

Jan KOSMOL<sup>1\*</sup>  
Robert GATYS<sup>1</sup>

## **SYMULACYJNE BADANIA WPLYWU PRĘDKOŚCI OBROTOWEJ NA SIŁY KONTAKTOWE W ŁOŻYSKU TOCZNYM**

W artykule przedstawiono wyniki modelowania metodą elementów skończonych zjawisk kontaktowych w łożysku tocznym skośnym. Celem modelowania było wyznaczenie związków pomiędzy siłami kontaktowymi a prędkością obrotową łożyska i napięciem wstępnym. W szczególności oceniono wpływ siły odśrodkowej od wirujących kulek łożyskowych na siły normalne pomiędzy bieżniami łożysk i kulką oraz momentu żyroskopowego na wielkość tych sił. Badania przeprowadzono dla wybranego łożyska skośnego. Przedstawiono także wstępne wyniki badań analitycznych, bazujące na teorii Hertza, w celu ich porównania z wynikami badań MES i oceny wiarygodności wartości liczbowych MES.

### **1. WPROWADZENIE**

Rozwój metod numerycznych, takich jak np. metoda elementów skończonych, umożliwia prowadzenie zaawansowanych analiz inżynierskich, które znacząco wspomagają pracę konstruktora. Jednym z ważnych zagadnień inżynierskich, zwłaszcza w świetle tendencji rozwojowej nazywanej w skrócie HSC (High Speed Cutting), jest projektowanie obrabiarek szybkobieżnych. Dotyczy to zwłaszcza szybkoobrotowych wrzecienników, które umożliwiają pracę obrabiarek z prędkościami obrotowymi wynoszącymi nawet kilkadziesiąt tysięcy obr/min. Krytycznym zagadnieniem jest w takim przypadku dobór łożysk.

Wzrost prędkości obrotowych to w konsekwencji wzrost sił dynamicznych (odśrodkowych i żyroskopowych) oraz pojawienie się innych zjawisk (efekt spinu kulki łożyskowej), które prowadzą do znaczącego wzrostu generowanego ciepła. Konstruktor powinien posiadać możliwość jego oszacowania, aby zaprojektować np. układ chłodzenia łożysk. Dla oszacowania ciepła powstającego w łożysku tocznym, niezbędna jest wiedza o oporach ruchu, tj. o oporach tarcia występujących pomiędzy kulką (wałeczkiem) a bieżniami łożyskowymi. Opory tarcia są funkcją sił kontaktowych i współczynnika tarcia. Numeryczne obliczenia sił kontaktowych w funkcji np. prędkości obrotowej, obciążenia łożyska czy napięcia wstępnego mogą być wygodnym narzędziem projektowym.

---

<sup>1</sup>Politechnika Śląska, Katedra Budowy Maszyn, Gliwice

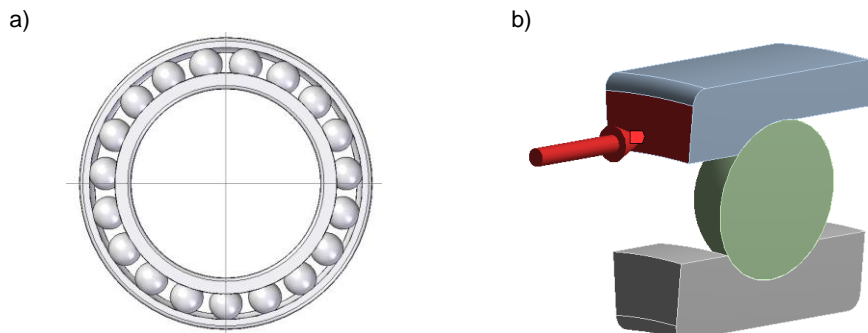
\* E-mail: jkosmol@polsl.pl

W niniejszym artykule przedstawiono wybrane wyniki obliczania sił kontaktowych w łożyskach tocznych skośnych w funkcji prędkości obrotowej i napięcia wstępnego łożysk, ale z zastosowaniem metody numerycznej, jaką jest metoda elementów skończonych (MES). Celem badań numerycznych nie były tylko same wartości sił kontaktowych, ale też próba interpretacji zjawisk, jakie występują w obszarach kontaktowych kulki z bieżniami pierścienia wewnętrznego i zewnętrznego, w zależności od prędkości obrotowej pierścienia wewnętrznego łożyska i napięcia wstępnego.

W literaturze dostępnych jest wiele modeli obliczeniowych (analitycznych), które pozwalają na wyznaczanie sił kontaktowych w funkcji prędkości obrotowej czy napięcia wstępnego [2],[3],[4]. Modele te bazują na teorii Hertza i wszystkie obliczenia naprężeń, przemieszczeń itp. są w pewnym stopniu uśrednione, ponieważ odniesione do pewnego obszaru (elipsy) kontaktowego. Modelując zjawiska w strefie kontaktowej metodą elementów skończonych możemy wyznaczać te wielkości w znacznie mniejszym obszarze, wynikającym z podziału na elementy skończone. Ich wartości mogą się z tego powodu różnić od wyliczonych w oparciu o wzory Hertza.

## 2. MODEL NUMERYCZNY ŁOŻYSKA TOCZNEGO

Przedmiotem badań modelowych było łożysko toczne skośne typu FAG B7013 [7] (rys. 1a). Jest to łożysko precyzyjne, średniej wielkości (średnica wewnętrzna 65 mm), które w zależności od sposobu smarowania pozwala na pracę z prędkościami 11.000 obr/min (dla smaru plastycznego) i do 18.000 obr/min (smarowanie olejem).



Rys. 1. Modelowanie łożyska: a) model CAD łożyska tocznego, skośnego FAG B7013, b) model geometryczny łożyska wstępnie napiętego

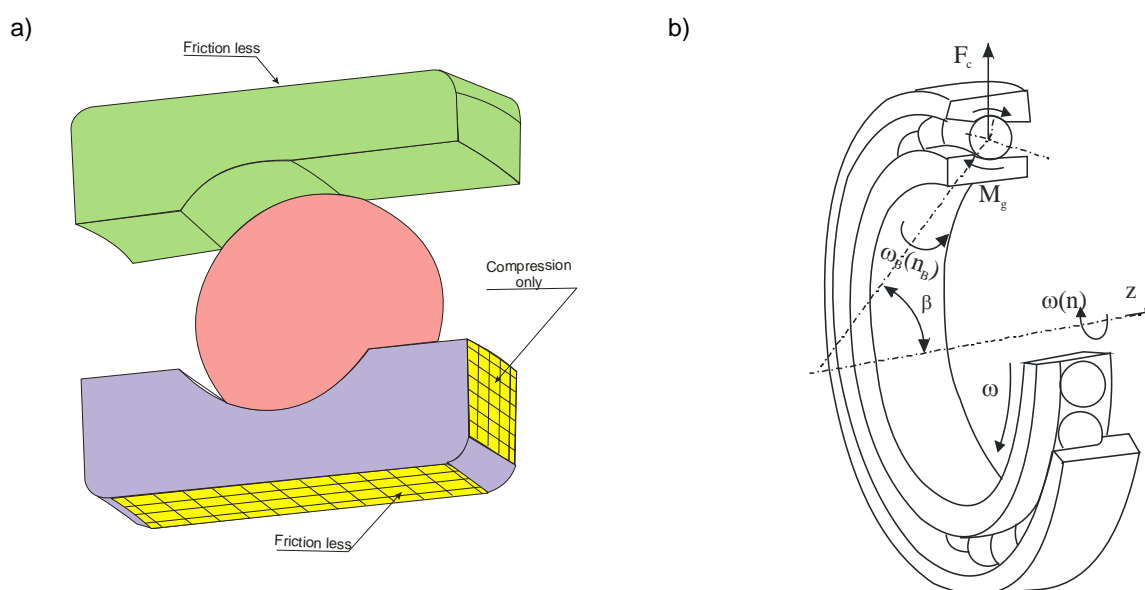
Fig. 1. Modeling of bearing: a) model CAD of an angular bearing FAG B7013, b) geometric model of preload bearing

Z uwagi na wiele osi symetrii, do modelowania numerycznego (MES) można brać pod uwagę model geometryczny bardzo uproszczony, jak np. na rys. 1b. Modelowano tylko połowę jednego elementu tocznego oraz wycinek pierścienia wewnętrznego i zewnętrznego.

Parametry materiałowe zdefiniowano jak dla stali łożyskowej ŁH15, na podstawie norm. Podział na elementy skończone wykonano korzystając ze standardowych opcji,

jakimi dysponuje każdy program MES [8]. Wykorzystano opcje pozwalające na kontrolę rodzaju elementów i ich rozmiaru. Długość krawędzi elementu podstawowego ustalono na 0,5 mm. Dodatkowo wykorzystano opcję *Contact Sizing*, która pozwala na ustalenie rozmiaru elementu w strefie kontaktu. Rozmiar elementu ustalono na poziomie 0,2 mm, a następnie dodatkowo zagęszczono, za pomocą funkcji *Refinement*.

To, co decyduje o efektywności modelowania to warunki brzegowe, a zwłaszcza model odkształceń kontaktowych i modele utwierdzenia. Duże znaczenie posiada sam system obliczeniowy MES, ponieważ on oferuje pewne dostępne, numeryczne modele. W naszym przypadku był to Ansys [8], który oferuje 6 sposobów modelowania utwierdzeń i 5 sposobów modelowania kontaktów. Pierścieniom łożyskowym odebrano stopnie swobody odpowiadające modelom *Compression only* i *Friction less* (rys. 2).



Rys. 2. Model geometryczny MES i warunki obciążenia łożyska: a) powierzchnie utwierdzenia pierścieni łożyska *Compression Only i Frictionless*, b) siła odśrodkowa  $F_c$  i moment żyroskopowy  $M_g$ ;  $\omega$  - prędkość kątowna pierścienia wewnętrznego,  $\omega_B$  - prędkość kątowna kulki wokół własnej osi

Fig. 2. Geometric model FEM and terms of loads: a) degrees of freedom of rings: *Compression Only and Frictionless*, b): centrifugal force  $F_c$ , gyroscopic torque  $M_g$ ;  $\omega$  - angular speed of internal ring,  $\omega_B$  - angular speed of the ball around own axis

Zjawiska kontaktowe postanowiono modelować wykorzystując standardowy model *Frictional*, który pozwala uwzględnić zjawisko tarcia pomiędzy stykającymi się ciałami. W tym przypadku, użytkownik powinien zdefiniować wartość współczynnika tarcia, bowiem w przeciwnym razie przyjęta zostanie wartość domyślna.

Ważnym, dla precyzji obliczeń jest zdefiniowanie algorytmu obliczeń, który przede wszystkim determinuje sposób wykrywania kontaktu. Ansys oferuje 4 standardy algorytmów obliczeniowych. Różnica pomiędzy nimi, z punktu widzenia użytkownika, przejawia się m.in. w czasie trwania obliczeń. Wybrany, na podstawie wskazówek producenta oprogramowania algorytm *Augmented Lagrange* wymaga zdefiniowania m.in. parametru, jakim jest współczynnik sztywności kontaktowej.

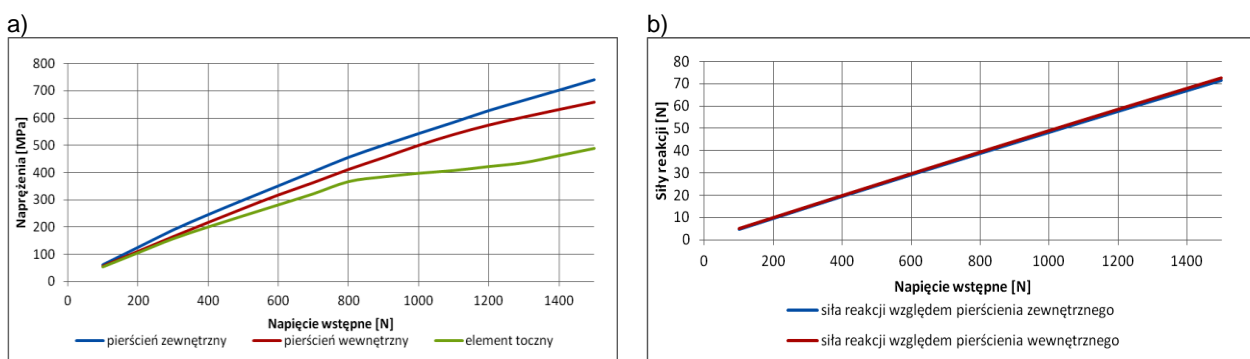
Napięcie wstępne łożysko modelowano w postaci ciśnienia na powierzchni czołowej pierścienia zewnętrznego (rys. 1b). Natomiast efekty dynamiczne w postaci sił odśrodkowych działających na ruchome elementy (na kulki) modelowano, wykorzystując standardowy mechanizm Ansysa (definiowano jedynie wartości liczbowe prędkości obrotowej elementów ruchomych i położenie osi obrotu).

W przeprowadzonych badaniach [5] uwzględniono także efekty żyroskopowe (rys. 2b), ale w sposób ograniczony (Ansys nie pozwala na równoczesne modelowanie dwóch ruchów obrotowych o zróżnicowanych prędkościach i osiach obrotu. Jeżeli modelowano występowanie siły odśrodkowej od kulek to nie można było jednocześnie modelować zjawiska żyroskopowego, i odwrotnie).

### 3. PRZYKŁADOWE WYNIKI BADAŃ SYMULACYJNYCH

Cała metodyka badań symulacyjnych polegała na powtarzaniu obliczeń naprężeń kontaktowych, odkształceń i przemieszczeń kontaktowych i sił kontaktowych w zakresie prędkości obrotowych pierścienia wewnętrznego do 18.000 obr/min, dla trzech wartości napięcia wstępnego: 100 N, 500 N i 1000 N. Analizowano także przypadek, kiedy nie ma napięcia wstępnego. Taki przypadek w praktyce nie jest możliwy, ale pozwala zinterpretować niektóre zjawiska występujące podczas obecności napięcia wstępnego.

Na kolejnych rysunkach przedstawiono przykłady modelowania naprężeń, odkształceń i sił kontaktowych uzyskanych z przeprowadzonych symulacji. Rysunek 3a przedstawia rozkład naprężeń kontaktowych spowodowanych napięciem wstępnym, a rys. 3b, rozkład sił kontaktowych w modelu łożyska.



Rys. 3. Wpływ napięcia wstępnego na: a) wartości maksymalne naprężenia kontaktowego (von Misesa), b) siły kontaktowe

Fig. 3. Influence of pre-load on: a) a maximum contact stress (von Mises), b) contact loads

Napięcie wstępne powoduje liniowy przyrost sił kontaktowych, przy czym, siły kontaktowe na obu pierścieniach są praktycznie takie same. Jest to zgodne z modelami analitycznymi dostępnymi w literaturze [3]. Natomiast maksymalne wartości naprężeń kontaktowych (von Misesa) występujące na obu pierścieniach i kulce różnią się od siebie o ok. 10%, co wynika z różnych krzywizn powierzchni kontaktowych.

Przy badaniach wpływu prędkości obrotowej przyjęto, że prędkość wirowania kulek wynosi:

$$n_m = \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{D_k \cos \alpha}{d_m} \right) \quad (1)$$

gdzie:  $n_m$  - prędkość obrotowa wirowania kulek wokół osi łożyska,

$n$  - prędkość obrotowa pierścienia wewnętrznego,

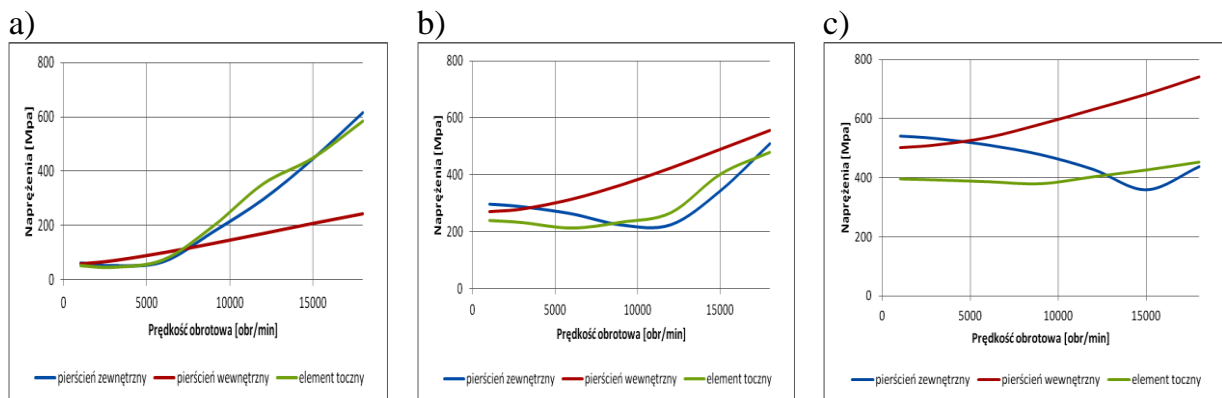
$D_k$  - średnica kulki,

$d_m$  - średnia średnica łożyska,

$\alpha$  - kąt działania łożyska w stanie nieobciążonym.

Prędkość  $n_m$  była podstawą do obliczenia siły odśrodkowej od wirujących kulek.

W systemie Ansys wystarczy zdefiniować prędkość obrotową wirujących elementów oraz wskazać oś obrotu dla modelowania siły odśrodkowej. Na rys. 4 przedstawiono wyniki badań symulacyjnych wpływu siły odśrodkowej tj. prędkości obrotowej pierścienia wewnętrznego  $n$ , na wartości maksymalne naprężeń w modelu łożyska (na pierścieniu zewnętrznym, wewnętrznym i w kulce) dla trzech wartości napięcia wstępnego 100 N, 500 N i 1000 N.

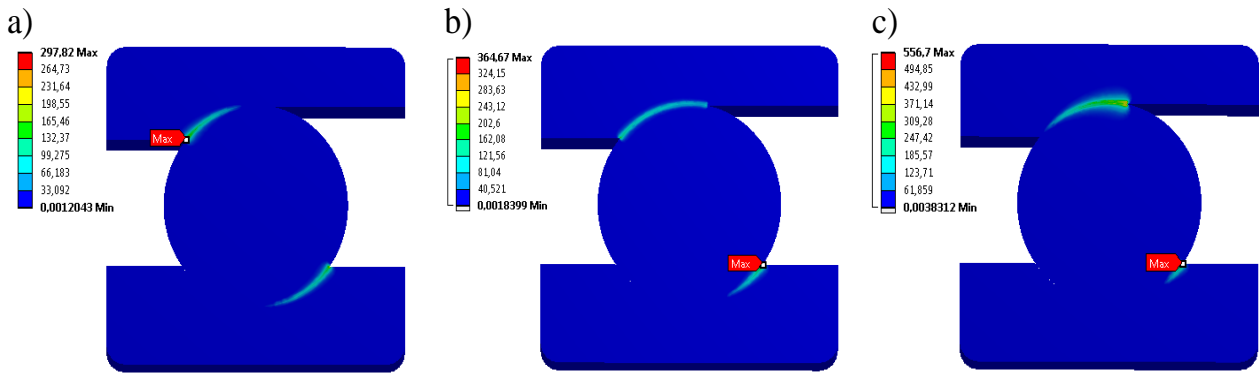


Rys. 4. Zależność wartości maksymalnych naprężeń kontaktowych (von Misesa) na pierścieniu zewnętrznym, wewnętrznym i w kulce od prędkości obrotowej, przy wartościach napięcia wstępnego: a) 100 N, b) 500 N i c) 1000 N

Fig. 4. Dependence of maximum contact stresses value on external, internal raceways and ball of rotational speed for pre-load: a) 100 N, b) 500 N and c) 1000 N

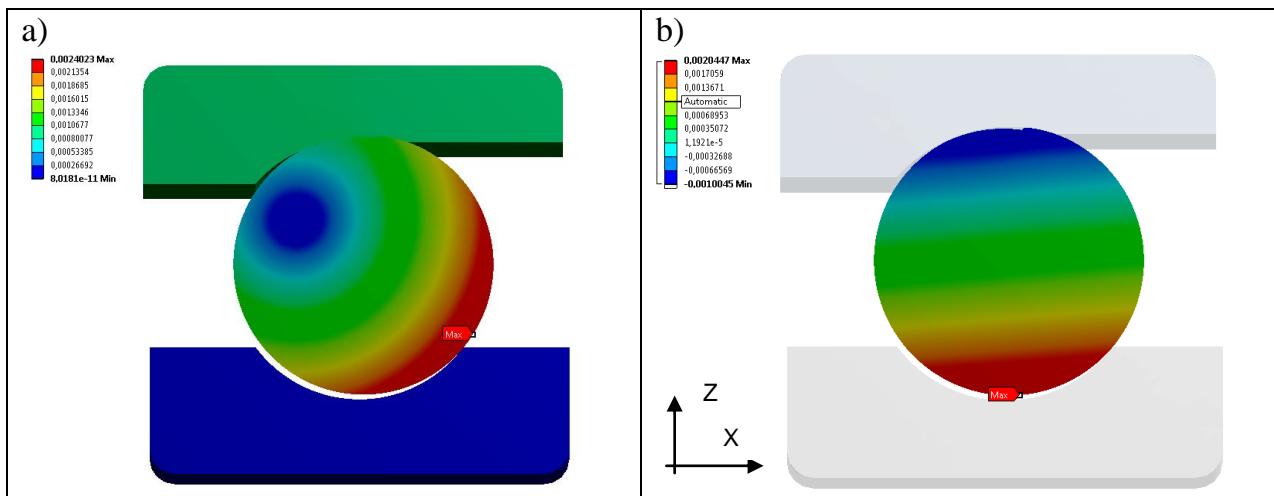
Natomiast na rys. 5 przedstawiono miejsca, w których występują maksymalne wartości naprężenia, dla napięcia wstępnego 500N i dla trzech wartości prędkości: 1000, 9.000 i 18.000 obr/min.

Wzrost prędkości powoduje, dla każdej wartości napięcia wstępnego, przyrost wartości maksymalnych naprężeń tylko na pierścieniu wewnętrznym. Natomiast na pierścieniu zewnętrznym i na kulce przebieg wartości naprężeń maksymalnych silnie zależy od wartości napięcia wstępnego. Należy także zauważyć, że miejsce występowania maksymalnych naprężeń w modelu łożyska zmienia się wraz ze wzrastającą prędkością oraz, że wzrost napięcia wstępnego przyczynia się do zmniejszania wartości maksymalnych naprężeń na pierścieniu zewnętrznym i na kulce w miarę wzrostu prędkości.



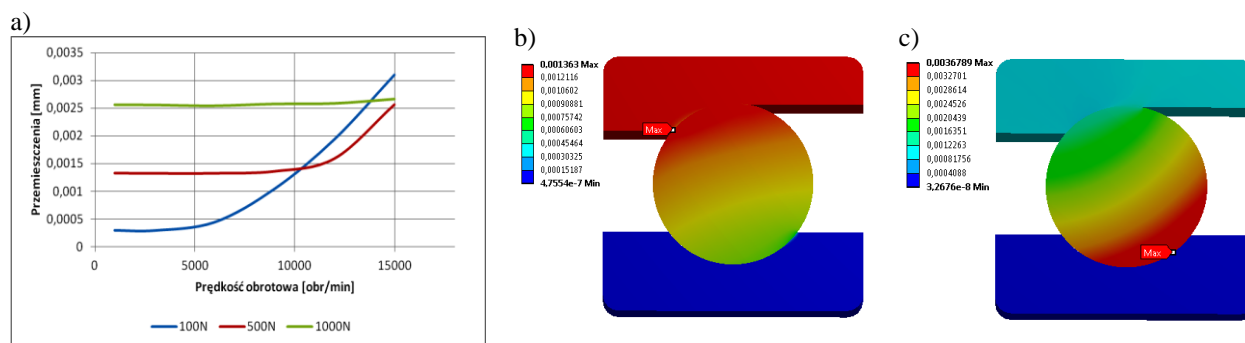
Rys. 5. Usytuowanie miejsc występowania maksymalnych wartości naprężeń przy wartościach prędkości obrotowej:  
 a) 1000 obr/min, b) 9.000 obr/min, c) 18.000 obr/min  
 Fig. 5. Location of maximum stresses value for rotational speed: a) 1000 rpm, b) 9.000 rpm, c) 18.000 rpm

Dla lepszej interpretacji zjawisk w łożysku skośnym, towarzyszących występowaniu siły odśrodkowej, przeprowadzono symulacje w hipotetycznych warunkach działania łożyska, tj. bez napięcia wstępnego. Na rys. 6. przedstawiono dwa przykłady przemieszczania się kulki, dla prędkości 12.000 obr/min, z zerowym napięciem wstępnym.



Rys. 6. Przesunięcia w modelu łożyska przy prędkości obrotowej 12.000 obr/min i zerowej wartości napięcia wstępnego: a) przesunięcia całkowite, b) przesunięcia w osi X  
 Fig. 6. Displacements in the bearing model for rotational speed 12.000 rpm and pre-load 0 N: a) full displacement, b) displacement in X direction

Wynika z niego, że siła odśrodkowa powoduje przemieszczanie się kulki przede wszystkim w kierunku osi X, stąd punkty występowania maksymalnych naprężeń (rys. 5), w miarę wzrostu prędkości, przesuwają się w kierunku od pierścienia zewnętrznego do wewnętrznego. Mapa przemieszczeń (w artykule pod pojęciem "przesunięcie" rozumie się przesunięcie kontaktowe, jako zbliżenie dwóch stykających się powierzchni) pozwala także na uzasadnienie malejących naprężeń maksymalnych (rys. 4c) na pierścieniu zewnętrznym, w miarę wzrostu prędkości obrotowej i wzrostu napięcia wstępnego.



Rys. 7. Zależność wartości maksymalnych przemieszczeń od prędkości obrotowej (a); graficzne obrazy rozkładu przemieszczeń przy wartości napięcia wstępnego 500 N: b) 9.000 obr/min, c) 18.000 obr/min

Fig. 7. Dependence of maximum displacements of rotational speed (a) and graphic presentation of displacement distribution for pre-load 500 N: b) 9,000 rpm, c) 18,000 rpm

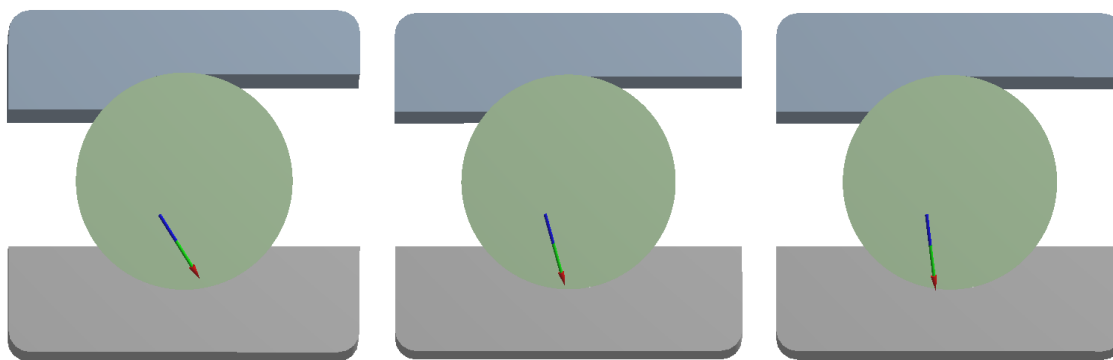
Interesujące są także wyniki przemieszczeń w modelu łożyska w funkcji prędkości obrotowej. Na rys. 7a przedstawiono zależność wartości maksymalnych przemieszczeń od prędkości obrotowej pierścienia wewnętrznego a na rys. 7b i c rozkład tych przemieszczeń dla prędkości 9.000 obr/min i 18.000 obr/min (przy napięciu wstępnym 500 N).

Wartości maksymalne przemieszczenia w zakresie prędkości do ok. 11.000 obr/min praktycznie nie zależą od prędkości. Wniosek dotyczy napięcia wstępnego powyżej 100 N. Natomiast, powyżej tej prędkości obserwuje się duży przyrost przemieszczeń wraz ze wzrostem prędkości. Wyjaśnieniem takiego stanu mogą być rys. 7b) i c), z których wynika, że dla dużych prędkości obrotowych maksymalne przemieszczenie lokuje się na pierścieniu wewnętrznym, podczas kiedy dla mniejszych prędkości maksimum przemieszczenia występowało na pierścieniu zewnętrznym. Tak więc "przesunięciu" się obszaru maksymalnego przemieszczenia z pierścienia zewnętrznego na wewnętrzny towarzyszy radykalny jego wzrost.

Jednym z głównych celów symulacji było zidentyfikowanie związków pomiędzy siłami kontaktowymi a prędkością obrotową i napięciem wstępnym łożyska. Znajomość sił kontaktowych pozwoli określić na drodze analitycznej opory ruchu w łożyskach, wywołane występowaniem sił odśrodkowych i napięcia wstępnego. Z kolei znajomość oporów ruchu w funkcji prędkości obrotowej pozwoli konstruktorowi węzła łożyskowego na oszacowanie ciepła, jakie zostanie wygenerowane w łożysku, a tym samym na ewentualne zaprojektowanie układu chłodzenia łożysk.

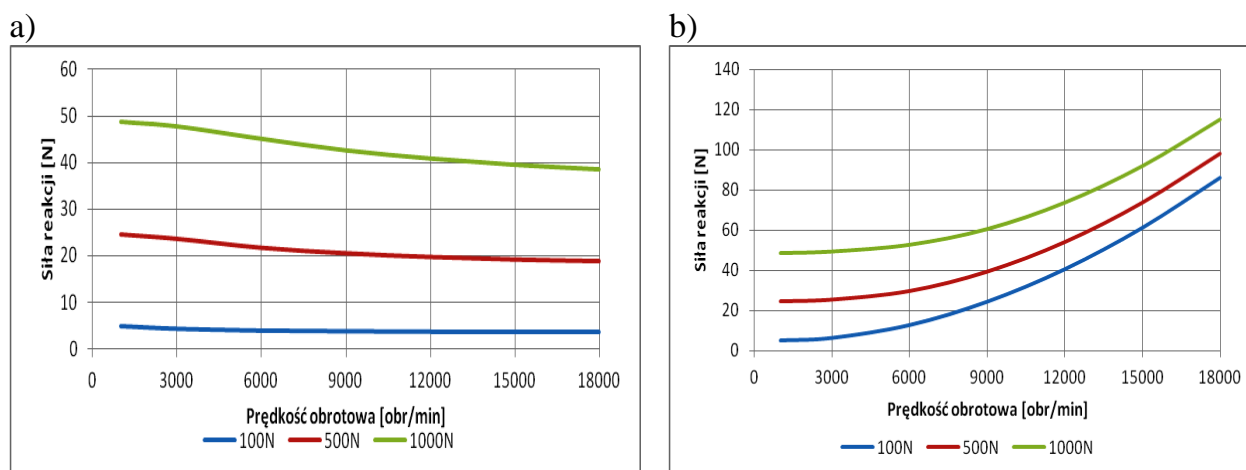
Program Ansys posiada opcję obliczania sił występujących w obszarze kontaktu dwóch ciał, w tym przypadku kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną i wewnętrzną łożyska. Na rys. 8 pokazano w sposób poglądowy usytuowanie sił kontaktowych w łożysku skośnym w obszarze kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną (zwroty sił przyjęto zgodnie z notacją stosowaną w programie Ansys).

Wraz ze wzrostem prędkości kąt działania siły na pierścieniu zewnętrznym maleje, co jest zgodne z informacjami podawanymi w literaturze [1]. Jest to kolejne potwierdzenie prawidłowości modelowania zjawisk kontaktowych w łożysku metodą elementów skończonych. Na rys. 9 przedstawiono ilościowe związki sił kontaktowych w funkcji prędkości obrotowej i napięcia wstępnego.



Rys. 8. Wizualizacja sił kontaktowych występujących pomiędzy bieżnią pierścienia zewnętrznego a kulką przy wartościach prędkości obrotowych: 1000, 9000 i 18000 obr/min i wartości napięcia wstępnego 500 N  
 Fig. 8. Visualization of contact force between outer raceway and ball for rotational speed: 100, 9000 and 18000 rpm, for pre-load 500 N

Rys. 9a potwierdza informacje z literatury [2],[4] o małym wpływie prędkości obrotowej na wartość siły kontaktowej pomiędzy kulką i pierścieniem wewnętrznym. Siła ta zależy praktycznie tylko od napięcia wstępnego. Natomiast rys. 9b pokazuje silną zależność siły w strefie kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną od prędkości obrotowej.

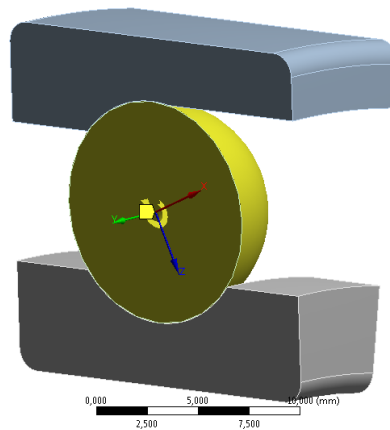


Rys. 9. Zależność sił kontaktowych od prędkości obrotowej dla pierścienia: a) wewnętrznego, b) zewnętrznego  
 Fig. 9. Dependence of contact force and rotational speed for raceway: a) inner, b) outer

Jak już wspomniano, istnieje możliwość przeprowadzenia badań symulacyjnych metodą elementów skończonych wpływu zjawiska żyroskopowego na naprężenia, przemieszczenia i siły kontaktowe w strefach kontaktowych. Nie można tego łączyć z równoczesną symulacją zjawisk wywołanych siłami odśrodkowymi. W ramach przeprowadzonych badań oceniono wielkości i rozkłady naprężeń, przemieszczeń i sił kontaktowych spowodowanych zjawiskiem żyroskopowym.

Punktem wyjścia do takich badań było zdefiniowanie wektora momentu żyroskopowego, tzn. jego położenia względem elementów łożyska (rys. 10) i jego wartości (modułu).





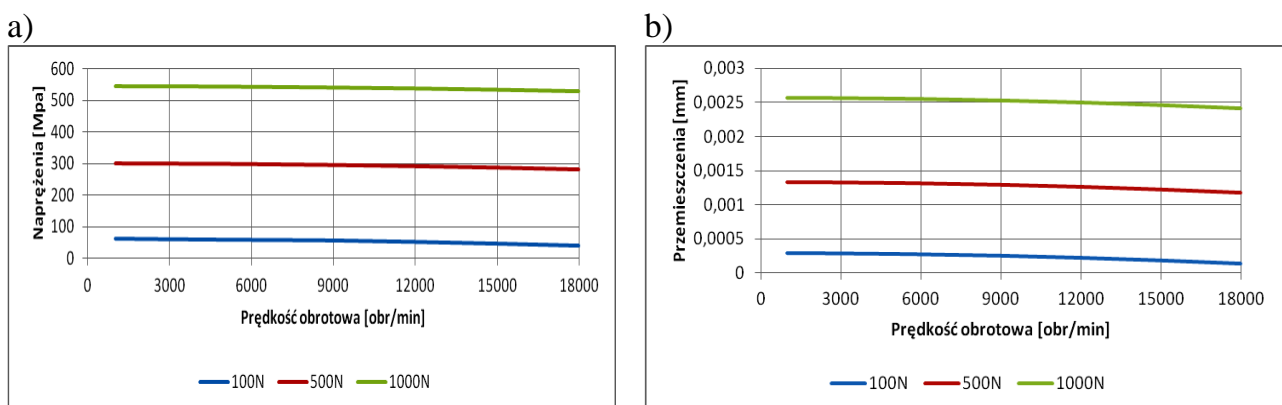
Rys. 10. Usytuowanie układu współrzędnych dla zdefiniowania położenia wektora momentu żyroskopowego  
 Fig. 10. Location of the co-ordinate system for determination of gyroscope moment vector

Wektor momentu żyroskopowego jest współosiowy z osią obrotu kulek toczących się po bieżni. Ta oś obrotu jest odchylona od osi łożyska o kąt  $\beta$  (rys. 2b). Przyjęto, że  $\beta = \alpha$  dla stanu nieobciążonego łożyska. Dla takiego kąta  $\beta$  przeprowadzono badania symulacyjne. Modelowanie zjawiska żyroskopowego w Ansysie jest podobne do modelowania siły odśrodkowej, tzn., trzeba zdefiniować prędkość obrotową wirujących kulek i zdefiniować oś obrotu. Prędkość obrotową wyznaczono z zależności:

$$n_B = -\frac{nd_m}{2D_k} \left( 1 - \frac{D_k^2 \cos^2 \alpha}{d_m^2} \right) \quad (2)$$

gdzie:  $n_B$  - prędkość wirowania kulki wokół osi odchylonej od osi łożyska o kąt  $\beta$  (patrz rys. 2b).

Na rys. 11 przedstawiono wyniki symulacji w postaci zależności naprężeń maksymalnych od prędkości obrotowej (rys. 11a) i przemieszczeń maksymalnych od prędkości obrotowej (rys. 11b).

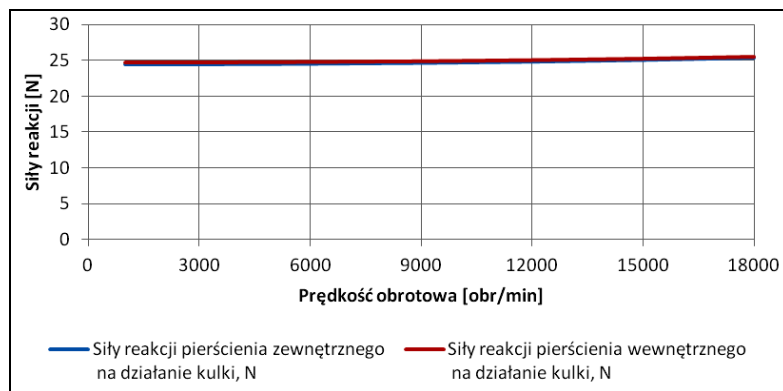


Rys. 11. Wpływ prędkości obrotowej na a) maksymalne wartości naprężeń kontaktowych (von Misesa) i b) na wartości maksymalne przemieszczenia przy wartościach napięcia wstępnego: 100 N, 500 N i 1000 N

Fig. 11. Influence of the rotational speed on: a) maximum value of contact stresses (von Mises) and b) maximum displacements for pre-load 100 N, 500 N and 1000 N

Wniosek, jaki płynie z przedstawionych na rys. 11 wyników badań jest jednoznaczny: w zakresie badanych prędkości obrotowych zarówno maksymalne wartości naprężeń kontaktowych, jak i maksymalne przemieszczenia nie zależą od prędkości obrotowej. Są one wyłącznie efektem napięcia wstępnego. Natomiast na rys. 12 przedstawiono wpływ prędkości obrotowej na siły kontaktowe, wywołane efektem żyroskopowym.

Efekt żyroskopowy praktycznie nie wpływa na siły kontaktowe i to zarówno w obszarze kontaktu kulki z pierścieniem zewnętrznym jak i wewnętrznym. Z doniesień literaturowych wiadomo, że efekt żyroskopowy uwidacznia się dopiero przy dużych prędkościach obrotowych, tj. 30.000 obr/min i więcej. Badania symulacyjne MES to potwierdzają.



Rys. 12. Wpływ prędkości obrotowej na siły kontaktowe przy wartości napięcia wstępnego 500 N

Fig. 13. Influence of rotational speed on contact force for pre-load 500 N

#### 4. WERYFIKACJA WYNIKÓW BADAŃ SYMULACYJNYCH

Dla oceny wiarygodności wyników symulacji, zwłaszcza ich wartości liczbowych dokonano porównania naprężeń i przemieszczeń kontaktowych wyznaczonych metodą elementów skończonych i wg analitycznych zależności wynikających z teorii Herta. W myśl tej teorii maksymalne wartości naprężeń kontaktowych w środku geometrycznym elipsy odkształcenia kontaktowego dla powierzchni kulistych można przedstawić następująco:

$$\sigma_{\max} = \frac{3Q}{\pi ab} \quad (3)$$

gdzie:  $a, b$  - mała i duża półoś elipsy,  $Q$  - siła normalna występująca w strefie kontaktowej.

W pracy [3] przytoczono pewną metodykę wyznaczania półosi elipsy, mianowicie:

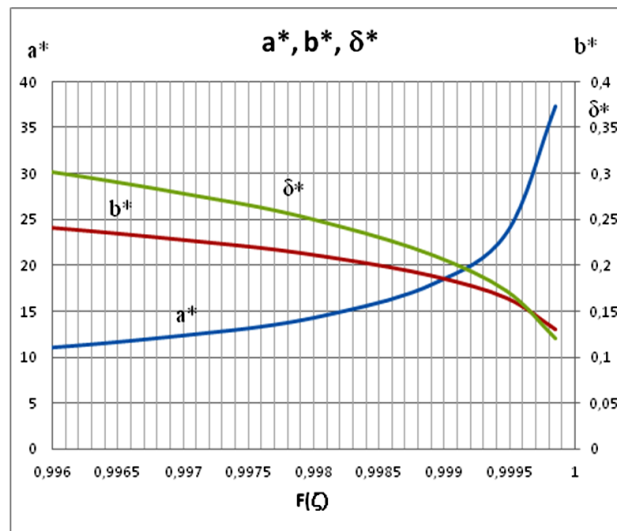
$$\begin{aligned} a &= 0,0236 \cdot 10^{-3} a^* \left( \frac{Q}{\rho} \right)^{1/3} \\ b &= 0,0236 \cdot 10^{-3} b^* \left( \frac{Q}{\rho} \right)^{1/3} \\ \delta &= 2,79 \cdot 10^{-7} \delta^* Q^{2/3} \rho^{1/3} \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:  $\delta$  - zbliżenie dwóch stykających się powierzchni (przemieszczenie kontaktowe),

$\zeta$  - zastępcza krzywizna dwóch stykających się powierzchni,

$a^*$ ,  $b^*$ ,  $\delta^*$  - stałe, zależne od krzywizn stykających się powierzchni.

Stałe  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $\delta^*$  są funkcją zastępczej różnicy krzywizn  $F(\zeta)$  i mogą być wyznaczone graficznie. Na rys. 13 przedstawiony został wykres wspomagający wyznaczenie stałych  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $\delta^*$  [3]. Dla badanego łożyska skośnego FAG 70B13, dla którego  $F(\zeta_i) = 0,9984$ ,  $F(\zeta_o) = 0,9980$ ,  $\zeta_i = 0,2082 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\zeta_o = 0,1588 \text{ mm}^{-1}$ , wartości stałych  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $\delta^*$  zamieszczono w tabeli 1.



Rys. 13. Wykres wspomagający wyznaczenie stałych  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $\delta^*$  [3]

Fig. 13. A chart supported calculation of constants  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $\delta^*$  [3]

Tabela 1. Stałe  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $\delta^*$  dla łożyska FAG 70B13  
Table 1. Constant values  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $\delta^*$  for FAG B7013 bearing

$F(\zeta)$	$a^*$	$b^*$	$\delta^*$
$F(\zeta_i) = 0,9984$	15,5	0,2	0,23
$F(\zeta_o) = 0,9980$	13,5	0,215	0,255

Uwzględniając w zależnościach (4) wartości stałych z tabeli 1 półosie elipsy i przemieszczenie kontaktowe można zapisać następująco:

Dla bieżni wewnętrznej

$$a = 0,617187 \cdot 10^{-3} Q^{1/3}$$

$$b = 0,007964 \cdot 10^{-3} Q^{1,3}$$

Dla bieżni zewnętrznej

$$a = 0,588341 \cdot 10^{-3} Q^{1/3}$$

$$b = 0,009370 \cdot 10^{-3} Q^{1,3}$$

(5)

Uwzględniając z kolei (5) w zależności (3), maksymalne wartości naprężenia kontaktowego można przedstawić, jako:

Dla bieżni wewnętrznej

$$\sigma_{\max} = 1,94 * 10^8 * Q^{1/3}$$

Dla bieżni zewnętrznej

$$\sigma_{\max} = 1,73 * 10^8 * Q^{1/3} \quad (6)$$

Natomiast przemieszczenia kontaktowe pomiędzy kulką a bieżniami łożyska można wyznaczyć, jako:

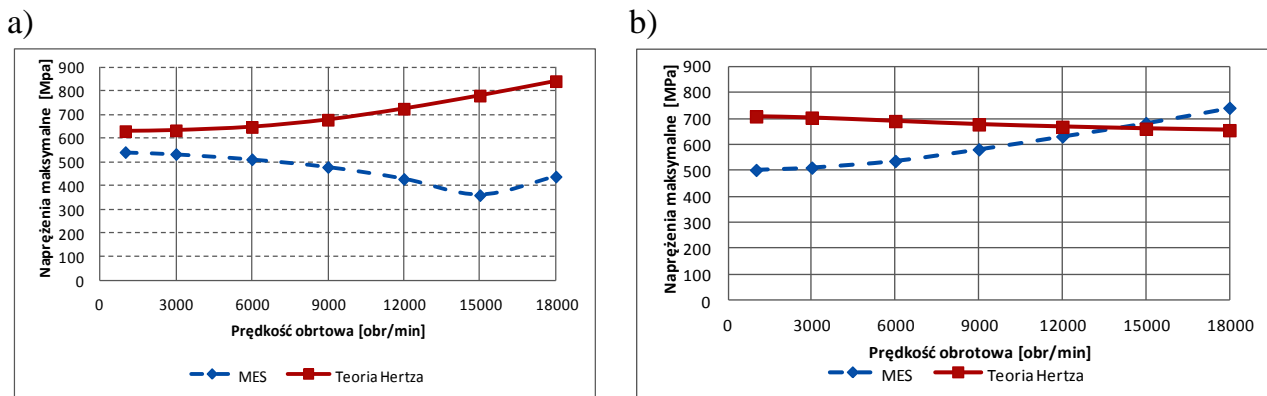
Dla bieżni wewnętrznej

$$\delta = 3,8 * 10^{-8} * Q^{2/3}$$

Dla bieżni zewnętrznej

$$\delta = 3,85 * 10^{-8} * Q^{2/3} \quad (7)$$

Wartości maksymalne naprężeń kontaktowych i przemieszczeń obliczono, posługując się zależnościami (6) i (7), wstawiając zamiast Q siły kontaktowe wyznaczone metodą elementów skończonych (rys. 9). Na rysunku 14a i 14b przedstawiono porównanie tak obliczonych wartości maksymalnych naprężeń i przemieszczeń z otrzymanymi z badań symulacyjnych MES.

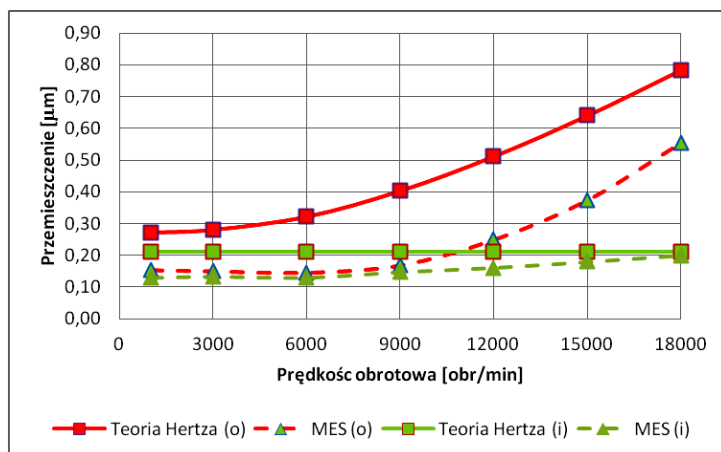


Rys. 14. Porównanie wyników z analizy MES i z teorii Hertza wpływu prędkości obrotowej (siły odśrodkowej) na maksymalne wartości naprężenia na a) bieżni zewnętrznej, b) bieżni wewnętrznej, przy wartości napięcia wstępnego 1000 N

Fig. 14. Comparison of FEM and Hertz theory results of influence the rotational speed (centrifugal force) on maximum value of stresses on: a) outer raceway, b) inner raceway for pre-load 1000 N

Analizując wyniki porównania maksymalnych wartości naprężeń (rys. 14) można mówić o podobnym poziomie wartości maksymalnych, jakkolwiek, naprężenia wyznaczone metodą MES są generalnie niższe niż wyznaczone analitycznie w oparciu o teorię Hertza. To, co różni ocenę wpływu prędkości obrotowej na maksymalne wartości naprężeń to rozbieżne tendencje tego wpływu. Na bieżni zewnętrznej obserwujemy wzrost naprężeń obliczonych wg teorii Hertza i ich spadek obliczonych wg MES. Z kolei na bieżni wewnętrznej tendencje są odwrotne, tzn. wzrostowi prędkości towarzyszy spadek naprężeń obliczonych ze wzorów Hertza i wzrost naprężeń obliczonych wg MES.

Na rys. 15 pokazano natomiast zestawienie wyników dotyczących przemieszczeń obliczonych, bazując na modelach analitycznych Hertza i otrzymanych z badań MES. Wnioski, jakie nasuwają się z porównania wyników analizy MES i z teorii Hertza wpływu prędkości obrotowej (siły odśrodkowej) na przemieszczenia kontaktowe pozwalają na stwierdzenie, że o ile tendencje są podobne, tzn. wzrostowi prędkości towarzyszy przyrost przemieszczenia w strefie kontaktowej to ilościowo one się różnią.



Rys. 15. Zestawienie wyników z analizy MES i z teorii Hertza wpływu prędkości obrotowej na przemieszczenia kontaktowe przy wartości napięcia wstępnego 500 N; (o) - pierścień zewnętrzny, (i) - pierścień wewnętrzny  
 Fig. 15. Setting up of FEM and Hertz theory results of influence the rotational speed on contact displacements for pre-load 500 N; (o) - outer ring, (i) - inner ring

Te różnice nie zależą istotnie od prędkości. Przemieszczenia wyznaczone metodą symulacji MES są mniejsze niż wynika to z teorii Hertza. Jednym z możliwych uzasadnień takiego stanu rzeczy jest takie, że wzory Hertza uwzględniają jedynie przemieszczenia w obszarach kontaktowych na kierunku normalnym do powierzchni kontaktowych, podczas kiedy obliczenia MES uwzględniają przemieszczenia kontaktowe na kierunku bliskim wyznaczonemu przez kąt  $\beta$ .

## 6. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono pewną metodykę modelowania zjawisk kontaktowych występujących pomiędzy kulką łożyskową a bieżniami łożyska tocznego metodą elementów skończonych. Dalekosiężnym celem tych badań było rozpoznanie związków funkcyjnych pomiędzy prędkością obrotową łożyska i napięciem wstępnym łożysk skośnych a takimi wielkościami mechanicznymi jak naprężenia kontaktowe, przemieszczenia kontaktowe czy siły kontaktowe. Znajomość tych wielkości mechanicznych ma umożliwić konstruktorowi szybkoobrotowych węzłów łożyskowych wyznaczenie oporów ruchu łożyska, a tym samym i ilości ciepła, jakie w łożysku powstaje.

Dokonano także porównania wyników badań symulacyjnych MES z wynikami badań analitycznych wg teorii Hertza. Celem tego porównania była ocena wiarygodności wartości liczbowych wyników uzyskanych z badań symulacyjnych MES. Stwierdzono, dobre podobieństwo wyników ilościowych, chociaż wskazano także na wątpliwości wynikające z rozbieżnych tendencji wpływu prędkości obrotowej na maksymalne naprężenia i przemieszczenia kontaktowe.

Ogólna ocena przeprowadzonych badań jest pozytywna, tzn. badania symulacyjne MES mogą stanowić alternatywę do badań analitycznych bazujący na teorii Hertza i co więcej, pozwalają w pewnych przypadkach na wyjaśnienie niektórych wyników badań, które na drodze analitycznej trudno jest wytłumaczyć.

## LITERATURA

- [1] ANTOINE F., ABBON G., MOLINAN A., 2005, *A New Proposal for Explicit Angle Calculation in Angular Contact Ball Bearing*, Journal of Mechanical Design, 128/2, 468-47.
- [2] CHEN J.S., HWANG Y.W., 2006, *Centrifugal force induced dynamics of a motorized high-speed spindle*, Int J Adv Manuf Technol., 30, 10-19.
- [3] HARRIS T.A., KOTZALAS M.N., 2007, *Rolling Bearing Analysis, Essential Concepts of Bearing Technology*, Taylor&Francis Group, New York, 371.
- [4] JEDRZEJEWSKI J., KWASNY W., 2010, *Modelling of angular contact ball bearings and axial displacements for high-speed spindle*, CIRP Annals - Manufacturing Technology 59, 377-382.
- [5] GATYS R., 2016, *Modelowanie zjawisk kontaktowych w łożysku skośnym metodą elementów skończonych*, Praca dyplomowa, Politechnika Śląska, Gliwice.
- [6] MUSIAŁ J., STYP-REKOWSKI M., 1999, *Analityczno-eksperymentalny sposób określania współczynnika oporów ruchu przy tarciu tocznym*. Materiały konferencyjne "Problemy niekonwencjonalnych układów łożyskowych", Łódź, 59-65.
- [7] Strona producenta SKF Polska: <http://www.skf.com/pl>
- [8] Strona producenta oprogramowania ANSYS: <http://www.ansys.com>

SIMULATION RESEARCH OF ROTATIONAL SPEED INFLUENCE ON CONTACT FORCE  
IN ANGULAR BEARING

The paper presents results of contact phenomena modeling in angular bearing using Finite Element Method. The main goal of the modeling was identification of relationship between contact forces and rotational speed and preload of the bearing. Particularly the influence of centrifugal force and gyroscopic moment of rotated balls on normal loads between raceways of bearing and balls was shown. The research was done for a chosen angular bearing. Initially results of analytical research using Hertz theory was presented too. It made possible to compare results of FEM to analytical research and formulated conclusion about authenticity of numerical values of FEM results.

Keywords: *contact phenomena, modeling, ball bearing, stiffness, FEM*