

**Edyta Ładyżyńska-Kozdraś**

Politechnika Warszawska

Wydział Mechatroniki, Instytut Mikromechaniki i Fotoniki

02-525 Warszawa, ul. św. A. Boboli 8

e-mail: edytalad@poczta.onet.pl

## **RÓWNANIA MAGGIEGO W MODELOWANIU RUCHU TORPEDY NAPROWADZANEJ METODĄ TRÓJPUNKTOWĄ NA OKRĘT PODWODNY**

### **STRESZCZENIE**

W artykule zaprezentowano modelowanie dynamiki oraz symulację numeryczną kierowania pocisku torpedowego naprowadzanego metodą trójpunktową na okręt podwodny. Model matematyczny opracowany został przy zastosowaniu równań Maggiego dla układów mechanicznych o więzach nieholonomicznych. Pokazano, jak stosując ogólny model matematyczny sterowanego obiektu i wprowadzając prawa sterowania jako więzy nieholonomiczne, można sterować automatycznie pociskiem torpedowym. Wprowadzone prawa sterowania stanowią związki kinematyczne uchybów, to znaczy różnic między parametrami zadanymi i realizowanymi ruchu torpedy. Otrzymane prawa sterowania potraktowano jako więzy nieholonomiczne ograniczające ruch pocisku tak, aby spełniał on żądany manewr sterowany. Związki kinematyczne i kryteria naprowadzania stanowią koordynację ruchu sterowanej torpedy. Przeprowadzona symulacja numeryczna potwierdziła poprawność opracowanego modelu matematycznego.

#### Słowa kluczowe:

modelowanie, symulacja, równania Maggiego, model matematyczny, torpeda, okręt podwodny, metoda trójpunktowa.

### **WSTĘP**

Badania teoretyczne stanowią niezbędny element w procesie poznawania i modelowania zjawisk fizycznych. Według A. Einsteina [1]: „umysł ludzki musi

najpierw samodzielnie budować poszczególne formy, zanim zdołamy je wykryć w świecie rzeczy (...) z samej empirii nie zdoła wykwitnąć poznanie, lecz jedynie z konfrontacji tego, co wymyślimy, z tym, co zaobserwujemy”. Teoria i doświadczenie są dwoma elementami niezbędnymi do rzetelnego i kompletnego poznania oraz analizy otaczającego nas świata. Powinny one ze sobą współpracować i uzupełniać się wzajemnie. Teoria umożliwia wyjaśnienie zjawisk obserwowanych doświadczalnie, a przez to pozwala nakreślać schematy kolejnych eksperymentów oraz przewidywać ich wyniki i konsekwencje.

Podczas teoretycznych badań właściwości dynamicznych obiektu rzeczą bardzo istotną są właściwe metody modelowania. Aby poprawnie zbudować model fizyczny i odpowiadający mu model matematyczny, należy znać nie tylko strukturę obiektu fizycznego, ale również strukturę systemu, którego elementem jest ten obiekt. Następnie badania sprowadzają się do analizy utworzonego modelu matematycznego, najczęściej poprzez badania numeryczne. Każda symulacja numeryczna jest powtarzalna, dzięki czemu na jej podstawie można przeanalizować różne możliwe sytuacje, nawet te ekstremalne, które w normalnych warunkach są niejednokrotnie trudne do zbadania.

W artykule zaprezentowano model matematyczny pocisku torpedowego naprowadzanego metodą trzech punktów, która jest jedną z metod stosowanych w systemach kierowania zdalnego (automatycznych lub półautomatycznych) [2]. Metoda trzech punktów charakteryzuje się tym, że w procesie naprowadzania określone jest położenie w przestrzeni trzech punktów: punktu naprowadzania, pocisku i celu. Więzy na ruch pocisku są nakładane pośrednio poprzez powiązanie ruchu linii wyznaczonej poprzez punkt naprowadzania i cel (tzw. linii obserwacji celu LOC) z ruchem pocisku. Dąży się przy tym do tego, aby pocisk podczas naprowadzania stale znajdował się na LOC.

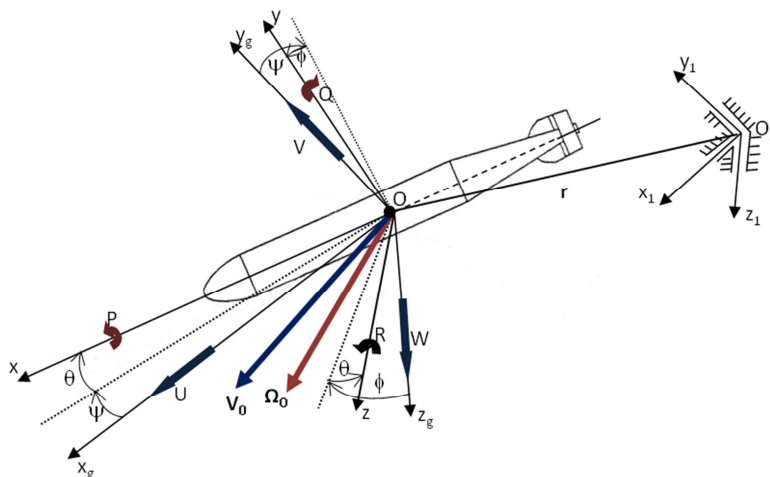
Opracowane kinematyczne równania więzów automatycznie sterowanego pocisku torpedowego zostały powiązane w artykule poprzez zastosowanie równań Maggiego [3, 5] z równaniami dynamiki torpedy. Równania te wyprowadzono w układzie odniesienia  $O_I x_I y_I z_I$  sztywno związanym z okrętem-bazą, z którego został wystrzelony pocisk torpedowy. Założono, że sterowanie ruchem pocisku torpedowego odbywa się w sposób automatyczny za pomocą wychylenia powierzchni sterowych — steru kierunku i steru wysokości odpowiednio o kąty  $\delta_V$  i  $\delta_H$ . Prawa

sterowania stanowią kinematyczne związki uchybów zadanych i realizowanych parametrów ruchu, stabilizując ruch pocisku torpedowego na zadanej trajektorii.

## MODEL FIZYCZNY UKŁADU OTOCZENIE — TORPEDA — STEROWANIE

Rozpatrzono pocisk torpedowy naprowadzany z okrętu-bazy metodą trzech punktów na manewrujący okręt podwodny. Model fizyczny układu sformułowano w następujący sposób:

- torpedę potraktowano jak bryłę nieodkształcalną — sztywną, o sześciu stopniach swobody, całkowicie zanurzoną w wodzie;
- sterowanie pocisku torpedowego odbywa się poprzez wychylenie sterów kierunku i głębokości z uwzględnieniem giroskopowego systemu stabilizującego;
- w wodzie nie występują żadne prądy lub wiry i ma ona wszędzie jednakową gęstość;
- założono istnienie potencjału prędkości dla cieczy;
- zastosowano hydrodynamikę quasi-stacjonarną;
- siłami działającymi na pocisk torpedowy są siły hydrodynamiczne  $Q^H$ , grawitacyjne  $Q^g$ , wypornościowe  $Q^W$  oraz siły od napędu  $Q^T$  i od sterowania  $Q^\delta$ .



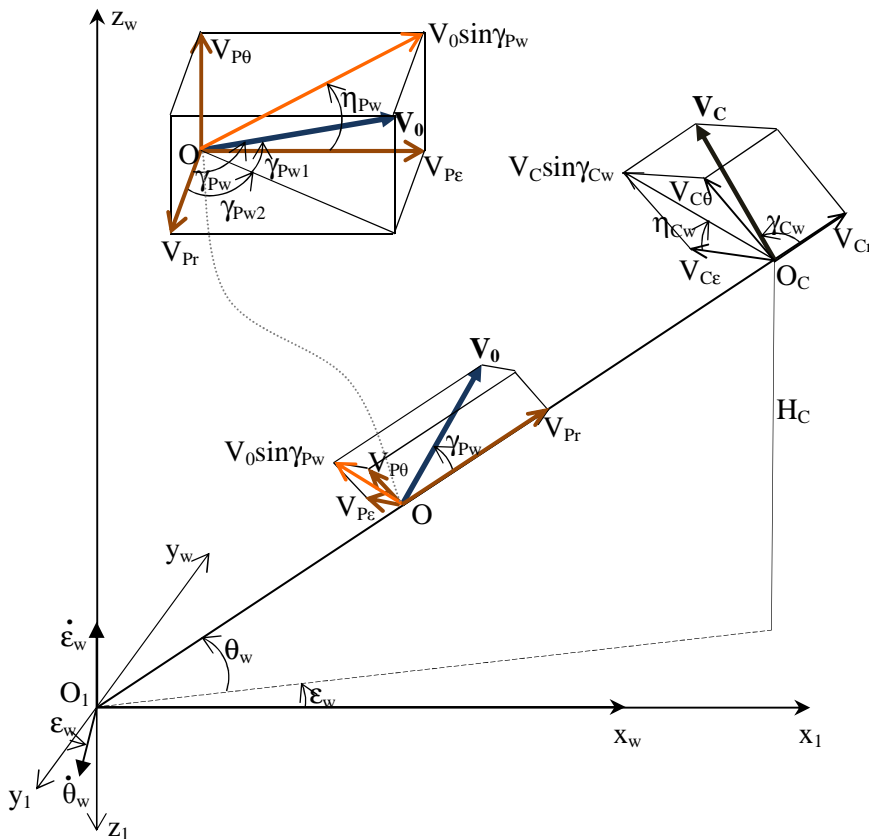
Rys. 1. Przyjęte układy odniesienia, prędkości liniowe i kątowe pocisku torpedowego

Źródło: opracowanie własne.

## ZWIĄZKI KINEMATYCZNE ZACHODZĄCE MIĘDZY TORPEDĄ A CELEM W FAZIE NAPROWADZANIA

Naprowadzanie pocisku torpedowego odbywa się z okrętu-bazy przy zastosowaniu metody trzech punktów, dlatego też przyjęto inercjalny układ odniesienia  $O_1x_1y_1z_1$  jako układ podstawowy i wyznaczono w nim związki kinematyczne oraz równania ruchu badanego obiektu.

W przypadku metod trójpunktowych warunkiem trafienia pocisku w cel jest dążenie do utrzymania sterowanego obiektu (punkt O) na linii obserwacji celu (LOC), będącej linią łączącą punkt kierowania (punkt  $O_1$ ) z celem, do spotkania którego sterowany obiekt dąży (punkt  $O_C$ ) (rys. 2.).



Rys. 2. Utrzymanie pocisku torpedowego na LOC

Źródło: opracowanie własne.

Warunek osiągalności celu w tym przypadku jest następujący:

$$V_0 > V_C \frac{\cos \gamma_{Cw}}{\cos \gamma_{Pw}}, \quad (1)$$

gdzie:

$\gamma_{Cw}$ ,  $\gamma_{Pw}$  — kąty określające położenie wektora prędkości odpowiednio celu i pocisku torpedowego względem LOC.

Przyjęta metoda naprowadzania wymusza istnienie więzów nałożonych na ruch torpedy poprzez powiązanie jej ruchu z ruchem linii wyznaczonej przez punkt naprowadzania i cel. W ten sposób prędkości kątowne pochylania i odchylenia LOC stanowią wymuszenie kinematyczne dla ruchu sterowanego pocisku torpedowego [5, 6]:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_w &= \frac{V_C}{r_C} \frac{\sin \gamma_{Cw} \cos \eta_{Cw}}{\cos \theta_w} \\ \dot{\theta}_w &= \frac{V_C}{r_C} \sin \gamma_{Cw} \sin \eta_{Cw} \end{aligned} \quad (2)$$

Równania położenia LOC wyznaczono z zależności trygonometrycznych na podstawie rysunku 2. Wynikają one z chwilowego położenia celu [5, 6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_w &= \arctg \frac{y_{1C}}{x_{1C}} \\ \theta_w &= \arcsin \frac{-z_{1C}}{r_C} \end{aligned} \quad (3)$$

Stanowią one podstawę do wyznaczenia parametrów zadanych pocisku torpedowego, uzależnionych w ten sposób od ruchów celu, na który naprowadzana jest torpeda.

### **PARAMETRY ZADANE I REALIZOWANE W PROCESIE NAPROWADZANIA POCISKU TORPEDOWEGO**

Parametry zadane pocisku torpedowego wyprowadzono w globalnym układzie odniesienia  $O_1x_1y_1z_1$ , wykorzystując zależności określające położenie (2) i prędkość (3) LOC, której ruch kulisty zależy jest od manewrów celu.

Wektoradanego położenia torpedy:

$$\mathbf{r}_z = x_{1z} \mathbf{i}_1 + y_{1z} \mathbf{j}_1 + z_{1z} \mathbf{k}_1, \quad (4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} x_{1z} &= r \cos \varepsilon_w \cos \theta_w \\ y_{1z} &= -r \sin \varepsilon_w \cos \theta_w \\ z_{1z} &= -r \sin \theta_w. \end{aligned} \quad (5)$$

Wektor zadanej prędkości liniowej torpedy przy idealnym naprowadzaniu:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_z &= U_z \mathbf{i}_1 + V_z \mathbf{j}_1 + W_z \mathbf{k}_1 = \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}_z}{\partial t} + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ \dot{\theta}_w \sin \varepsilon_w & \dot{\theta}_w \cos \varepsilon_w & -\dot{\varepsilon}_w \\ r_z \cos \varepsilon_w \cos \theta_w & -r_z \sin \varepsilon_w \cos \theta_w & -r_z \sin \theta_w \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Wektor zadanej prędkości kątowej torpedy:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_z &= P_z \mathbf{i} + Q_z \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi_z \cos \theta_z & \sin \psi_z \cos \theta_z & -\sin \theta_z \\ \sin \phi_z \cos \psi_z \sin \theta_z + & \sin \phi_z \sin \psi_z \sin \theta_z + & \sin \phi_z \cos \theta_z \\ -\sin \psi_z \cos \theta_z & + \cos \psi_z \cos \theta_z & \\ \cos \phi_z \cos \psi_z \sin \theta_z + & \sin \phi_z \sin \psi_z \sin \theta_z + & \cos \phi_z \cos \theta_z \\ + \sin \psi_z \sin \phi_z & - \cos \psi_z \sin \phi_z & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_w \sin \varepsilon_w \\ \dot{\theta}_w \cos \varepsilon_w \\ -\dot{\varepsilon}_w \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Parametry realizowane przez pocisk torpedowy opisują zachowanie się obiektu ruchomego na torze podczas naprowadzania. Są to funkcje określające związki między położeniem oraz prędkością liniową i kątową badanego obiektu, które to zależności związane są bezpośrednio z przyjętym układem odniesienia.

W układzie globalnym  $O_{1x_1y_1z_1}$  wektor chwilowej prędkości liniowej torpedy  $\mathbf{V}_0$  wyraża się zależnością (rys. 1):

$$\mathbf{V}_0 = U \mathbf{i}_1 + V \mathbf{j}_1 + W \mathbf{k}_1, \quad (8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} U &= \dot{x}_1 \\ V &= \dot{y}_1 \\ W &= \dot{z}_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Składowe chwilowej prędkości kątovej  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  są związkami prędkości uogólnionych  $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$  i funkcji trygonometrycznych współrzędnych uogólnionych  $\phi, \theta, \psi$ . Wyrażają się następującymi zależnościami [5, 6]:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Zwrot wektora prędkości przepływu względem układu nieruchomego określają kąty natarcia  $\alpha$  i ślizgu  $\beta$ , które zdefiniowano w następujący sposób [5, 6]:

— kąt natarcia: 
$$\alpha = \arctan \frac{W}{U} - \theta; \quad (11)$$

— kąt ślizgu: 
$$\beta = \arcsin \frac{V}{V_0} - \psi. \quad (12)$$

## PRAWA STEROWANIA TORPEDY

Przy założeniu, że pocisk torpedowy sterowany jest w dwóch kanałach: pochylania przez wychylenie steru głębokości  $\delta_H$  i odchylenia przez wychylenie steru kierunku  $\delta_V$ , prawa sterowania obiektu ruchomego przedstawiono jako związki uchybów między parametrami realizowanymi przez pocisk torpedowy (jego położeniem, prędkością liniową i kątową) i parametrami zadanymi, wynikającymi z przyjętej metody naprowadzania (parametry oznaczone indeksem „z”) [3, 5].

Prawo sterowania w kanale pochylania:

$$\begin{aligned} T_H \delta_H &= K_x^H (x_1 - x_{1z}) + K_z^H (z_1 - z_{1z}) + K_U^H (U - U_z) + K_W^H (W - W_z) + \\ &+ K_Q^H (Q - Q_z) + K_\theta^H (\theta - \theta_z) + \delta_{H0} \end{aligned} \quad (13)$$

Prawo sterowania w kanale odchylenia:

$$T_V \delta_V = K_x^V (x_1 - x_{1z}) + K_y^V (y_1 - y_{1z}) + K_U^V (U - U_z) + K_V^V (V - V_z) + K_R^V (R - R_z) + K_\psi^V (\psi - \psi_z) + \delta_{V0}, \quad (14)$$

gdzie:

$K_i^H$  — współczynniki wzmocnienia w kanale pochylania;

$K_i^V$  — współczynniki wzmocnienia w kanale odchylenia;

$T_H, T_V$  — stałe czasowe układu wykonawczego sterowania.

Otrzymane prawa sterowania określają związki między wychyleniami sterów głębokości oraz kierunku a parametrami zadanymi wynikającymi z naprowadzania i bieżącymi parametrami opisującymi zachowanie się pojazdu podwodnego. Wystąpienie różnic między parametrami realizowanymi i zadanymi wyznacza wychylenie sterów głębokości  $\delta_H$  i kierunku  $\delta_V$ , co z kolei powoduje zmianę sił sterujących i powrót sterowanej torpedy na zadany tor ruchu.

Wyznaczone prawa sterowania stanowią dwa równania więzów nieholonomicznych, ponieważ są one niecałkowalne (można je scałkować dopiero wraz z równaniami ruchu) oraz nakładają ograniczenia na ruch obiektu. Ograniczenia te stanowią: bezpośrednio prędkość kątowna LOC, a pośrednio położenie i prędkość celu, na który naprowadzany jest pocisk torpedowy. Wraz z równaniami ruchu wyznaczają one tor ruchu pocisku oraz jego zachowanie się na torze.

## MODEL DYNAMIKI POCISKU TORPEDOWEGO — WYKORZYSTANIE RÓWNAŃ MAGGIEGO

Zważywszy na fakt, iż pocisk torpedowy naprowadzany jest w układzie inercyjnym  $O_{IX_IY_Iz_I}$ , a prawa sterowania (13), (14) potraktowano jako więzy nieholonomiczne nałożone na ruch układu, dynamiczne równania ruchu wyprowadzono, posługując się równaniami mechaniki analitycznej w postaci równań Maggiego [3, 5].

$$\sum_{\sigma=1}^k C_{i\sigma} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_\sigma} \right] = \sum_{\sigma=1}^k C_{i\sigma} Q_\sigma \quad \sigma = 1, \dots, k \quad i = 1, \dots, l, \quad (15)$$



gdzie:

- $k$  — liczba niezależnych współrzędnych uogólnionych;  
 $l$  — liczba niezależnych prędkości uogólnionych;  
 $b$  — liczba równań więzów nieholonomicznych;  
 $T^*$  — energia kinetyczna układu wyrażona w quasi-prędkościach;  
 $Q_\sigma$  — siły uogólnione wyrażone w quasi-współrzędnych;  
 $C_{i\sigma} = \partial \dot{q}_i / \partial \dot{e}_i$  — współczynniki równań Maggiego.

Zachowanie się badanego modelu torpedy naprowadzanej na cel opisane jest sześcioma niezależnymi współrzędnymi uogólnionymi ( $k = 6$ ). Na prędkości uogólnione nałożone są dwa równania więzów nieholonomicznych ( $b = 2$ ). Tak więc cztery prędkości uogólnione są niezależne, tzn. istnieją cztery charakterystyki kinematyczne, w oparciu o które wyznaczono cztery równania Maggiego silnie sprzężone z dwoma równaniami więzów nieholonomicznych w postaci praw sterowania.

Wektor sił i momentów sił zewnętrznych działających na pocisk torpedowy w ruchu przestrzennym jest sumą oddziaływań ośrodka, w którym porusza się obiekt. Tworzony jest on przez siły grawitacyjne  $\mathbf{Q}^g$ , wyporu  $\mathbf{Q}^W$ , od napędu  $\mathbf{Q}^T$ , od sterowania  $\mathbf{Q}^\delta$  oraz siły hydrodynamiczne  $\mathbf{Q}^H$ , których składowe rozpisano w grawitacyjnym układzie odniesienia  $Ox_g y_g z_g$

$$\mathbf{Q}_\sigma = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 = \mathbf{Q}^W + \mathbf{Q}^g + \mathbf{Q}^H + \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}^\delta. \quad (16)$$

Ponieważ torpeda porusza się w środowisku o dużej lepkości, jej całkowitą energię kinetyczną potraktowano jako sumę energii kinetycznej bryły sztywnej  $T_b^*$  oraz energii kinetycznej masy dołączonej  $T_d^*$  cząsteczek cieczy wprawianej w ruch przez pocisk torpedowy pod wodą [4, 7]

$$T^* = T_b^* + T_d^*, \quad (17)$$

przy czym, energia kinetyczna cząstek cieczy wprawionych w ruch przez torpedę, traktowaną jako ciało osiowosymetryczne, wyliczona w układzie  $Ox_g y_g z_g$  jest następująca:

$$\begin{aligned}
T_d^* = & \frac{1}{2}[\lambda_{11}\dot{x}_1^2 + \lambda_{22}\dot{y}_1^2 + \lambda_{33}\dot{z}_1^2 + \lambda_{44}(\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta)^2 + \lambda_{55}(\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta)^2 + \\
& + \lambda_{66}(\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta)^2] + \lambda_{26}\dot{y}_1(\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta) + \\
& + \lambda_{35}\dot{z}_1(\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta)
\end{aligned} \quad , (18)$$

gdzie:

$\lambda_{ij}$  — współczynniki masy dołączonej; wymiar współczynników jest następujący:

$$\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33} \text{ [kg]}, \lambda_{44}, \lambda_{55}, \lambda_{66} \text{ [kgm}^2\text{]}, \lambda_{26}, \lambda_{35} \text{ [kgm]}.$$

Po podstawieniu do równań Maggiego (15) zróżniczkowanych zależności na energię kinetyczną pocisku torpedowego (17) oraz po uwzględnieniu osiowej symetrii badanego pocisku (geometrycznej, masowej, aerodynamicznej), a także zależności na siły zewnętrzne otrzymano równania ruchu torpedy, które stanowią powiązanie czterech równań Maggiego silnie sprzężonych z dwoma równaniami więzów nieholonomicznych, dając w sumie układ sześciu równań różniczkowych zwyczajnych z sześcioma niewiadomymi funkcjami czasu  $x_I, y_I, z_I, \phi, \theta, \psi$ :

Równanie ruchów podłużnych

$$\begin{aligned}
(m + 2\lambda_{11})\dot{U} + \left(\frac{K_U^V}{K_R^V} \sin \theta - \frac{K_U^H}{K_Q^H} \cos \theta\right)[(J_y + 2\lambda_{55})\dot{Q} - (S_x + 2\lambda_{26})\dot{V} \sin \phi + \\
- \dot{W} \cos \phi] - \frac{1}{2}[(J_x + 2\lambda_{44})PR \cos \theta - (J_y + \lambda_{55}) \cos^2 \phi]R^2 \cos 2\theta + \\
+ (S_x + 2\lambda_{26})(VR \cos \phi \cos \theta - WR \sin \phi \cos \theta)] + \\
- \left(\frac{K_U^H}{K_Q^H} \frac{\sin \theta}{\cos \psi} + \frac{K_U^V}{K_R^V} \frac{\cos \theta}{\cos \psi}\right)[-(J_x + 2\lambda_{44})\dot{P} \sin \theta + [(J_x + 2\lambda_{44}) \sin^2 \theta + \\
+ (J_y + 2\lambda_{55}) \cos^2 \theta]\dot{R} + (S_x + 2\lambda_{26})(\dot{V} \cos \phi \cos \theta - \dot{W} \sin \phi \cos \theta)] = \\
Q_1 + \left(\frac{K_U^V}{K_R^V} \sin \theta - \frac{K_U^H}{K_Q^H} \cos \theta\right)Q_5 - \left(\frac{K_U^H}{K_Q^H} \frac{\sin \theta}{\cos \psi} + \frac{K_U^V}{K_R^V} \frac{\cos \theta}{\cos \psi}\right)Q_6
\end{aligned} \quad (19)$$

Równanie przemieszczeń bocznych

$$\begin{aligned}
 & (m + \lambda_{22})\dot{V} - (S_x + \lambda_{26})(\dot{Q} \sin \phi + \dot{R} \cos \phi \cos \theta) + \frac{K_V^V}{K_R^V} \sin \theta [(J_y + \lambda_{66})\dot{Q} + \\
 & - (S_x + \lambda_{26})\dot{W} \cos \phi - \frac{1}{2} [(J_x + \lambda_{55}) - (J_y + \lambda_{66}) \cos^2 \phi] R^2 \cos 2\theta_R + \\
 & + (J_x + \lambda_{55})PR \cos \theta + (S_x + \lambda_{26})(VR \cos \phi \cos \theta - WR \sin \phi \cos \theta)] + \\
 & + \frac{K_V^V \cos \theta}{K_R^V \cos \psi} [-(J_x + \lambda_{55})\dot{P} \sin \theta + [(J_x + \lambda_{55}) \sin^2 \theta + (J_x + \lambda_{66}) \cos^2 \theta] \dot{R} + \\
 & + (S_x + \lambda_{26})(\dot{V} \cos \phi \cos \theta - \dot{W} \sin \phi \cos \theta)] = Q_2 + \frac{K_V^V}{K_R^V} Q_5 \sin \theta - \frac{K_V^V \cos \theta}{K_R^V \cos \psi} Q_6
 \end{aligned} \tag{20}$$

Równanie przemieszczeń pionowych

$$\begin{aligned}
 & (m + \lambda_{33})\dot{W} + (S_x + \lambda_{26})(\dot{Q} \cos \phi - \dot{R} \cos \phi \cos \theta) - \frac{K_W^H}{K_Q^H} \cos \theta [(J_y + \lambda_{55})\dot{Q} + \\
 & - (S_x + \lambda_{26})(\dot{V} \sin \phi - \dot{W} \cos \phi - \frac{1}{2} ((J_x + \lambda_{44}) - (J_y + \lambda_{55})) R^2 \cos 2\theta + \\
 & + (J_x + \lambda_{44})PR \cos \theta + (S_x + \lambda_{26})(VR \cos \phi \cos \theta - WR \sin \phi \cos \theta)] + \\
 & - \frac{K_W^H \sin \theta}{K_Q^H \cos \psi} [-(J_x + \lambda_{44})\dot{P} \sin \theta + [(J_x + \lambda_{44}) \sin^2 \theta + (J_y + \lambda_{55}) \cos^2 \theta] \dot{R} + \\
 & + (S_x + \lambda_{26})(\dot{V} \cos \phi \cos \theta - \dot{W} \sin \phi \cos \theta)] = Q_3 - \frac{K_W^H}{K_Q^H} Q_5 \cos \theta - \frac{K_W^H \sin \theta}{K_Q^H \cos \psi} Q_6
 \end{aligned} \tag{21}$$

Zintegrowane równanie momentów

$$\begin{aligned}
 & (J_x + \lambda_{44})(\dot{P} - \dot{R} \sin \theta) + (S_x + \lambda_{26})(VQ \cos \phi - VR \sin \phi \cos \theta) + \\
 & - (S_x + \lambda_{26})(WQ \sin \phi + WR \cos \phi \cos \theta) = Q_4
 \end{aligned} \tag{22}$$

Prawo sterowania w kanale pochylania

$$T_H \delta_H = K_U^H (U - U_z) + K_W^H (W - W_z) + K_Q^H (Q - Q_z) + K_\theta^H (\theta - \theta_z) \tag{23}$$

Prawo sterowania w kanale odchylenia

$$T_V \delta_V = K_U^V (U - U_z) + K_V^V (V - V_z) + K_R^V (R - R_z) + K_\psi^V (\psi - \psi_z) \tag{24}$$

Uzyskane równania po dołączeniu związków kinematycznych (8)–(12), związków naprowadzania (1)–(3) oraz parametrów zadanych (4)–(7) stanowią podstawę do dalszych badań właściwości dynamicznych pocisku torpedowego i pełnej symulacji jego ruchu.

## SYMULACJA NUMERYCZNA NAPROWADZANIA TORPEDY NA CEL

Stosując przedstawione powyżej dynamiczne równania ruchu, przeprowadzono symulację numeryczną obrazującą poprawność opracowanego modelu matematycznego na przykładzie torpedy kalibru 553 mm (fot. 1.), której model został wykonany w warsztatach Wydziału Mechanicznego Energetyki i Lotnictwa Politechniki Warszawskiej [7]. Konstrukcja modelu pozwala na wymianę części dziobowej oraz sterów i stateczników torpedy. Przeprowadzono badania w tunelu aerodynamicznym, gdzie zmierzono siły działające na torpedę, a następnie wyznaczono bezwymiarowe współczynniki siły nośnej, oporu i momentu pochylającego [4, 7]. Ponieważ współczynniki są bezwymiarowe, mogą być zastosowane niezależnie od środowiska, w jakim porusza się torpeda.



Fot. 1. Model torpedy stosowanej w badaniach

Źródło: fot. E. Ładyżyńska-Kozdraś.

Współczynniki masy przyłączonej dla omawianej torpedy wyznaczono w pracy [7]. Wynoszą one odpowiednio:  $\lambda_{11} = 26$  kg,  $\lambda_{22} = \lambda_{33} = 1334,6$  kg,  $\lambda_{44} = 1470,6$  kgm<sup>2</sup>,  $\lambda_{55} = \lambda_{66} = 7367,6$  kgm<sup>2</sup>,  $\lambda_{26} = \lambda_{35} = 1600$  kgm.

Przyjęto, iż stałe czasowe układu wykonawczego sterowania równe są jedności, natomiast współczynniki wzmocnień w prawach sterowania (13), (14) dobrano, stosując całkowite kryterium jakości sterowania:

$$J_i = \int_0^{t_k} (X_i - X_{iz})^2 dt, \quad (25)$$

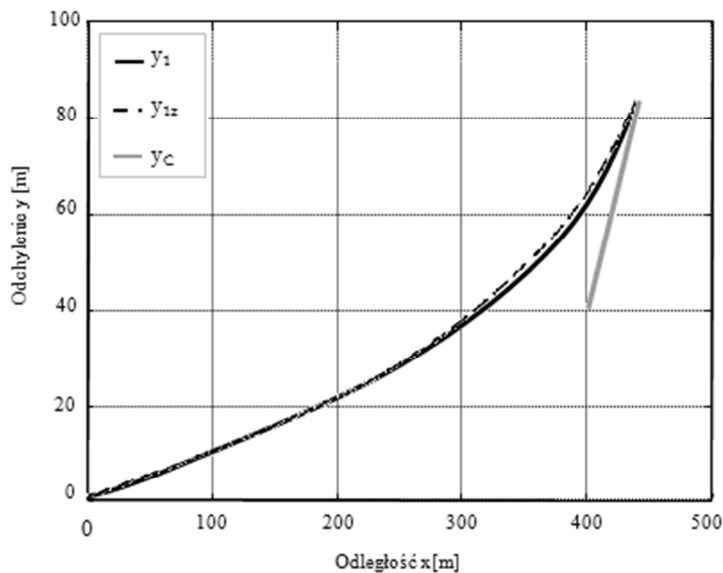
gdzie:

$X_i, X_{iz}$  — odpowiednio rzeczywisty i założony przebieg  $i$ -tej zmiennej zależnej od czasu.

Otrzymujemy wówczas następujące wartości:

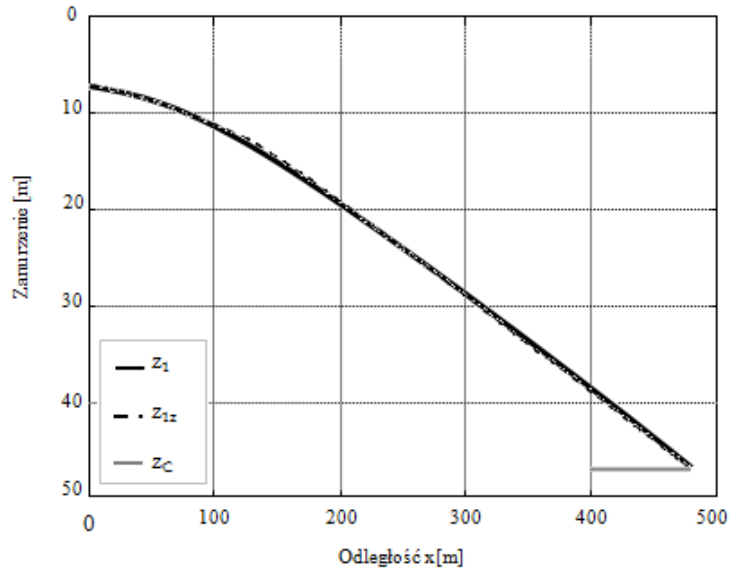
$$\begin{array}{llll} K_x^H = 0,0006 & K_z^H = -0,0004 & K_U^H = 0,0025 & K_W^H = 0,0003 \\ K_Q^H = -1,72 & K_\theta^H = -3,8 & K_x^V = 0,0005 & K_y^V = 0,0004 \\ K_U^V = 0,0004 & K_V^V = -0,00054 & K_R^V = 3,5 & K_\psi^V = 3,2 \end{array}$$

Zasymulowano przestrzeny atak torpedy na zanurzony na głębokość względną 40-metrowy okręt podwodny, który w chwili oddania strzału znajduje się w odległości 400 metrów i porusza się z prędkością 10 węzłów. Rysunki 3–4 obrazują trajektorie pocisku torpedowego zrzutowaną odpowiednio na płaszczyznę poziomą i pionową.



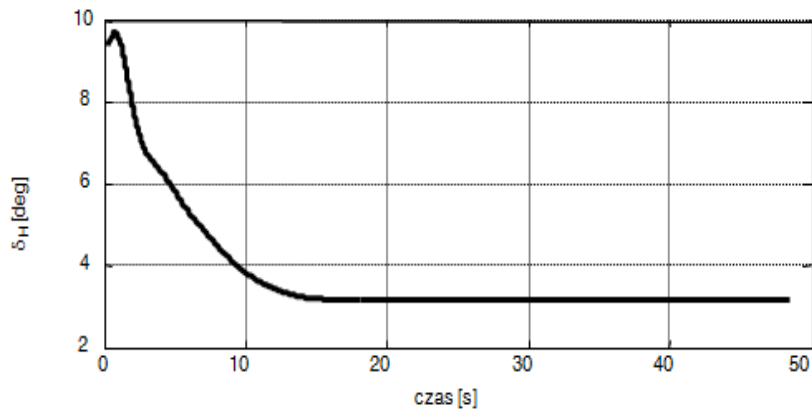
Rys. 3. Odchylenie boczne torpedy naprowadzanej na cel

Źródło: opracowanie własne.



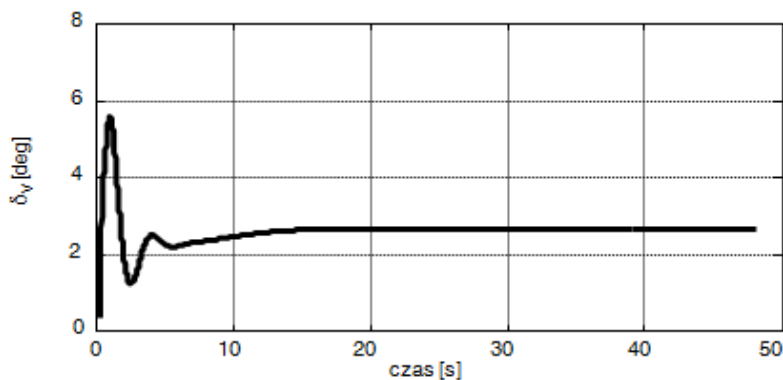
Rys. 4. Zanurzenie naprowadzanej na cel torpedy

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Kąt wychylenia steru zanurzenia w funkcji czasu

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. Kąt wychylenia steru kierunku w funkcji czasu

Źródło: opracowanie własne.

Na przedstawionych wykresach (rys. 3–6) widać, że torpeda zaraz po opuszczeniu wyrzutni okrętu podwodnego rozpoczyna namierzanie manewrującego celu. Proces naprowadzania przebiega prawidłowo. Drgania torpedy są szybko wytłumiane przez układ sterowania i już w początkowej fazie następuje stabilizacja jej ruchu. Przez cały czas pocisk torpedowy utrzymuje parametry zadane wynikające z przyjętego naprowadzania metodą trzech punktów. Sterowanie jest precyzyjne. Po upływie 48 s cel zostaje osiągnięty.

Otrzymane wyniki symulacyjne świadczą o poprawności opracowanego modelu matematycznego. Ruch torpedy przebiega w sposób prawidłowy. Utrzymuje ona parametry wynikające z przyjętej metody naprowadzania.

## WNIOSKI

Stosując prawa sterowania jako kinematyczne związki uchybów od zadanych parametrów sterowania idealnego, związano prawa sterowania z dynamicznymi równaniami ruchu automatycznie sterowanego obiektu. Zastosowanie równań Maggiego dla mechanicznych układów o więzach nieholonomicznych pozwoliło na wprowadzenie nowego podejścia przy opracowywaniu modelu dynamiki ruchu pocisku torpedowego, który w pracach innych autorów [7, 8] traktowany był jako obiekt z więzami holonomicznymi.

Opracowany model matematyczny pocisku torpedowego zawierający sprzężenie dynamiki sterowanego obiektu z nałożonym naprowadzaniem cechuje się uniwersalnością i może zostać w prosty sposób zaadaptowany dla dowolnego obiektu naprowadzanego zarówno w środowisku wodnym, jak i – po wyrugowaniu współczynników masy wody przyłączonej – powietrznym.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Einstein A., *Mój obraz świata*, Wyd. M. Fruchtmanna, Warszawa 1935.
- [2] *Ilustrowany leksykon lotniczy — uzbrojenie*, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa 1991.
- [3] Ładyżyńska-Kozdraś E., *Application of the Maggi equations to mathematical modeling of a robotic underwater vehicle as an object with superimposed non-holonomic constraints treated as control laws*, Solid State Phenomena Mechatronics Systems, 'Mechanics and Materials', 2012, Vol. 180, pp. 152–159.
- [4] Ładyżyńska-Kozdraś E., Maryniak J., *Modelowanie dynamiki torped lotniczych po zrzucie z samolotu*, [w:] *Kierowanie ogniem systemów obrony powietrznej (przeciwlotniczej)*, red. J. W. Kobierski, Gdynia 2010, s. 137–152.
- [5] Ładyżyńska-Kozdraś E., *Modelowanie i symulacja numeryczna ruchomych obiektów mechanicznych skrepowanych więzami nieholonomicznymi w postaci praw sterowania*, Prace naukowe: „Mechanika”, z. 237, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2011.
- [6] Ładyżyńska-Kozdraś E., *The control laws having a form of kinematic relations between deviations in the automatic control of a flying object*, 'Journal of Theoretical and Applied Mechanics', 2009, 47, 2, pp. 363–381.
- [7] Maryniak J., Oskroba B., *Zagadnienia modelowania matematycznego dynamiki ruchu torpedy*, V Sympozjum Wojskowej Techniki Morskiej, t. 1, OBR Centrum Techniki Morskiej, Gdynia 1995.
- [8] Żak B., Kitowski Z., *The control of motion of unmanned underwater vehicle operated near to the bottom sea*, Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Systems, Publisher World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), 2005.



# **APPLICATION OF MAGGI EQUATIONS TO TRAFFIC MODELING OF TORPEDO GUIDED WITH THREE-POINT METHOD TO SUBMARINE**

## **ABSTRACT**

The paper presents the modeling and numerical simulation of the dynamics of a guided torpedo. A mathematical model was developed using the Maggi equations for mechanical systems with non-holonomic constraints. A relatively simple method for automatic control was presented based on introducing the control laws into a general model of an object. The paper shows how, using general mathematical model of the object guided and introducing control laws as non-holonomic constraints, a torpedo can be automatically guided. The control laws introduced constitute kinematic relations, i.e. differences between parameters set and realized in torpedo's motion. The resulting control laws were treated as non-holonomic constraints of the torpedo motion so that it executed the controlled maneuver expected. Kinematic relations combined with homing criteria represent the coordination of movement of the automatically guided torpedo. A numerical simulation proved the correctness of the mathematical model developed.

### Keywords:

modeling, simulation, Maggi equations, mathematical model, torpedo, submarine, three-point method.