

## ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ ДЛЯ ПОБУДОВИ ЦИФРОВИХ МОДЕЛЕЙ РЕЛЬЄФУ

*Христина Бурштинська, Олександр Заяць*

Національний університет "Львівська політехніка",  
кафедра аерофотогеодезії

**Using of spline functions for building of DEM**  
*Khrystyna Burshtynska, Alexander Zayac*

### **Abstract**

*For building DEM the input data is obtained based the cartometric method with the record over layers as contours, character points, control points. The regular DEM is built using the one-dimensional linear and cubic splines over profile lines which is drawn along axes  $x$ ,  $y$  and diagonal. Optimization of input data set is made using the norm of the second derivative to linear spline and the norm of the fourth derivative to cubic spline. In this paper we present the estimation of the accuracy using the control points and comparison made between initial isoline map and created map with use of the linear and cubic splines. The cubic splines yields the high accuracy of interpolation but they are most sensitive to the extreme points.*

Значний інтерес до сплайн-інтерполяції для побудови цифрових моделей рельєфу можна пояснити такими основними перевагами перед іншими інтерполяційними методами:

- 1) стійкість сплайна стосовно локальних збурень, тобто поведінка сплайна в околі точки не впливає на поведінку сплайна в цілому;
- 2) хорошою сходимістю сплайн-інтерполяції, особливо для функцій з нерегулярними властивостями гладкості;
- 3) при використанні сплайнів не потрібно апріорної інформації про статистичну структуру даних;
- 4) простотою реалізації на комп'ютері.

(Воротинцев А.Г., Куликова Л.Г., 1991; Гуров В.Н., Зиборов В.В., 1988; Экспресс-информация. Матем. методы и АЭС в геологии, 1986; Eckstein В. App, 1989)

Із спеціальної літератури з теорії сплайнів (Алберг Дж. і др., 1972; Завьялов Ю.С. і др., 1980) відомо, що оптимальні результати апроксимування функції отримують, використовуючи сплайни першого та третього степеня.

Сплайн першого степеня  $S_1(x)$  визначається умовами:

$$S_1(x_i) = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Геометрично він представляє ламану, яка проходить через точки  $x_i$ ,  $y_i$  де  $y_i = f_i$ .

Метод інтерполяції з використанням сплайна третього степеня полягає у розв'язку такої задачі: якщо на відрізку  $[a, b]$  у вузлах  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  задані значення  $f(x_i) = y_i$ , то лінеаризований сплайн  $S_3(x_i)$  є функцією, для якої інтеграл

$$\int_{x_1}^{x_n} [f'''(x)]^2 dx$$

(1)

має мінімальне значення. Так як поверхню Землі за достатньої гладкості можна вважати такою, що не має розривів, то функція, що її апроксимує, повинна бути неперервною на заданій ділянці. Доведено, що така функція має властивості мінімальної кривини. Іншими словами, кубічний сплайн найгладша із функцій, яка інтерполює задані точки за допомогою спряжених кубічних многочленів, в місцях спряження яких (вузлах) перша і друга похідні неперервні. Для кожної кубічної кривої необхідно визначити чотири параметри, а для  $n$  точок необхідно  $n - 1$  таких кривих, загальна кількість невідомих  $4n - 4$ . Те, що  $f(x_i) = y_i$ , для кожного з  $n$  вузлів дає  $n$  умов на  $f$ . Крім задання умов, що функція  $f$ , а також  $f'$  і  $f''$  неперервні у  $n - 2$  внутрішніх вузлах, що дає  $3(n - 2)$  умов на  $f$ , необхідно задати ще дві межові умови. Найчастіше для однозначного визначення сплайн-функції приймають

$$f''(x_1) = f''(x_n) = 0.$$

(2)

хоч застосовують і інші межові умови, які змінюють картину інтерполяції, особливо на краях ділянки. В (Алберг Дж. и др., 1972, Завьялов Ю.С. и др., 1980) подано рівняння для інтерполяції функції кубічним сплайном з використанням умов (2).

Якість інтерполяції характеризується залишковим членом:

$$R(x) = S(x) - f(x).$$

Оцінка залишкового члена залежить від того, які диференціальні властивості притаманні інтерполяційній функції.

Виходячи із допускної похибки  $\varepsilon$  між інтерполяційним сплайном і заданою функцією

$$S_n - f(x) < \varepsilon,$$

в (Завьялов Ю.С. и др., 1980) виведені формули оптимального кроку між вузловими точками. Практичну реалізацію визначення оптимального кроку наведено в (Бурштынская Х.В., Абрамович А.М., 1988).

Для сплайна першого степеня

$$h \leq \sqrt{\frac{8\varepsilon}{\|f''(x)\|_{C[a,b]}}},$$

(3)

де  $h$  - крок розташування вузлових точок,  $\|f''(x)\|_{C[a,b]}$  - норма другої похідної функції на ділянці  $[a, b]$ .

Для ермітового кубічного сплайна

$$h \leq \sqrt[4]{\frac{384\varepsilon}{\|f^{(4)}(x)\|_{C[a,b]}}},$$

(4)

де  $\|f^{(4)}(x)\|_{C[a,b]}$  - норма похідної четвертого порядку.

Для побудови цифрової моделі рельєфу використано карту масштабу 1:5000 з перерізом рельєфу 1 м, розмір ділянки на карті 15 см x 34 см. Максимальний перепад відміток точок - 12 м; кути нахилу рельєфу змінюються від  $0,1^\circ$  до  $1^\circ$ ; рельєф спокійний, в центральній частині ділянки болото. Вихідну інформацію отримано

шляхом сканування карти з роздільною здатністю сканування 300 dpi з пошаровим записом інформації: горизонталі, характерні точки, контрольні точки.

Побудовану 3D-модель ділянки показано на рис. 1.

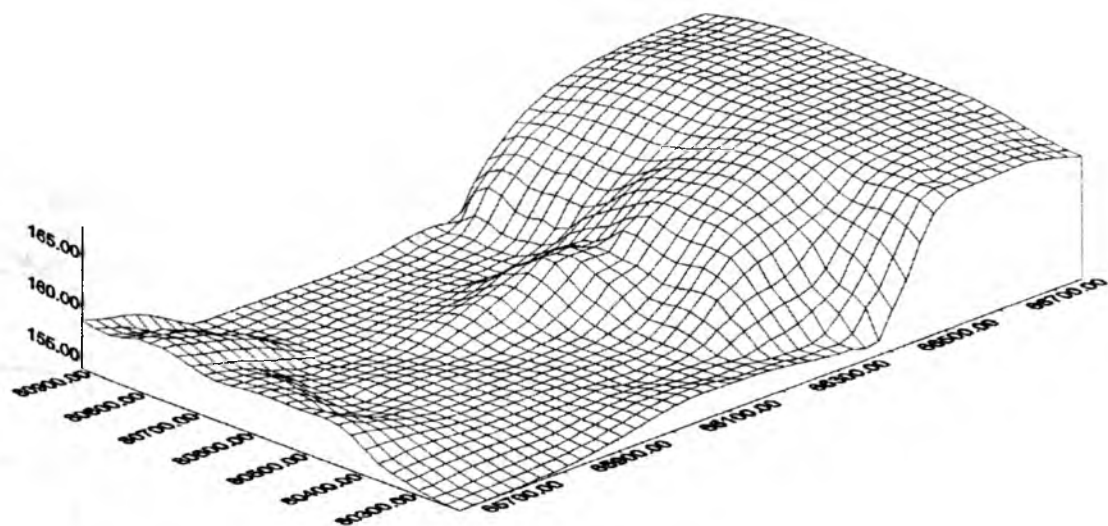


Рис. 1. 3D-модель ділянки карти.

З метою оптимізації набору вихідної інформації і забезпечення необхідної

точності визначення відміток точок  $\varepsilon = \frac{1}{3} \Delta$  ( $\Delta$  - переріз рельєфу) на ділянці вибрано

5 характерних профілів, які включають як рівнинні, так і горбисті частини. За формулами (3-4) знайдено мінімальні та максимальні кроки сітки. Похідні другого та четвертого порядків отримано за розділеними різницями. За нормою похідної всього профілю обчислені мінімальні відстані між вузловими точками  $h_{min}$ ; максимальні відстані  $h_{max}$  обчислені за нормою похідної для гладкої ділянки профілю.

Характеристика профілів і результати обчислень зведені в таблиці 1. Аналіз таблиці дозволяє зробити висновок, що для забезпечення потрібної точності для рівнинних частин ділянки відстань між точками на карті повинна дорівнювати  $\approx 1-1,5$  см, а в горбистих частинах  $\approx 0,5$  см. Тому, користуючись цим правилом, набрані додаткові точки в рівнинних ділянках.

Таблиця 1.

Значення мінімальних та максимальних відстаней між вузловими точками

№ профіля	Перепад висот, $A_{max} - A_{min}, м$	схил, $град.$	Сплайн 1-го степеня		Сплайн 3-го степеня	
			$h_{min}, м$	$h_{max}, м$	$h_{min}, м$	$h_{max}, м$
1	3	0,7	63	89	59	80
2	5	1,5	20	44	29	54
3	13	5	12	20	28	44
4	8	9	9	44	17	54
5	10	4	14	36	26	47

Регулярна ЦМР побудована з використанням одномірних сплайнів першого та третього степеня за профільними лініями, проведеними через 0,5 см вздовж осей  $x, y$  і в діагональних напрямках, тобто кожна точка моделі визначається із 4-кратної

побудови. Екстремальні точки на профілях визначались в автоматичному режимі із аналізу топології профіля, їх відмітки отримано способом середнього вагового, використовуючи найближчі чотири точки, розташовані за квадрантом. Інформація задана в межах ділянки, модель побудована на ділянці меншій з усіх сторін на 2 см.

Оцінку точності сплайн-інтерполяції, виконану за 30 контрольними точками, представлено в таблиці 2. Для визначення відміток контрольних точок від найближчих точок профілів застосовано способи апроксимації: середнього вагового, білінійної поверхні, біплощинної поверхні.

Таблиця 2

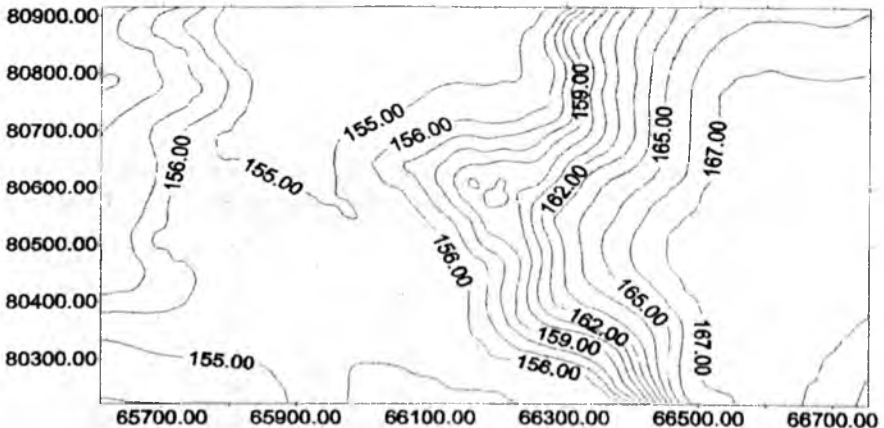
Оцінка точності сплайн-інтерполяції

Тип моделювання	Вид апроксимації	Макс. відх., м	Мін. відх., м	Середня квадратична похибка, м, м
Лінійний сплайн	Сер. вагове	0,30	-0,32	0,17
	Білінійна поверхня	0,30	-0,32	0,18
	Біплощинна поверхня	0,30	-0,33	0,18
Лінійний сплайн з екстремальними точками	Сер. вагове	0,21	-0,28	0,13
	Білінійна поверхня	0,20	-0,29	0,14
	Біплощинна поверхня	0,20	-0,29	0,14
Кубічний сплайн	Сер. вагове	0,74	-0,36	0,27
	Білінійна поверхня	0,76	-0,36	0,28
	Біплощинна поверхня	0,75	-0,36	0,28
Кубічний сплайн з екстремальними точками	Сер. вагове	0,19	-0,27	0,11
	Білінійна поверхня	0,18	-0,26	0,12
	Біплощинна поверхня	0,18	-0,26	0,12

Найточніші результати інтерполяції отримані з використанням кубічного сплайна із залученням екстремальних точок на профілях. Способи апроксимації при визначенні відміток контрольних точок практично однотипні. Кубічний сплайн чутливий до екстремальних точок, їх пропуски на профілях призводять до суттєвого пониження точності.

Порівняння методів моделювання на основі заданих і відтворених ізоліній підтверджує цей висновок. На рис. 2 подані карти ізоліній (відскановані ізолінії зображені точками, відтворені - суцільними лініями).

а)



б)

в)

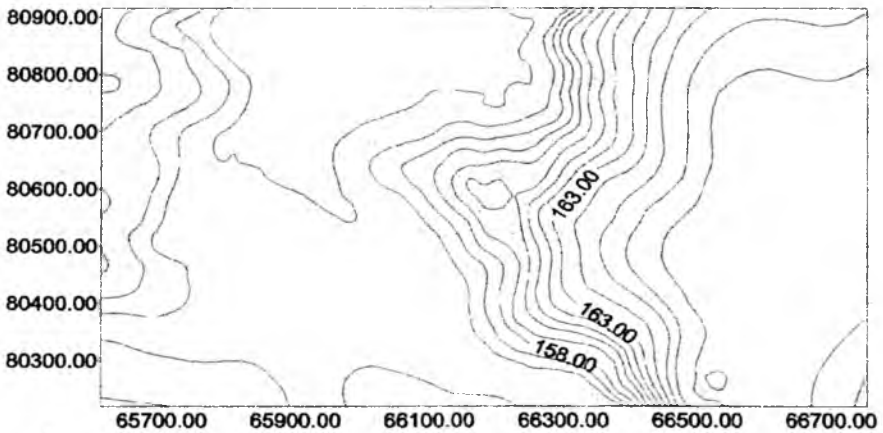
Рис. 2. Порівняння методів моделювання: а - лінійний сплайн; б - кубічний сплайн; в - кубічний сплайн з екстремальними точками.

Порівняння ізоліній, побудованих на основі моделювання, з заданими свідчить про кращу заладжуваність форм рельєфу при використанні кубічного сплайна порівняно з лінійним. Незначні розходження між ізолініями спостерігаються на краю ділянки в рівнинній частині.

Екстремальні точки на профілях визначаються методом середнього вагового:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i},$$

(5)



де  $w_i = \frac{1}{S_i^k}$  - вага, з якою вихідна точка бере участь у визначенні відмітки.

Вибір ваг змінює точність інтерполювання. Представимо на рис. 3 карти ізоліній: вихідну та побудовану кубічним сплайном із визначенням екстремальних точок за  $k = 2$ . На рис. 2в подана ця ж карта за  $k = 1$ . Це свідчить про те, що підбирати вагову функцію до типу поверхні за середньовагової інтерполяції необхідно в інтерактивному режимі.

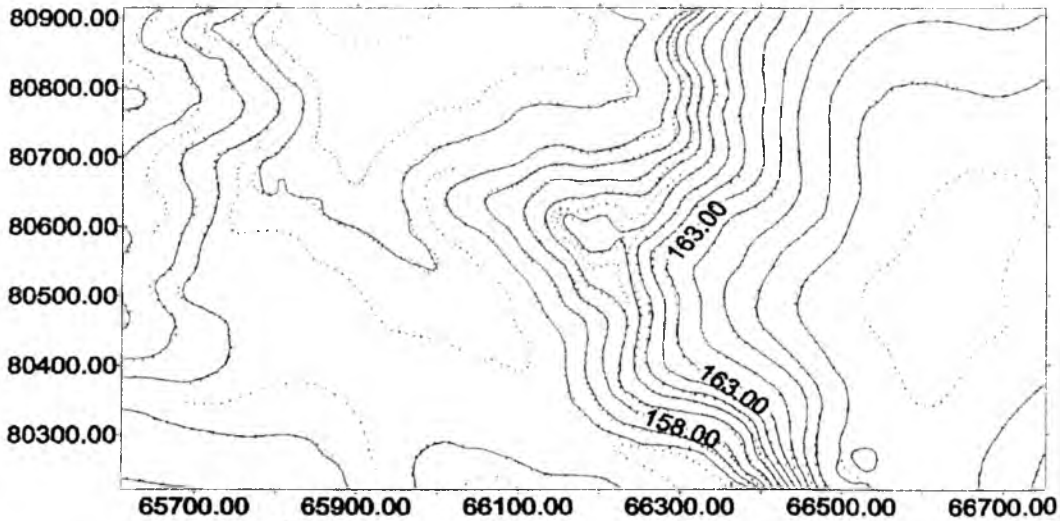


Рис. 3. Порівняння вихідної карти ізоліній з побудованою кубічним сплайном із визначенням екстремальних точок за  $k = 2$ .

В цілому ж проведені дослідження дозволяють зробити висновок про доцільність застосування поданої методики для побудови ЦМР.

Сплайн-інтерполяція за профілями з застосуванням кубічного сплайна із визначенням екстремальних точок дає високу точність визначення відміток ЦМР і забезпечує гладкість поверхні.

Рецензію на статтю склав проф. Дорожинський О.Л.

### Література

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. - М., Мир, 1972, пер. с англ. - с. 350.
2. Бурштынская Х.В., Абрамович А.М. О выборе шага между узловыми точками при построении профилей местности методом сплайн-интерполяции. - Деп. 26.01.88 № 298 - Ук 88. - с. 5.
3. Воротынцев А.Г., Куликова Л.Г. Построение модели оценки метода билинейных сплайнов на подпространстве Геодезическое обеспечение строительства, монтажа и эксплуатации инженерных сооружений. - М., Ком. геод. и картогр. СССР, 1991. - с. 57-62.
4. Гуров В.Н., Зиборов В.В. О моделировании топографической поверхности сплайн-функциями. - Киев, Инж. геод., 1988, № 31. - с. 17-20.
5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М., Наука, 1980. - с. 350.
6. Математические методы и автоматизированные системы в геологии. - М., 1986, Вып. 4. - с. 8-12.
7. Eckstrein Barbara Ann. Evaluation of spline and weighted average interpolation algorithms. - Comput. and Geosci, 1989, 15, № 1. - с. 79-94.

## ZASTOSOWANIE FUNKCJI SKLEJANYCH W CELU STWORZENIA NUMERYCZNEGO MODELU TERENU.

Krystyna Bursztyńska, Aleksandr Zayac

### *streszczenie*

*Wyjściową informację dla stworzenia NMT otrzymano metodą kartometryczną ze skanowania mapy z zapisem następujących informacji: izolinie, charakterystyczne punkty, punkty dla kontroli. Regularny model stworzono z wykorzystaniem funkcji sklejanych pierwszego i trzeciego stopnia, realizowanych po profilach wzdłuż osi  $x$ ,  $y$  i po przekątnych.*

*Optymalizację wyjściowej informacji zrealizowano dla liniowych funkcji sklejanych pochodną 2-go stopnia, dla funkcji 3-stopnia - pochodną 4-go stopnia.*

*W artykule podano ocenę dokładności na punktach kontrolnych i porównywanie izolinii na mapach wyjściowych i stworzonych z zastosowaniem funkcji sklejanych 1-ej i 3-ej potęgi. Ostatni daje wysoką dokładność interpolacji, jednak jest bardzo czuły do wpływu ekstremalnych punktów.*

## ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ ДЛЯ ПОБУДОВИ ЦИФРОВИХ МОДЕЛЕЙ РЕЛЬЄФУ

### *Анотація*

*Вихідну інформацію для побудови ЦМР отримано на основі картометричного методу з пошаровим записом: горизонталі, характерні точки, контрольні точки. Регулярна ЦМР побудована з використанням одномірних сплайнів першого та третього степеня за профільними лініями, проведеними вздовж осей  $x$ ,  $y$  і по діагоналях.*

*Оптимізація набору вихідної інформації здійснена для лінійного сплайна за нормою похідної другого порядку, для кубічного сплайна – за нормою похідною четвертого порядку.*

*В статті наведено оцінку точності за контрольними точками і порівняння карт ізоліній, побудованих з використанням сплайнів 1-го та 3-го степенів. Останній дає високу точність інтерполяції, однак чутливість до впливу екстремальних точок.*

