

Jarosław OPARA, Andrzej WROŻYNA

Instytut Metalurgii Żelaza

ZASTOSOWANIE METODY AUTOMATÓW KOMÓRKOWYCH DO OPRACOWANIA CYFROWEJ REPREZENTACJI WYBRANYCH CECH MIKROSTRUKTURY W OPARCIU O OBRAZY BINARNE JEJ SKŁADNIKÓW

W ramach pracy stworzono program komputerowy, w którym zaimplementowano dwuwymiarowy automat komórkowy wraz z autorskim algorytmem do przetwarzania obrazów binarnych rzeczywistej mikrostruktury na jej cyfrową reprezentację. Szczegółowo opisano schemat dyskretyzacji badanego obszaru mikrostruktury. Zaprezentowano możliwości opracowanego rozwiązania.

Słowa kluczowe: cyfrowa reprezentacja materiału, automaty komórkowe, mikrostruktura, stereologia

APPLICATION OF CELLULAR AUTOMATA METHOD TO DEVELOP A DIGITAL REPRESENTATION OF SELECTED FEATURES OF THE MICROSTRUCTURE BASED ON THE BINARY IMAGES OF ITS COMPONENTS

A computer program was built in this work, where a two-dimensional cellular automaton is implemented and including authors' algorithm for conversion of binary images of the real microstructure to the digital microstructure representation. Discretization scheme of the investigated microstructure is explained in detail. The possibilities of the developed solution were presented.

Keywords: digital material representation, cellular automata, microstructure, stereology

1. WSTĘP

W literaturze technicznej z ostatnich lat można znaleźć wiele opracowań dotyczących tematyki modelowania przemian fazowych w mikro- bądź mezoskali za pomocą dwu- lub trójwymiarowych dyskretnych modeli, które pozwalają na wizualizację i śledzenie powstawania oraz wzrostu nowych faz w mikrostrukturze. Większość tego rodzaju modeli bazuje na numerycznych rozwiązaniach, które umożliwiają dyskretyzację mikroobszaru poprzez nałożenie siatki węzłów (komórek), są to m.in.: metoda Monte Carlo [1, 2] (ang. *Monte Carlo method*, MC), metoda elementów skończonych [3, 4] (ang. *Finite Element Method*, FEM), metoda pola faz [5, 6] (ang. *Phase Field Method*, PFM) czy też metoda automatów komórkowych [7–9] (ang. *Cellular Automata method*, CA). Symulowanie przemian fazowych za pomocą tych modeli wymaga zastosowania odpowiednich warunków początkowych. Aby móc rozpocząć symulację w warunkach jak najlepiej odzwierciedlających rzeczywistość, rodzi się potrzeba wprowadzenia odpowiedniego rozwiązania w ustaleniu rozkładu ziaren oraz ich cech morfologicznych w sztucznej siatce, która imituje prawdziwą mikrostrukturę.

W rozwiązaniu postawionego problemu z pomocą przychodzi metoda cyfrowej reprezentacji materiału (ang. *Digital Material Representation*, DMR). DMR

obejmuje co najmniej kilka różnych metod do numerycznego generowania i/lub odtwarzania obrazu mikrostruktury na dyskretyzowanym obszarze. W dalszej części artykułu pokrótce zostaną opisane stosowane metody do generowania cyfrowej reprezentacji materiału oraz propozycja rozwiązania zastosowana przez Autorów niniejszej pracy.

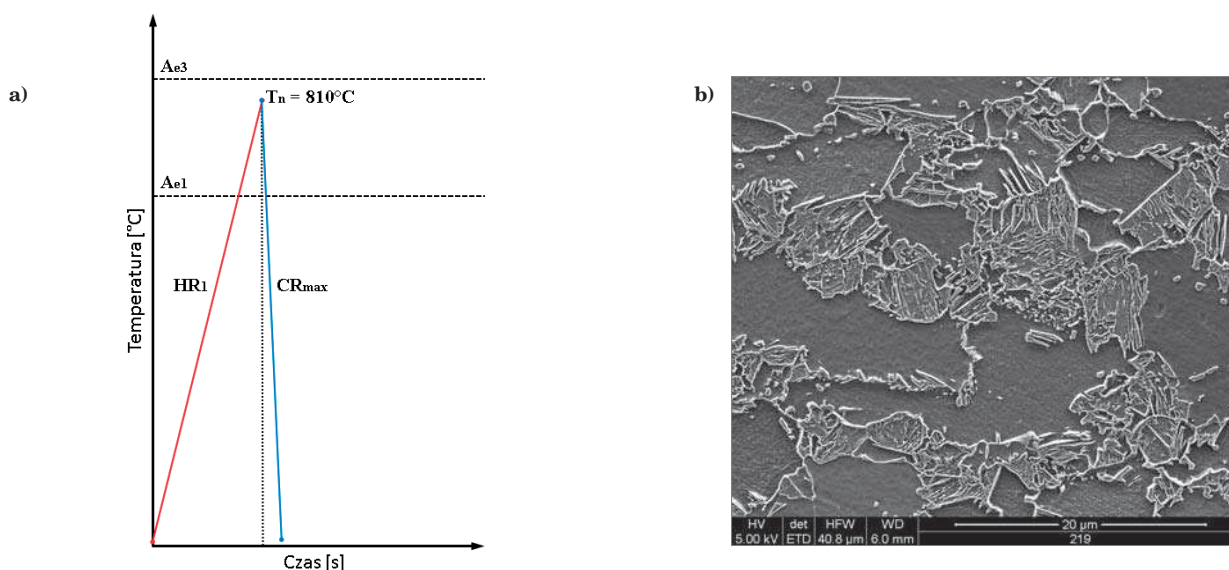
2. MATERIAŁ DO BADAŃ I EKSPERYMENT

W przyjętym schemacie cyfrowej reprezentacji materiału wymagane są rzeczywiste obrazy mikrostruktury. W tym celu wykorzystano wyniki analizy jakościowej struktury próbek ze stali DP o składzie chemicznym podanym w tabeli 1. Materiał należy do grupy zaawansowanych stali trzeciej generacji, które są przedmiotem badań autorów niniejszej pracy, a wyniki z opracowanego rozwiązania DMR zostaną wykorzystane jako dane wejściowe w symulacjach numerycznych przemian fazowych zachodzących podczas wytwarzania stali DP. Charakterystyczne dla wyselekcjonowanego wytopu jest to, iż stosując odpowiedni cykl termiczny nagrzewania, wytrzymania w ustalonej temperaturze i kontrolowanego chłodzenia uzyskuje się stal zawiera-

Tabela 1. Skład chemiczny stali (% wag.)

Table 1. Chemical composition of the steel (wt%)

C	Mn	Si	Cr	Mo	Ni	Cu	Al	V	Nb	Ti	N
0,13	1,50	0,10	0,23	0,005	0,02	0,02	0,026	0,03	0,001	0,001	0,0004



Rys. 1. Schemat cyklu cieplnego (a) oraz obraz SEM mikrostruktury próbki po tym cyklu (b)

Fig. 1. Scheme of the thermal cycle (a) and SEM image of the sample microstructure after this cycle (b)

jąca ~75÷80% ferrytu, zaś resztę stanowi mieszanina bainitu i martenzytu.

W eksperymencie, przeprowadzonym na dylatometrze Bähr 805A/D, wykorzystano próbkę wyciętą z cienkiej blachy po walcowaniu na zimno o strukturze ferrytyczno-perlitycznej. Próbka w postaci prostopadła miała nietypowe wymiary jak na standard badań dylatometrycznych, tj. ~7 mm długości, grubość i szerokość ~1 mm. Do pozyskania mikrostruktury początkowej, jako danej wejściowej do obróbki w algorytmie CA, próbkę poddano cyklowi termicznemu przedstawionemu na rysunku 1a. Próbka była nagrzewana z szybkością 3°C/s do temperatury $T_n = 810^\circ\text{C}$, mieszczącej się w zakresie międzykrytycznym ($A_{e1} - A_{e3}$), a następnie schłodzona z maksymalną szybkością (ok. 288°C/s) w celu zamrożenia mikrostruktury, w efekcie czego otrzymano strukturę zawierającą około 63% ferrytu, zaś resztę stanowi mieszanina bainitu i martenzytu. Przyjęto, że wyspy bainityczno-martenzytyczne stanowią projekcję austenitu ukształtowanego podczas wyżarzania w zakresie międzykrytycznym. W kolejnym kroku zastosowano standardową procedurę przygotowania próbki do analizy z wykorzystaniem skaningowego mikroskopu elektronowego (SEM). Następnie wykonano zdjęcie mikrostruktury wybranego obszaru próbki (Rys. 1b), które jest kluczową informacją w opracowaniu rozwiązania DMR.

W dalszej części pracy opisano procedury wykorzystujące uzyskany obraz mikrostruktury (Rys. 1b) do cyfrowej reprezentacji materiału.

3. CYFROWA REPREZENTACJA MATERIAŁU

Idea cyfrowej reprezentacji materiału jest intensywnie rozwijana od kilku lat [10–12]. Zastosowanie DMR

polega na zbudowaniu sieci 2D lub 3D, która jawnie będzie reprezentowała i definiowała cyfrowo mikrostrukturę z jej właściwościami, tj. ziarnami, morfologią, różnorodnymi fazami, wtrąceniami niemetalicznymi, orientacją ziaren, pęknięciami itp. Im bardziej dokładne odzwierciedlenie rzeczywistej mikrostruktury za pomocą schematu DMR, tym lepiej założenia początkowe zastosowane w numerycznym modelu oddają realne warunki procesów zachodzących podczas wytwarzania bądź przetwarzania materiałów polikrystalicznych. Z tego powodu wielu specjalistów z obszaru materiałoznawstwa i modelowania skupia swą uwagę na opracowywaniu coraz lepszych i efektywniejszych metod do generowania cyfrowej reprezentacji mikrostruktury.

Generalnie metody mające na celu opracowywanie cyfrowej reprezentacji materiału można sklasyfikować w oparciu o dwie koncepcje, tj. bezpośredniego odtwarzania rzeczywistej mikrostruktury za pomocą różnorodnych, złożonych algorytmów do analizy obrazu oraz zastosowania mniej skomplikowanych algorytmów do sztucznego generowania ziaren, które statystycznie reprezentują stan rzeczywistej mikrostruktury.

Do pierwszej grupy należą metody bazujące na wynikach uzyskanych za pomocą różnych metod badawczych mikrostruktury, np. konwencjonalnej mikroskopii świetlnej, jak w pracach [13, 14], analizy na skaningowym mikroskopie elektronowym (SEM) i detektorze EBSD (dyfrakcja elektronów wstecznie rozproszonych) [15]. Podobne rozwiązanie przyjęli autorzy publikacji [10] wykorzystując wyżej wymienione metody oraz rezultaty uzyskane za pomocą elektronowego mikroskopu transmisyjnego (TEM), a także spektrometru dyspersji energii (EDS). Dokładniejszy i obszerniejszy opis wymienionych metod oraz aktualnie najnowszych rozwiązań można znaleźć w publikacji Madeja i in. [4].

Przykładem zastosowania drugiej koncepcji, według której ziarna są stochastycznie rozproszone w prze-

strzeni modelu i statystycznie są zgodne z rzeczywistymi obrazami mikrostruktur, są metody tessellacji Voronoi oraz automatów komórkowych. Szerzej opisano je w opracowaniu Madeja [12].

Należy nadmienić, że każda z wymienionych koncepcji ma swoje wady i zalety. Metody oparte na bezpośrednim odtwarzaniu rzeczywistej mikrostruktury za pomocą złożonych algorytmów analizy obrazu do pewnego stopnia dostarczają jakościowo i ilościowo dokładny wynik, natomiast wymagają wielu kosztownych i czasochłonnych powtórzeń eksperymentów oraz analiz metalograficznych. Metody bazujące na algorytmach do sztucznego generowania ziaren umożliwiają szybkie tworzenie różnorodnych mikrostruktur, statystycznie odpowiadającym rzeczywistemu stanowi materiału w skali mikro, aczkolwiek w pewien uproszczony sposób nie oddający wszystkich cech morfologicznych charakteryzujących rzeczywiste mikrostruktury.

W niniejszej pracy zastosowano metodę automatów komórkowych do opracowania cyfrowej reprezentacji materiału. W przyjętej metodyce metoda CA nie posłużyła do sztucznego generowania mikrostruktury, a została zaadoptowana w oryginalnym algorytmie do cyfrowego odtworzenia rzeczywistego obrazu mikrostruktury w siatce automatu komórkowego z zastosowaniem odpowiednich reguł przejścia. Na podstawie wyników obrazów binarnych uzyskanych w programie Met-Ilo [16] dokonano ich konwersji na obrazy DMR z jawną definicją wybranych właściwości mikrostruktury w każdej komórce automatu, między innymi: identyfikacją poszczególnych ziaren, stanem fazy dla każdego ziarna, identyfikacją granic międzyfazowych, a także stężeniem węgla w komórce – zgodnie z jej przynależnością do danej fazy oraz warunkami brzegowymi przyjętymi przy założonej temperaturze. Autorskie rozwiązanie szczegółowo opisano w następnym rozdziale.

4. ALGORYTM CA DO CYFROWEJ REPREZENTACJI MATERIAŁU

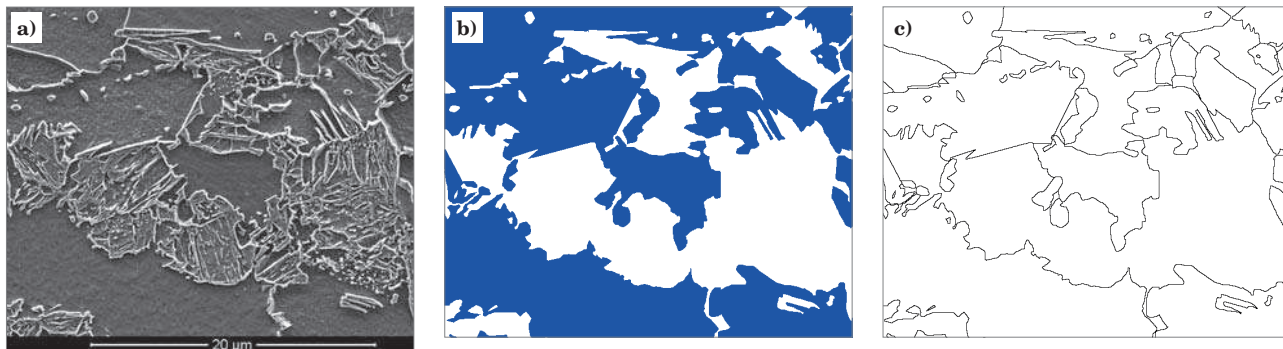
Na rysunku 2 zaprezentowano kolejne etapy binaryzacji wyjściowego obrazu mikrostruktury za pomocą programu Met-Ilo. Rzeczywisty obraz mikrostruktury (Rys. 2a) został poddany manualnej obróbce, tzn. dokonano ręcznej rekonstrukcji granic ziaren poprzez obrysowanie i zaznaczenie kolorem niebieskim zia-

ren ferrytu (Rys. 2b). Następnie za pomocą programu Met-Ilo zostały ujawnione granice pomiędzy ziarnami (Rys. 2c).

Obrazy zamieszczone na rys. 2b i 2c zostały wykorzystane jako dane wejściowe w procedurach algorytmu opartego na dwuwymiarowym automacie komórkowym do cyfrowej reprezentacji mikrostruktury (CA-DMR).

Algorytm bazujący na metodzie CA złożony jest z następujących etapów:

1. Wczytanie binarnych obrazów 2b i 2c do autorskiego programu z modelem CA-DMR i scalenie ich w jeden (Rys. 3a) – jest to struktura wejściowa do dalszego etapu przetwarzania obrazu w algorytmie CA-DMR.
2. Ustalenie rozmiarów komórki i siatki CA (Rys. 4):
 - a) odczytanie z oryginalnego obrazu SEM (Rys. 2a) długości markera podanej w mikrometrach oraz w pikselach, tj. dla aktualnego przypadku 20 μm odpowiada 500 px.
 - b) określenie pola powierzchni pikseli, które pokrywa pojedyncza komórka CA na binarnym obrazie (Rys. 3a) z etapu 1. Na tym etapie informacja o liczbie pikseli na obrazie wyjściowym wraz z niniejszą definicją są decydujące i implikują dokładność odtworzenia rzeczywistego obrazu na siatce CA.
 - c) wyznaczenie fizycznej długości pojedynczego boku komórki CA w mikrometrach na podstawie proporcji oraz danych uzyskanych z dwóch powyższych podpunktów 2a i 2b.
 - d) obliczenie rozmiarów siatki CA na podstawie rozmiaru obrazu w pikselach z punktu 1 (Rys. 3a) oraz informacji z punktu 2b.
3. Konwersja binarnego obrazu z punktu 1 (Rys. 3a) na siatkę CA, bazując na danych wyznaczonych w etapie 2, składa się z kilku kroków:
 - a) inicjalizacja siatki CA o zadanych wymiarach z punktu 2d.
 - b) wczytanie obrazu z punktu 1 (Rys. 3a) i przeskalowanie na siatkę CA wg warunków ustalonych w etapie 2.
 - c) zróżnicowanie poszczególnych ziaren i przydzielenie do faz austenitu (biały) lub ferrytu (niebieski) na podstawie oznaczonego koloru oraz granic (czarny) występujących między nimi (Rys. 3a).
 - d) nadanie kolorów kolejnym ziarnom ferrytu celem ich rozróżnienia.
 - e) skorygowanie obrazu z cyfrową reprezentacją materiału (Rys. 3b) poprzez usunięcie wtrąceń (i bar-



Rys. 2. Obraz SEM rzeczywistej mikrostruktury wyjściowej (a) oraz obrazy binarne ziarn ferrytu (b) i granic (c) wyznaczone za pomocą programu Met-Ilo

Fig. 2. SEM image of the output microstructure (a) and binary images of ferrite grains (b) as well as boundaries (c) determined using Met-Ilo program



Rys. 3. Etapy przetwarzania binarnych obrazów mikrostruktury w algorytmie CA-DMR: (a) scalone obrazy z rys. 2b i 2c, (b) obraz binarny po przetworzeniu na siatkę CA z rozróżnieniem na poszczególne ziarna ferrytu oraz austenitu (kolor biały), (c) obraz jak na rys. 3b z usuniętymi obiektami poniżej założonej wielkości

Fig. 3. Stages of the processing binary images of the microstructure in the CA-DMR algorithm: (a) combined images of Fig. 2b and 2c, (b) binary image after processing in the CA grid distinguishing between the individual grains of ferrite and austenite (white color), (c) image as shown in Fig. 3b with removed objects below the assumed value

dzo małych ziaren), zakładając minimalną średnicę, dla której można uznać, że wielkość ta jest poniżej błędu statystycznego.

Po wykonaniu procedur opisanych wg powyższego algorytmu, w zbudowanym autorskim programie komputerowym, otrzymano obraz z cyfrową reprezentacją mikrostruktury (Rys. 3c). W odrębnym opracowaniu Autorów posłuży on jako reprezentacja wejściowej mikrostruktury w dyskretnym modelu – opartym na metodzie automatów komórkowych – do numerycznych symulacji przemiany fazowej austenitu w ferryt, która zachodzi podczas chłodzenia odzwierciedlającego proces wytwarzania stali DP.

W celu umożliwienia szybkiego porównywania poszczególnych wyników symulacji, a także ilościowej weryfikacji wybranych parametrów stereologicznych z danymi rzeczywistymi, w programie komputerowym do cyfrowej reprezentacji materiału wprowadzono kilka dodatkowych sposobów przedstawiania wyników. Jednym z nich jest możliwość zaprezentowania informacji o rozkładzie wielkości ziaren w badanym obszarze (Rys. 5a). Kolejną opcją to przedstawienie wielkości średnic zastępczych poszczególnych ziaren w formie wykresu słupkowego (Rys. 5b).

Na rysunku 5c wyszczególniono (czerwona ramka) fragment obrazu z cyfrową reprezentacją mikrostruktury celem przybliżenia idei dyskretyzacji mikrostruktury, czyli nałożenia siatki komórek automatu komórkowego na analizowany obszar, co w powiększeniu prezentuje rysunek 5d. Zgodnie z formalizmem metody automatów komórkowych przedstawiona siatka CA (Rys. 5d) zbudowana jest z regularnie ułożonych komórek o identycznym wymiarze i kształcie, w tym przypadku kwadratów. Komórki o kolorze białym przydzielone są do ziaren austenitu, kolor czarny definiuje komórki należące do granic między ziarnami różnych faz, natomiast pozostałe kolory określają ziarna ferrytu o zróżnicowanej orientacji krystalograficznej. W zastosowanym schemacie dyskretyzacji na podstawie założeń z algorytmu (patrz punktu 3c) przyjęto, że długość boku pojedynczej komórki wynosi $0,08 \mu\text{m}$. Zatem jedna komórka CA pokrywa obszar $0,0064 \mu\text{m}^2$ rzeczywistej mikrostruktury. Takie podejście pozwala z dosyć dużą dokładnością odzwierciedlić morfologię rzeczywistej mikrostruktury na sztucznym obrazie (tj. cyfrowej reprezentacji materiału), jaki generuje siatka CA. Zbudowana aplikacja umożliwia zapis wynikowej mikrostruktury DMR w formie pliku tekstowego, co daje możliwość jawnego importu danych numerycznych definiujących mikrostrukturę. Sprawia to, iż zaproponowane rozwiązanie może znaleźć szerokie zastosowanie przy ustalaniu warunków początkowych w dwuwymiarowych modelach dyskretnych w mikro skali.

Micro 2D - CA grid settings

Default

Dimensions Options

Proportions of microns to pixels (Marker - from microstructure picture):
 [μm] microns => pixels [px]
 => 1 μm = 25.00 px => 1 μm ~ 25 px
 => 1 px = 0.04 μm

Size of a picture with the microstructure
 1024 x 884 px
 40.96 x 35.36 μm

Length of the Cell's side
 based on amount px in LCA: Number of pixels in LCA =
 based on fixed LCA: L_{CA} = [μm]
 based on size of the CA grid: Number of cells in X axis =
 L_{CA} = 0.08 μm => Physical surface area = 0.0064 μm²
 L_{CApx} = 2 px

Dimensions of the CA grid
 Number of cells in X axis = 512 => 40.96 μm
 Number of cells in Y axis = 442 => 35.36 μm
 Number of cells in the CA grid = 226304 cells
 Physical space of the CA grid = 1 448.3456 μm²

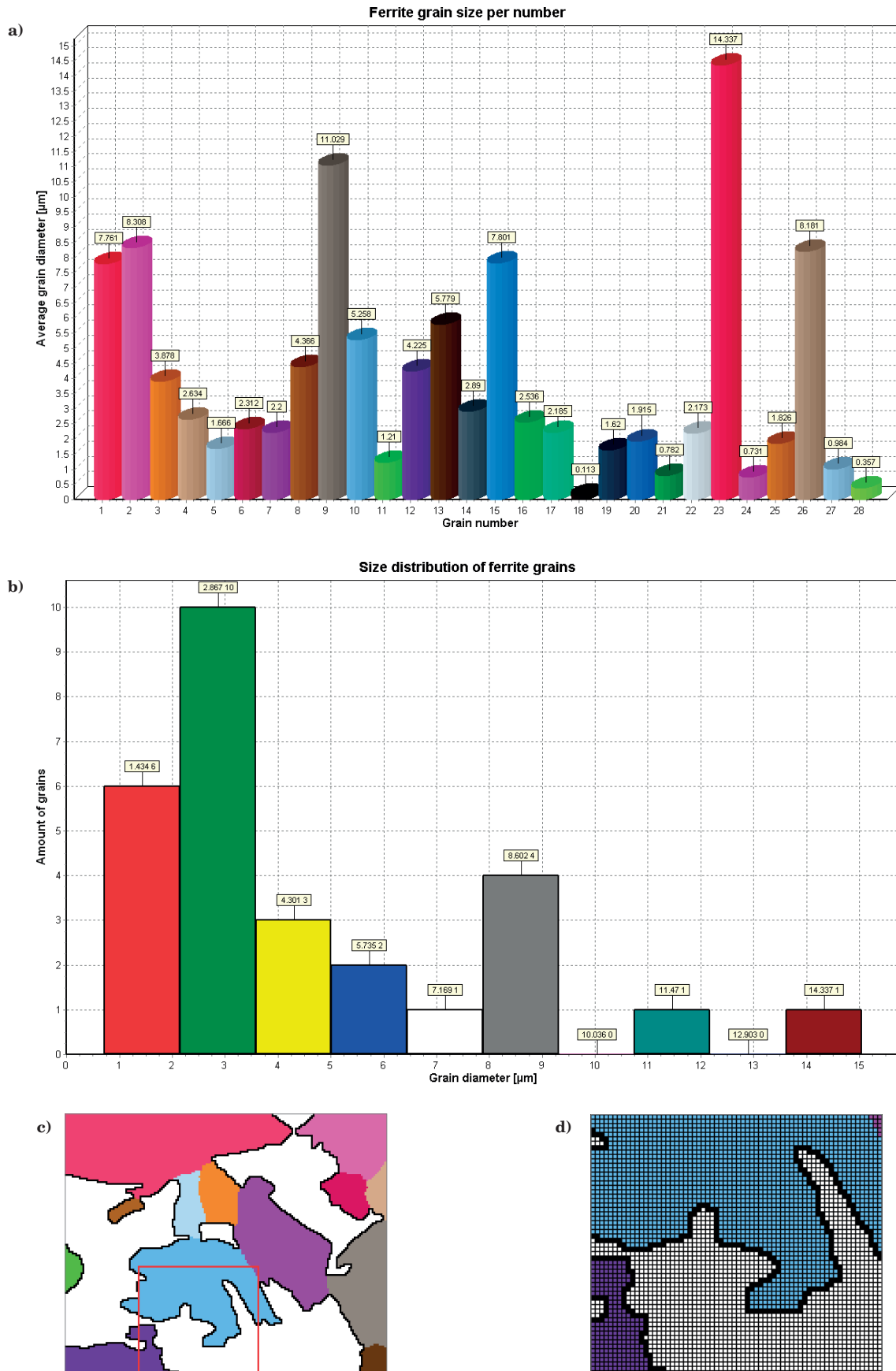
Start Cancel

Rys. 4. Formatka z programu przedstawiająca dane do wyznaczenia rozmiaru komórki i siatki CA

Fig. 4. The form from the program presenting data to determine the size of the cell and the CA grid

5. PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano własne rozwiązanie cyfrowej reprezentacji mikrostruktury wykorzystując



Rys. 5. Wyniki z programu CA-DMR: (a) wykres z rozkładem wielkości ziaren, (b) wykres słupkowy z wartościami średnic zastępczych poszczególnych ziaren, (c) cyfrowa reprezentacja mikrostruktury z wyróżnionym obszarem, (d) powiększony obraz wyszczególnionego obszaru z naniesioną siatką CA

Fig. 5. Results from CA-DMR program: (a) chart with grain size redistribution, (b) bar graph with the values of equivalent diameters for individual grains, (c) digital microstructure representation with highlighted area, (d) magnified image of the specified area with the applied CA grid

otrzymane za pomocą programu Met-Ilo binarne obrazy wybranych składników mikrostruktury tworzy polikrystalicznych. Jednym z ważniejszych aspektów przedstawionego rozwiązania jest opracowany program komputerowy, w którym zaimplementowano autorski algorytm do konwersji binarnych obrazów za pomocą dwuwymiarowego automatu komórkowego.

Przy założonej dokładności urządzenia rejestrującego obraz mikrostruktury oraz jej rozmiarach wyjściowych można stwierdzić, że poprzez zastosowanie stosunkowo niewielkiej długości boku komórki CA (0,08 μm), w porównaniu ze stosowanymi do tej pory schematami DMR, opracowany algorytm zapewnia dokładniejsze rozwiązanie pod względem odzwierciedlenia morfologii rzeczywistej mikrostruktury. Jednak podwyższona precyzja odbywa się kosztem zwiększenia złożoności obliczeniowej algorytmu. Dyskretyzacja założonego obszaru wymaga zastosowania znacznie większej siatki CA, tzn. o dużej ilości komórek, co zwiększa złożoność

pamięciową programu. Natomiast w perspektywie symulacji przemian fazowych za pomocą takiej siatki CA podniesiona jest złożoność czasowa.

Zbudowane oprogramowanie umożliwia prezentację poszczególnych etapów z działania algorytmu do przetwarzania rzeczywistej mikrostruktury na obraz DMR dla dowolnych rozdzielczości i rozmiarów mikrografii. Dodatkowo możliwa jest demonstracja wyników w formie wykresów: słupkowego z wielkościami ziaren oraz histogramu. Opcje te będą wykorzystywane do bezpośredniego porównywania wartości wybranych parametrów stereologicznych między wynikami symulacji rozwoju mikrostruktury oraz obrazami struktur rzeczywistych. Umożliwi to weryfikację stosowanych modeli przemian fazowych. Dane z cyfrową reprezentacją mikrostruktury z powodzeniem mogą być wykorzystane w numerycznych symulacjach przemian fazowych za pomocą dwuwymiarowych modeli dyskretnych w mikro skali.

LITERATURA

1. Tong M., Li D. i Li Y.: Modeling the austenite-ferrite diffusive transformation during continuous cooling on a mesoscale using Monte Carlo method. *Acta Materialia*. 2004, Tom 52, s. 1155–1162.
2. Tong M., Li D. i Li Y.: A q-state Potts model-based Monte Carlo method used to model the isothermal austenite-ferrite transformation under non-equilibrium interface condition. *Acta Materialia*. 2005, Tom 53, s. 1485–1497.
3. Lewis A.C., Jordan K.A. i Geltmacher A.B.: Determination of Critical Microstructural Features in an Austenitic Stainless Steel Using Image-Based Finite Element Modeling. *Metallurgical And Materials Transactions A*. 2008, Tom 39A, s. 1109–1117.
4. Madej L. i inni: Numerical analysis of strain inhomogeneities during deformation on the basis of the three dimensional digital material representation. *Computer Methods In Materials Science*. 2011, Tom 11, s. 375–380.
5. Steinbach I. i inni: A phase field concept for multiphase systems. *Physica D*. 1996, Tom 94, s. 135–147.
6. Militzer M. i inni: Three-dimensional phase field modelling of the austenite-to-ferrite transformation. *Acta Materialia*. 2006, Tom 54, s. 3961–3972.
7. Zhang L. i inni: A cellular automaton investigation of the transformation from austenite to ferrite during continuous cooling. *Acta Materialia*. 2003, Tom 51, s. 5519–5527.
8. Lan Y.J., Li D.Z. i Li Y.Y.: Modeling austenite decomposition into ferrite at different cooling rate in low-carbon steel with cellular automaton method. *Acta Materialia*. 2004, Tom 52, s. 1721–1729.
9. Zheng C., Raabe D. i Li D.: Prediction of post-dynamic austenite-to-ferrite transformation and reverse transformation in a low-carbon steel by cellular automaton modeling. *Acta Materialia*. 2012, Tom 60, s. 4768–4779.
10. Lewis A.C. i inni: Two- and three-dimensional microstructural characterization of a super-austenitic stainless steel. *Materials Science and Engineering A*. 2006, Tom 418, s. 11–18.
11. Bernacki M., i inni: Development of numerical tools for the multiscale modelling of recrystallisation in metals, based on a digital material framework. *Computer Methods in Materials Science*. 2007, Tom 7, 1, s. 142–149.
12. Madej L.: Digital material representation of polycrystals in application to numerical simulations of inhomogenous deformation. *Computer Methods in Materials Science*. 2010, Tom 10, 3, s. 1–13.
13. Milenin A. i Kustra P.: The multiscale FEM simulation of wire fracture phenomena during drawing of Mg alloy. *Steel Research International*. 2008, Tom 79, s. 717–722.
14. Rauch L. i Madej L.: Application of the Automatic Image Processing in Modeling of the Deformation Mechanisms Based on the Digital Representation of Microstructure. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*. 2010, Tom 8, 3, s. 343–356.
15. Raabe D. i Becker R.C.: Coupling of a crystal plasticity finite-element model with a probabilistic cellular automaton for simulating primary static recrystallization in aluminium. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. 2000, Tom 8, s. 445–462.
16. Szala J.: *Met-Ilo v12.1 – instrukcja obsługi programu*. Katowice, 2009, unpublished (in Polish).