multidimension measurand, limited errors

### doc. dr inż. Zygmunt Lech Warsza

zlw1936@gmail.com

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–1970, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatykacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 340 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.



### dr inż. Jacek Puchalski

j.puchalski@gum.gov.pl

Absolwent Wydziału Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej (1986 r.) oraz Wydziału Elektroniki (1988 r.) Politechniki Warszawskiej. W latach 1987–1995 asystent na Politechnice Warszawskiej, w 1995 r. obronił pracę doktorską. Kolejne 10 lat pracował w branży nowych technologii w firmach produkujących i importujących kasy rejestrujące. Przygotowywał i uczestniczył w certyfikacji nowych modeli kas w Ministerstwie Finansów oraz prowadził szkolenia i serwis urządzeń fiskalnych. Od 2006 r. pracuje w Głównym Urzędzie Miar. Zajmował się zatwierdzeniem typu i oceną zgodności taksometrów elektronicznych i mierników prędkości w ruchu drogowym, a obecnie jako główny metrolog rozwija metody matematyczne szacowania niepewności pomiarowych.

