

Piotr FRĄCZAK*

ANALIZA OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH LINIOWYCH W PROGRAMACH MATHCAD I PSPICE W ASPEKCIE TWIERDZEŃ O WZAJEMNOŚCI

W pracy przedstawiono analizę obwodów elektrycznych liniowych, rozgałęzionych z jednym źródłem energii w zapisie liczb zespolonych w postaci macierzowej w ujęciu twierdzeń o wzajemności. Twierdzenie o wzajemności oczkowe i twierdzenie o wzajemności węzłowe. Twierdzenia te wynikają bezpośrednio z symetrii macierzy impedancji własnych i wzajemnych oraz macierzy admitancji własnych i wzajemnych. Twierdzenie o wzajemności oczkowe zastosowano do analizy prądów w obwodach liniowych, rozgałęzionych obliczanych metodą prądów oczkowych Maxwella. Z kolei twierdzenie o wzajemności węzłowe zastosowano do analizy napięć w obwodach liniowych, rozgałęzionych obliczanych metodą potencjałów węzłowych Cortiego. Obliczenie obwodów elektrycznych w kontekście twierdzeń o wzajemności przeprowadzono w środowiskach programów numerycznych *Mathcad* i *PSpice*

SŁOWA KLUCZOWE: twierdzenie o wzajemności oczkowe, twierdzenie o wzajemności węzłowe, twierdzenia o wzajemności w programach *Mathcad* i *PSpice*.

1. WSTĘP

Podczas analizy obwodów elektrycznych liniowych, rozgałęzionych z jednym źródłem energii w zapisie liczb zespolonych w postaci macierzowej pomocnicze stają się twierdzenia o wzajemności. Twierdzenie o wzajemności oczkowe można zastosować do analizy prądów w obwodach liniowych, rozgałęzionych obliczanych metodą prądów oczkowych Maxwella. Twierdzenie to brzmi następująco: jeżeli w obwodzie liniowym rozgałęzionym, jedyne źródło napięcia \underline{E} znajdujące w gałęzi k -tej wywołuje w gałęzi l -tej tego obwodu prąd \underline{I} , to po przeniesieniu tego źródła do gałęzi l -tej, w gałęzi k -tej popłynie również prąd \underline{I} [1, 2, 6]. Z kolei twierdzenie o wzajemności węzłowe można zastosować do analizy napięć w obwodach liniowych, rozgałęzionych obliczanych metodą potencjałów węzłowych Cortiego. Twierdzenie o wzajemności węzłowe można sformułować następująco: jeżeli w obwodzie liniowym rozgałęzionym, jedyne źródło prądu \underline{I} włączy się między węzły m oraz m' , które między węzłami n i n'

* Zachodniopomorskie Centrum Edukacji Morskiej i Politechnicznej w Szczecinie

wymusza napięcie \underline{U} , to włączenie źródła prądu między węzły nm^l wymusi między węzłami mm^l również napięcie \underline{U} [2, 7].

Celem pracy jest przedstawienie analizy obwodów rozgałęzionych w kontekście twierdzeń o wzajemności w środowiskach programów numerycznych *Mathcad* [9] i *PSPice* [4, 5].

2. OPIS ANALITYCZNY TWIERDZEŃ O WZAJEMNOŚCI METODAMI MACIERZOWYMI W ZAPISIE LICZB ZESPOLONYCH

2.1. Twierdzenie o wzajemności oczkowe

Prezentacja twierdzeń o wzajemności oczkowe polegała na opisie analitycznym obwodu elektrycznego rozgałęzionego macierzowo metodą prądów oczkowych Maxwella (w zapisie liczb zespolonych) [1, 3, 8]. Równanie macierzowe (1) opisujące obwód elektryczny rozgałęziony zawiera jedną siłę elektromotoryczną \underline{E} , która wymusza przepływ prądów w gałęziach. Macierz impedancji oczkowej \underline{Z} , wektor sił elektromotorycznych oczkowych \underline{E} oraz wektor prądów oczkowych \underline{I} równania macierzowego (1) oznaczono następująco:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \cdots & \underline{Z}_{1k} & \cdots & \underline{Z}_{1l} & \cdots & \underline{Z}_{1m} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \cdots & \underline{Z}_{2k} & \cdots & \underline{Z}_{2l} & \cdots & \underline{Z}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Z}_{k1} & \underline{Z}_{k2} & \cdots & \underline{Z}_{kk} & \cdots & \underline{Z}_{kl} & \cdots & \underline{Z}_{km} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Z}_{l1} & \underline{Z}_{l2} & \cdots & \underline{Z}_{lk} & \cdots & \underline{Z}_{ll} & \cdots & \underline{Z}_{lm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Z}_{m1} & \underline{Z}_{m2} & \cdots & \underline{Z}_{mk} & \cdots & \underline{Z}_{ml} & \cdots & \underline{Z}_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \cdots \\ \underline{I}_k \\ \cdots \\ \underline{I}_l \\ \cdots \\ \underline{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \underline{E}_k \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \cdots & \underline{Z}_{1k} & \cdots & \underline{Z}_{1l} & \cdots & \underline{Z}_{1m} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \cdots & \underline{Z}_{2k} & \cdots & \underline{Z}_{2l} & \cdots & \underline{Z}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Z}_{k1} & \underline{Z}_{k2} & \cdots & \underline{Z}_{kk} & \cdots & \underline{Z}_{kl} & \cdots & \underline{Z}_{km} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Z}_{l1} & \underline{Z}_{l2} & \cdots & \underline{Z}_{lk} & \cdots & \underline{Z}_{ll} & \cdots & \underline{Z}_{lm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Z}_{m1} & \underline{Z}_{m2} & \cdots & \underline{Z}_{mk} & \cdots & \underline{Z}_{ml} & \cdots & \underline{Z}_{mm} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{E}_k \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \dots \\ \underline{I}_k \\ \dots \\ \underline{I}_l \\ \dots \\ \underline{I}_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

(4)

Równanie (1) w postaci zwartej przyjmuje następującą formę:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{E} \quad (5)$$

Mnożąc lewostronnie równanie (5) przez macierz odwrotną $(\mathbf{Z})^{-1}$ do macierzy impedancji oczkowej \mathbf{Z} uzyskuje się:

$$\mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{E} \quad (6)$$

skąd po zastosowaniu znanych właściwości macierzy:

$$\mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{Z} = \mathbb{I} \text{ oraz } \mathbb{I} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \quad (7)$$

gdzie: symbol \mathbb{I} – macierz jednostkowa, otrzymuje się wektor prądów oczkowych w następującej postaci:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{E} \quad (8)$$

Za pomocą równania macierzowego (8) obliczamy prąd \underline{I} w gałęzi l -tej, który wymuszany jest przez jedyne źródło napięcia \underline{E} znajdujące się w k -tej gałęzi według wzoru (9):

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \dots \\ \underline{I}_k \\ \dots \\ \underline{I}_l \\ \dots \\ \underline{I}_m \end{bmatrix} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{E}_k \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Następnie źródło napięcia \underline{E} przenosimy do gałęzi l -tej i obliczamy natężenie prądu \underline{I} w gałęzi k -tej tego obwodu.

2.2. Twierdzenie o wzajemności węzłowe

Prezentacja twierdzenia o wzajemności węzłowe polegała na opisie analitycznym obwodu elektrycznego rozgałęzionego metodą macierzową napięć węzłowych Cortiego (w zapisie liczb zespolonych) [1, 3, 7]. Równanie macierzowe (10) opisujące obwód elektryczny rozgałęziony zawiera jedno

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \cdots & \underline{Y}_{1k} & \cdots & \underline{Y}_{1m} & \cdots & \underline{Y}_{1n} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \cdots & \underline{Y}_{2k} & \cdots & \underline{Y}_{2m} & \cdots & \underline{Y}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Y}_{k1} & \underline{Y}_{k2} & \cdots & \underline{Y}_{kk} & \cdots & \underline{Y}_{km} & \cdots & \underline{Y}_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Y}_{m1} & \underline{Y}_{m2} & \cdots & \underline{Y}_{mk} & \cdots & \underline{Y}_{mm} & \cdots & \underline{Y}_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Y}_{n1} & \underline{Y}_{n2} & \cdots & \underline{Y}_{nk} & \cdots & \underline{Y}_{nm} & \cdots & \underline{Y}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \cdots \\ \underline{V}_k \\ \cdots \\ \underline{V}_m \\ \cdots \\ \underline{V}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \underline{I}_k \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

źródło prądu \underline{I}_k , które wywołuje napięcia węzłowe. Macierz admitancji węzłowej \mathbf{Y} , wektor prądów źródłowych $\mathbf{I}\dot{z}$ oraz wektor napięć węzłowych \mathbf{V} równania macierzowego (11) oznaczono następująco:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \cdots & \underline{Y}_{1k} & \cdots & \underline{Y}_{1m} & \cdots & \underline{Y}_{1n} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \cdots & \underline{Y}_{2k} & \cdots & \underline{Y}_{2m} & \cdots & \underline{Y}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Y}_{k1} & \underline{Y}_{k2} & \cdots & \underline{Y}_{kk} & \cdots & \underline{Y}_{km} & \cdots & \underline{Y}_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Y}_{m1} & \underline{Y}_{m2} & \cdots & \underline{Y}_{mk} & \cdots & \underline{Y}_{mm} & \cdots & \underline{Y}_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Y}_{n1} & \underline{Y}_{n2} & \cdots & \underline{Y}_{nk} & \cdots & \underline{Y}_{nm} & \cdots & \underline{Y}_{nn} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{I}\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \underline{I}_k \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \cdots \\ \underline{V}_k \\ \cdots \\ \underline{V}_m \\ \cdots \\ \underline{V}_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$(13)$$

Równanie (10) w postaci zwartej przyjmuje następującą formę:

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}_z \quad (14)$$

Z równania macierzowego (14) wyznaczono wektor napięć węzłowych \mathbf{V} (procedurę obliczeniową zamieszczono w rozdz. 2.1), otrzymując następującą postać równania macierzowego:

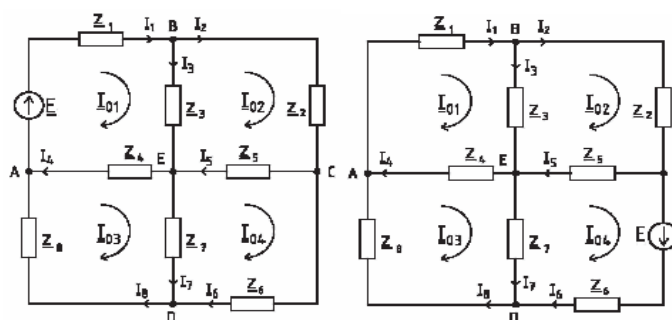
$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{I}_z \quad (15)$$

W oparciu o równanie macierzowe (15) obliczamy potencjały węzłowe \underline{U} , które inicjowane są jedynym źródłem prądu \underline{I}_z włączonym między węzły n i n^T .

3. PREZENTACJA TWIERDZEŃ O WZAJEMNOŚCI OCZKOWE I WĘZŁOWE W PROGRAMACH MATHCAD I PSPICE

3.1. Twierdzenie o wzajemności oczkowe w programie *Mathcad*

Obwód elektryczny rozgałęziony, który poddano analizie w kontekście twierdzenia o wzajemności oczkowe przedstawiają dwa schematy zastępcze (rys.1 i rys.2), które posiadają jedno źródło napięcia. Prądy zaznaczone na pierwszym i drugim schemacie opisano macierzowo metodą prądów oczkowych Maxwella. Otrzymane równania macierzowe (16) i (17) odpowiednio do schematów zaimplementowano w środowisku programu numerycznego *Mathcad*. Na rys.3 zamieszczono wyniki obliczeń symulacyjnych prądów w programie *Mathcad*.



Rys.1. Schemat obwodu – źródło napięcia \underline{E} w pierwszym oczku, obliczenia prądu w szóstej gałęzi $\underline{I} = (8.871 - 5.894j) \text{ A}$

Rys. 2. Schemat obwodu – źródło napięcia \underline{E} w czwartym oczku, obliczenia prąd w pierwszej gałęzi $\underline{I} = (8.871 - 5.894j) \text{ A}$

Dane w zapisie macierzowy

$$\begin{pmatrix} 1 & E \\ Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \\ Z_5 & Z_6 \\ Z_7 & Z_8 \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & (200 - 17j) \\ (2 + j) & (2 + j) \\ (3 - 2j) & (3 - 2j) \\ (4 + 3j) & (4 + 3j) \\ (5 - 3j) & (5 - 3j) \end{bmatrix} [V, \Omega]$$

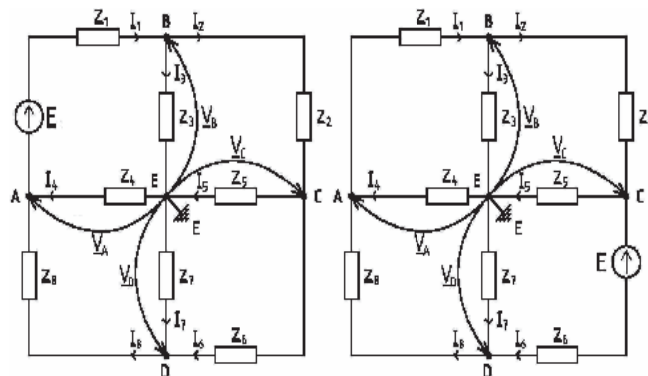
$$Z := \begin{bmatrix} (Z_1 + Z_3 + Z_4) & -Z_3 & -Z_4 & 0 \\ -Z_3 & (Z_2 + Z_3 + Z_5) & 0 & -Z_5 \\ -Z_4 & 0 & (Z_4 + Z_7 + Z_8) & -Z_7 \\ 0 & -Z_5 & -Z_7 & (Z_5 + Z_6 + Z_7) \end{bmatrix} \quad \mathbf{E1} := \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_6 \end{pmatrix} := Z^{-1} \cdot \mathbf{E1} \rightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.556 - 1.128j \\ 13.809 - 9.898j \\ 10.851 - 2.56j \\ 8.871 - 5.394j \end{pmatrix} [A] \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_6 \end{pmatrix} := Z^{-1} \cdot \mathbf{E2} \rightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.871 - 5.394j \\ 13.192 - 3.278j \\ 10.184 - 4.393j \\ 21.21 - 8.207j \end{pmatrix} [A] \quad (17)$$

Rys. 3. Obliczenia prądów w *Mathcad*: szósta gałąź $I = (8.871 - 5.894j)$ A wzór (16), pierwsza gałąź $I = (8.871 - 5.894j)$ A wzór (17)

3.2. Twierdzenie o wzajemności węzłowe w programie *Mathcad*




Rys.4. Schemat obwodu – źródło E umieszczone w gałęzi między węzłami A i B , Wyznaczono napięcie węzłowe C ($C-E$)
 $U = (4.742 - 6.17j) V$

Rys.5. Schemat obwodu – źródło E umieszczone w gałęzi między węzłami D i C , Wyznaczono napięcie węzłowe B ($B-E$)
 $U = (4.742 - 6.17j) V$

3.3. Twierdzenie o wzajemności oczkowe w programie PSpice

Symulacja komputerowa obwodów elektrycznych rozgałęzionych w programie numerycznym *PSpice* umożliwia obliczanie w krótkim czasie wielu konfiguracji badanego układu. Procedura obliczeniowa w programie *PSpice* obwodu rozgałęzionego w kontekście twierdzenia o wzajemności oczkowe, polega na stworzeniu dwóch schematów zastępczych. Schematy te składają się z jednego źródła napięcia, amperomierza, rezystorów i uziemienia. Źródła napięcia w poszczególnych schematach zastępczych obwodu elektrycznego rozgałęzionego są usytuowane w innych oczkach. Na rys.7 i rys.8 zamieszczono wyniki obliczeń symulacyjnych prądów w programie *PSpice*.



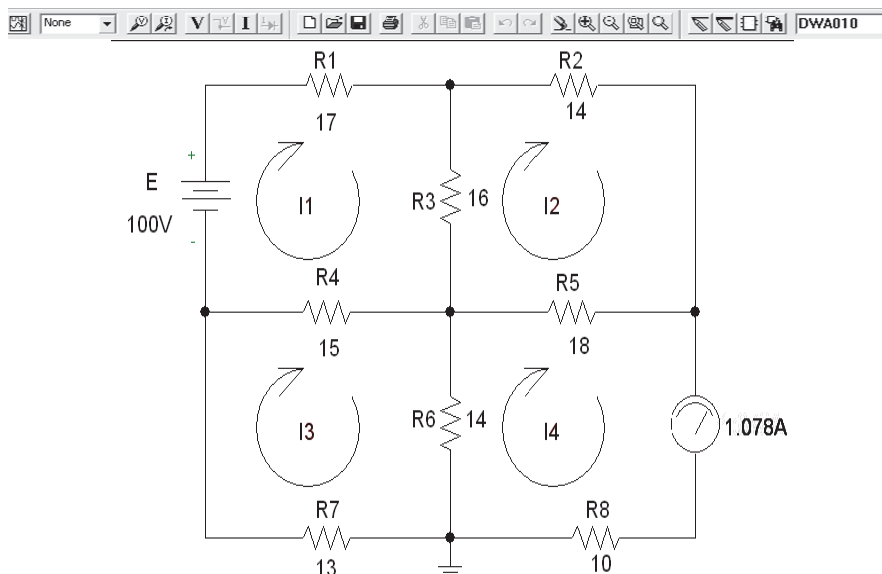
$$\begin{pmatrix} i \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & (25 - 5j) \\ (2 + j) & (6 + j) \\ (3 - 2j) & (3 - 2j) \\ (4 + 3j) & (2 + j) \\ (5 - 3j) & (5 - 3j) \end{pmatrix} \quad [V, \Omega]$$

$$Y := \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4}\right) & -\frac{1}{z_1} & 0 & -\frac{1}{z_8} \\ -\frac{1}{z_1} & \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) & -\frac{1}{z_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z_2} & \left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_5} + \frac{1}{z_6}\right) & -\frac{1}{z_6} \\ -\frac{1}{z_8} & 0 & -\frac{1}{z_6} & \left(\frac{1}{z_6} + \frac{1}{z_7} + \frac{1}{z_8}\right) \end{pmatrix} \quad I_{z1} := \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad I_{z2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{E} \\ 0 \end{pmatrix}$$

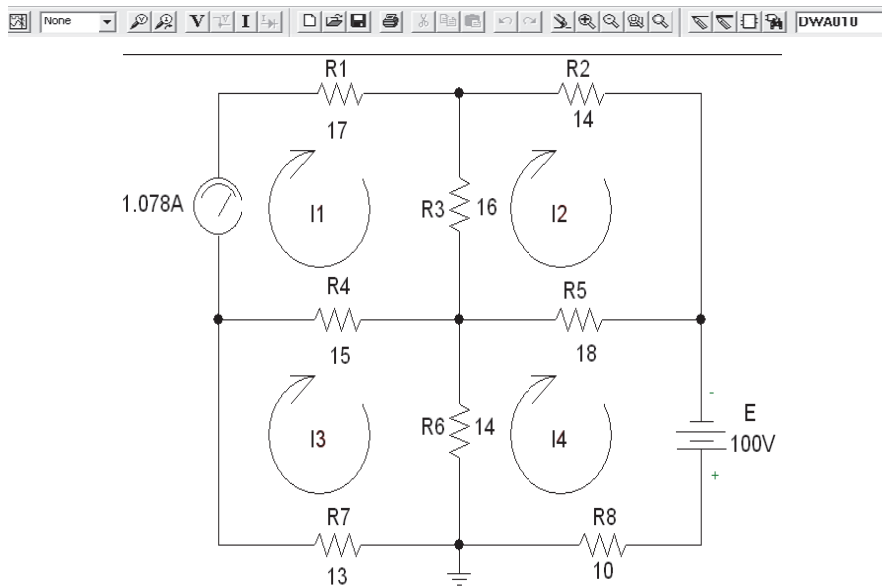
$$\begin{pmatrix} \underline{V}_A \\ \underline{V}_B \\ \underline{V}_C \\ \underline{V}_D \end{pmatrix} := Y^{-1} \cdot I_{z1} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{V}_A \\ \underline{V}_B \\ \underline{V}_C \\ \underline{V}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.776 - 10.804j \\ 11.672 - 15.072j \\ 4.742 - 6.17j \\ 2.938 - 6.886j \end{pmatrix} \quad [V] \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_A \\ \underline{V}_B \\ \underline{V}_C \\ \underline{V}_D \end{pmatrix} := Y^{-1} \cdot I_{z2} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{V}_A \\ \underline{V}_B \\ \underline{V}_C \\ \underline{V}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.239 - 5.485j \\ 4.742 - 6.17j \\ 21.06 - 11.277j \\ 10.709 - 12.954j \end{pmatrix} \quad [V] \quad (19)$$

Rys.6. Obliczenia napięć węzłowych w *Mathcad*: węzeł C ($\underline{U} = (4.742 - 6.17j) V$) wzór (18), węzeł B ($\underline{U} = (4.742 - 6.17j) V$) wzór (19)



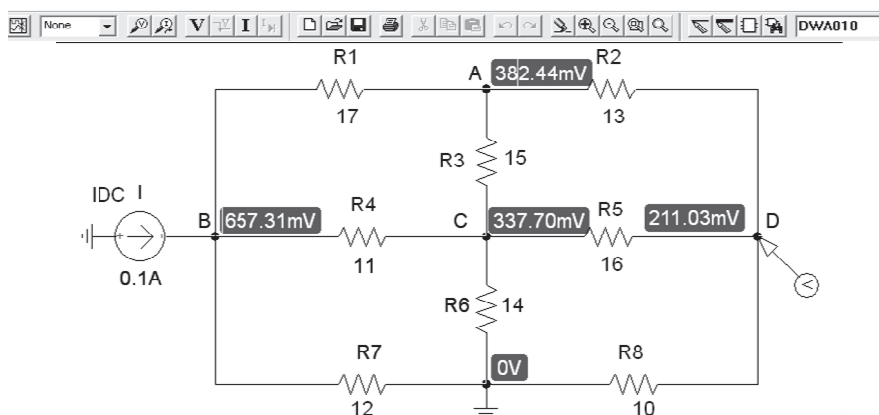
Rys.7. Schemat obwodu – źródło napięcia E w pierwszym oczku, amperomierz w ósmej gałęzi, pomiar 1,078 A



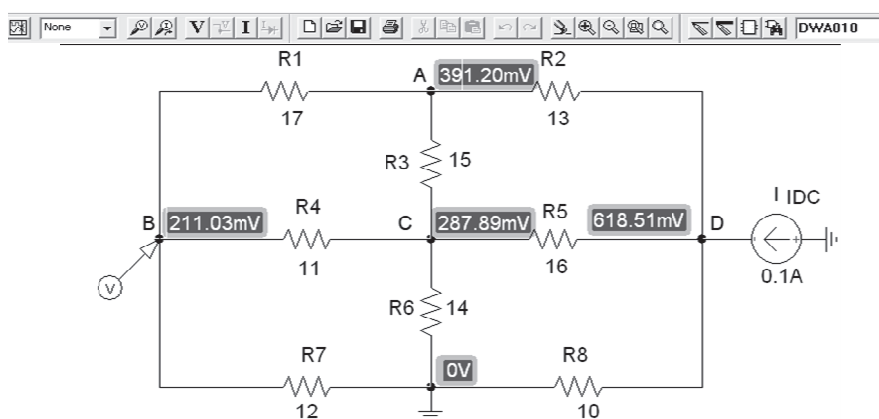
Rys.8. Schemat obwodu – zamiana źródła napięcia i amperomierza miejscami, pomiar 1,078 A

3.4. Twierdzenie o wzajemności węzłowe w PSpice

Procedura obliczeniowa w programie *PSpice* obwodu rozgałęzionego w kontekście twierdzenia o wzajemności węzłowe, polega na opracowaniu dwóch schematów zastępczych. Schematy te składają się z jednego źródła prądu, wskaźnika napięcia, rezystorów i uziemienia. Źródła prądu w poszczególnych schematach zastępczych obwodu elektrycznego rozgałęzionego są umieszczone w innych węzłach. Na rys.9 i rys.10 zamieszczono wyniki obliczeń symulacyjnych napięć węzłowych w programie *PSpice*.



Rys.9. Schemat obwodu – źródło prądu w węzle B, pomiar napięcia w węzle D ($V = 211.03 \text{ mV}$)



Rys. 10. Schemat obwodu – źródło prądu w węzle D, pomiar napięcia w węzle B ($V = 211.03 \text{ mV}$)

4. WNIOSKI

- Prezentacja twierdzeń o wzajemności oczkowe i węzłowe w zapisie liczb zespolonych w postaciach macierzowych w środowiskach programów numerycznych *Mathcad* i *PSpice* jest doskonałą pomocą dydaktyczną w nauczaniu teorii obwodów elektrycznych.
- Przedstawione twierdzenie o wzajemności oczkowe w postaci macierzowej w środowisku programu numerycznego *Mathcad* można wykorzystać do weryfikacji obliczeń prądów w obwodach elektrycznych metodą prądu oczkowych Maxwella.
- Opisane twierdzenie o wzajemności węzłowe w postaci macierzowej w środowisku programu numerycznego *Mathcad* można wykorzystać do weryfikacji obliczeń napięć w obwodach elektrycznych metodą napięć węzłowych Cortiego.
- Zaprezentowane twierdzenia o wzajemności oczkowe i węzłowe w środowiskach programów numerycznych *Mathcad* i *PSpice* można wykorzystać do symulacji pomiarów prądów i napięć w obwodach elektrycznych.

LITERATURA

- [1] Bolkowski S., Teoria obwodów elektrycznych, wyd. 5, Warszawa, WNT 1995, ISBN 83-204-2218-3.
- [2] Cholewicki T., Elektrotechnika Teoretyczna, Tom I, wyd. 2, Warszawa, WNT 1967.
- [3] Frączak P., Obliczenia numeryczne obwodów elektrycznych i układów cyfrowych, Szczecin, Wydawnictwo PPH „Zapol” Dmochowski, Sobczyk Sp.j. 2012, s. 173, ISBN 978-83-7518-432-7.
- [4] Izydorzyczyk J., PSpice Komputerowa symulacja układów elektronicznych, Wydawnictwo Helion, Gliwice 1993.
- [5] Król A., Moczko J., Symulacja i optymalizacja układów elektronicznych, Wydawnictwo Nakom, Poznań 1999.
- [6] Lipiński W., Obliczenia numeryczne w teorii sygnałów i obwodów elektrycznych, Szczecin, Wydawnictwo PPH „Zapol” Dmochowski, Sobczyk Sp.j. 2010, s. 360, ISBN 978-83-7518-277-9.
- [7] Mikołajuk K., Trzaska Z., Elektrotechnika Teoretyczna, PWN Warszawa 1984.
- [8] Osiowski J., Szabatin J., Podstawy Teorii Obwodów, WNT Warszawa. 1993.
- [9] Palczewski W., Mathcad 12,11, 2001i, 2000 w algorytmach, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2005, ISBN 83-87674-81-8.

**ANALYSIS OF LINEAR ELECTRICAL CIRCUITS IN MATHCAD AND
PSPICE PROGRAMS IN THE ASPECT OF THEOREMS ON MUTUALITY**

The paper presents the analysis of linear branched circuits with one energy source in the notation of complex numbers in the form of a matrix in terms of claims about reciprocity.

Theorems on mesh reciprocity and the theorem on node reciprocity. These theorems result directly from the symmetry of the matrix of own impedances and mutual impedances, as well as the matrix of their own and mutual admittances. The theorem on ring reciprocity was used to analyze the currents in linear branched circuits calculated using Maxwell's ring currents. In turn, the theorem on node reciprocity was used to analyze the voltage in linear branched circuits, calculated using the Cortie nodal potentials method. The calculation of electrical circuits in the context of claims of reciprocity was carried out in the numerical programs environments of *Mathcad* and PSpice.

(Received: 01.02.2019, revised: 10.03.2019)

