

Zygmunt PIĄTEK\*  
Tomasz SZCZEGIELNIAK\*  
Dariusz KUSIAK\*\*

## STRATY MOCY W EKRANACH TRÓJFAZOWEGO JEDNOBIEGUNOWEGO TORU WIELKOPRĄDOWEGO

Do przesyłu energii elektrycznej o dużych prądach stosuje się m.in. osłonięte tory wielkoprądowe. W urządzeniach tego typu przepływ prądu wywołuje efekty natury elektromagnetycznej, termicznej oraz dynamicznej. Poprawne wyznaczenie parametrów elektrodynamicznych ma duże znaczenie praktyczne. Wyznaczenie relacji pomiędzy tymi parametrami jest niezbędne w procesie optymalizacji konstrukcji torów wielkoprądowych. Określenie strat mocy spowodowanych przez indukowane prądy wirowe jest konieczne szczególnie wówczas gdy straty te stanowią znaczną część całkowitych strat mocy w analizowanej konstrukcji. W pracy korzystając z twierdzenia Poyntinga oraz prawa Joule'a-Lenza wyznaczono straty mocy w ekranach jednobiegunowego trójfazowego płaskiego toru wielkoprądowego. W obliczeniach uwzględniono zewnętrzne oraz wewnętrzne zjawisko zbliżenia.

### 1. WSTĘP

Do przesyłu energii elektrycznej o dużych prądach stosuje się m.in. osłonięte tory wielkoprądowe. Jednym z rozwiązań konstrukcyjnych torów wielkoprądowych jest tzw. płaski tor jednobiegunowy (rys. 1) [1-6].

Przepływ prądu przemiennego w urządzeniach elektroenergetycznych wywołuje efekty natury elektromagnetycznej, termicznej i dynamicznej, takie jak: straty mocy, nagrzewanie się konstrukcji układu i otoczenia, siły między poszczególnymi elementami układu. W przypadku torów wielkoprądowych określenie parametrów elektrodynamicznych ma duże znaczenie praktyczne. Znajomość np. strat mocy spowodowanych przez indukowane prądy wirowe jest niezbędna szczególnie wówczas, gdy straty te stanowią znaczną część całkowitych strat mocy w analizowanej konstrukcji [1-6].

Przekroje poprzeczne ekranów oraz przewodów fazowych są duże dlatego przy wyznaczaniu strat mocy nawet dla częstotliwości przemysłowej należy uwzględnić zjawisko naskórkowości oraz zewnętrzne i wewnętrzne zjawisko zbliżenia [1-6].

---

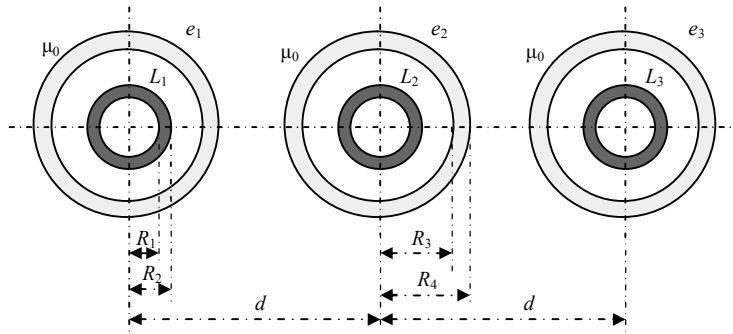
\* Politechnika Częstochowska.

## 2. POLE ELEKTROMAGNETYCZNE W EKRANACH TRÓJFAZOWEGO TORU WIELKOPRĄDOWEGO

Rozpatrzmy pole elektromagnetyczne w ekranach trójfazowego jednobiegunowego toru wieloprądowego przedstawionego na rysunku 1.

W przypadku płaskiej linii ekranowanej przedstawionej na rysunku 1 całkowita gęstość prądu w ekranie  $e_l$  jest sumą gęstości prądów wytworzonych przez każdy z przewodów, czyli

$$\underline{J}_{e1}(r, \Theta) = \underline{J}_{e11}(r, \Theta) + \underline{J}_{e12}(r, \Theta) + \underline{J}_{e13}(r, \Theta) = \underline{J}_{e11}(r, \Theta) + \underline{J}_{e123}(r, \Theta) \quad (1)$$



Rys. 1. Trójfazowy płaski tor wieloprądowy

Całkowita gęstość prądu  $\underline{J}_{e1}(r, \Theta)$  zależy od prądów  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ . Jeśli prądy te tworzą symetryczną trójkę prądów układu trójfazowego, tzn.

$$\underline{I}_2 = \exp[-j \frac{2}{3} \pi] \underline{I}_1 \quad \text{oraz} \quad \underline{I}_3 = \exp[j \frac{2}{3} \pi] \underline{I}_1 \quad (2)$$

to gęstość prądu  $\underline{J}_{e1}(r, \Theta)$  wyraża się wzorem (1) w którym

$$\underline{J}_{e11}(r) = \frac{\underline{\Gamma}_e \underline{I}_1}{2\pi R_3} j_{e0}(r) = \frac{\underline{\Gamma}_e \underline{I}_1}{2\pi R_3} \frac{b_0 I_0(\underline{\Gamma}_e r) + c_0 K_0(\underline{\Gamma}_e r)}{\underline{d}_0} \quad (3)$$

gdzie

$$\underline{d}_0 = I_1(\underline{\Gamma}_e R_4) K_1(\underline{\Gamma}_e R_3) - I_1(\underline{\Gamma}_e R_3) K_1(\underline{\Gamma}_e R_4) \quad (3a)$$

$$\underline{b}_0 = \beta_e K_1(\underline{\Gamma}_e R_3) - K_1(\underline{\Gamma}_e R_4) \quad (3b)$$

$$\underline{c}_0 = \beta_e I_1(\underline{\Gamma}_e R_3) - I_1(\underline{\Gamma}_e R_4) \quad (3c)$$

$$\beta_e = \frac{R_3}{R_4} \quad (0 \leq \beta_e \leq 1) \quad (3d)$$

natomiast gęstość prądu  $\underline{J}_{e123}(r, \Theta)$  określona jest wzorem

$$\underline{J}_{e123}(r, \Theta) = \underline{J}_{e12}(r, \Theta) + \underline{J}_{e13}(r, \Theta) = -\frac{\underline{\Gamma}_e \underline{I}_1}{\pi R_4} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{A}_n \left(\frac{R_4}{d}\right)^n f_{ne}(r) \cos n\Theta \quad (4)$$

gdzie

$$\underline{A}_n = -\frac{1}{2} \left[ (1 + 2^{-n}) + j\sqrt{3} (1 - 2^{-n}) \right] \quad (4a)$$

oraz

$$\underline{f}_{ne}(r) = \frac{K_{n+1}(\underline{\Gamma}_e R_3) I_n(\underline{\Gamma}_e r) + I_{n+1}(\underline{\Gamma}_e R_3) K_n(\underline{\Gamma}_e r)}{I_{n-1}(\underline{\Gamma}_e R_4) K_{n+1}(\underline{\Gamma}_e R_3) - I_{n+1}(\underline{\Gamma}_e R_3) K_{n-1}(\underline{\Gamma}_e R_4)} \quad (4b)$$

przy czym funkcje  $I_0(\underline{\Gamma}_e r)$ ,  $K_0(\underline{\Gamma}_e r)$ ,  $I_1(\underline{\Gamma}_e r)$ ,  $K_1(\underline{\Gamma}_e r)$ ,  $I_n(\underline{\Gamma}_e r)$ ,  $K_n(\underline{\Gamma}_e r)$ ,  $I_{n-1}(\underline{\Gamma}_e r)$ ,  $K_{n-1}(\underline{\Gamma}_e r)$ ,  $I_{n+1}(\underline{\Gamma}_e r)$  i  $K_{n+1}(\underline{\Gamma}_e r)$  są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju, rzędu 0, 1,  $n$ ,  $n-1$  oraz  $n+1$ , obliczane również dla  $r = R_3$  oraz  $r = R_4$  [7]. Natomiast  $\underline{\Gamma}_e = \sqrt{j\omega\mu_0\gamma_e}$  oznacza zespoloną stałą propagacji,  $\omega$  jest pulsacją,  $\gamma_e$  oznacza konduktywność ekranu, a przenikalność magnetyczna próżni  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Całkowite natężenie pola elektrycznego w ekranie  $e_1$  możemy wyrazić wzorem

$$\underline{E}_{e1}(r, \Theta) = \underline{E}_{e11}(r) + \underline{E}_{e123}(r, \Theta) = \frac{\underline{\Gamma}_e \underline{I}_1}{2\pi\gamma_e R_3} \left[ \underline{j}_{e0}(r) - 2 \frac{R_3}{R_4} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{A}_n \left( \frac{R_4}{d} \right)^n \underline{f}_{ne}(r) \cos n\Theta \right] \quad (5)$$

W ekranie pierwszym całkowite pole magnetyczne

$$\underline{H}_{e1}(r, \Theta) = \underline{H}_{e11}(r) + \underline{H}_{e12}(r, \Theta) + \underline{H}_{e13}(r, \Theta) = \mathbf{1}_r \underline{H}_{e1r}(r, \Theta) + \mathbf{1}_\Theta \underline{H}_{e1\Theta}(r, \Theta) \quad (6)$$

gdzie  $\underline{H}_{e11}(r) = \mathbf{1}_\Theta \underline{H}_{e11\Theta}(r)$ , w którym

$$\underline{H}_{e11\Theta}(r) = \frac{\underline{I}}{2\pi R_3} \underline{h}_{e0}(r) = \frac{\underline{I}}{2\pi R_3} \frac{b_0 I_1(\underline{\Gamma}_e r) - c_0 K_1(\underline{\Gamma}_e r)}{\underline{d}_0} \quad (7)$$

a  $\underline{H}_{e12}(r, \Theta)$  i  $\underline{H}_{e13}(r, \Theta)$  są polami magnetycznymi w ekranie pierwszym wytworzonymi przez odpowiednie prądy w przewodach drugim i trzecim.

Składowa promieniowa pola magnetycznego

$$\underline{H}_{e1r}(r, \Theta) = \underline{H}_{e12r}(r, \Theta) + \underline{H}_{e13r}(r, \Theta) = \underline{H}_{e123r}(r, \Theta) \quad (8)$$

Dla symetrycznej trójki prądów fazowych wypadkowa składowa promieniowa pola magnetycznego

$$\underline{H}_{e123r}(r, \Theta) = \underline{H}_{e1r}(r, \Theta) = -\frac{\underline{I}_1}{\pi \underline{\Gamma}_e R_4 r} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{A}_n \left( \frac{R_4}{d} \right)^n n \underline{f}_{ne}(r) \sin n\Theta \quad (9)$$

Wypadkowa składowa styczna pola magnetycznego w ekranie pierwszym ma postać

$$\underline{H}_{e1\Theta}(r, \Theta) = \underline{H}_{e11\Theta}(r) + \underline{H}_{e12\Theta}(r, \Theta) + \underline{H}_{e13\Theta}(r, \Theta) = \underline{H}_{e11\Theta}(r) + \underline{H}_{e123\Theta}(r, \Theta) \quad (10)$$

przy czym składową  $\underline{H}_{e1\theta}(r)$  określamy wzorem (7), natomiast  $\underline{H}_{e123\theta}(r, \Theta)$  dla symetrycznej trójki prądów ma postać

$$\underline{H}_{e123\theta}(r, \Theta) = -\frac{\underline{I}_1}{\pi \underline{\Gamma}_e R_4 r} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{A}_n \left(\frac{R_2}{d}\right)^n \left[-n \underline{f}_{ne}(r) + \underline{g}_{ne}(r)\right] \cos n\Theta \quad (11)$$

gdzie

$$\underline{g}_{ne}(r) = \underline{\Gamma}_e r \frac{K_{n+1}(\underline{\Gamma}_e R_3) I_{n-1}(\underline{\Gamma}_e r) - I_{n+1}(\underline{\Gamma}_e R_3) K_{n-1}(\underline{\Gamma}_e r)}{I_{n-1}(\underline{\Gamma}_e R_4) K_{n+1}(\underline{\Gamma}_e R_3) - I_{n+1}(\underline{\Gamma}_e R_3) K_{n-1}(\underline{\Gamma}_e R_4)} \quad (11a)$$

Składowa styczną wypadkowego pola magnetycznego w ekranie pierwszym ma zatem postać

$$\underline{H}_{e1\theta}(r, \Theta) = \frac{\underline{I}_1}{2\pi R_3} \left\{ \underline{h}_{e0}(r) - \frac{2R_3}{\underline{\Gamma}_e R_4 r} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{A}_n \left(\frac{R_4}{d}\right)^n \left[-n \underline{f}_{ne}(r) + \underline{g}_{ne}(r)\right] \cos n\Theta \right\} \quad (12)$$

Podobnie możemy wyznaczyć pole elektryczne i magnetyczne w ekranie  $e_2$  zastępując we wzorach (5) i (6) prąd  $\underline{I}_1$  prądem  $\underline{I}_2$ , natomiast wielkość  $\underline{A}_n$  poprzez

$$\underline{B}_n = \frac{1}{2} \left\{ -[(-1)^n + 1] + j\sqrt{3} [(-1)^n - 1] \right\} \quad (13)$$

W przypadku ekranu  $e_3$  prąd  $\underline{I}_1$  zastępujemy prądem  $\underline{I}_3$ , zaś wielkość  $\underline{A}_n$  poprzez

$$\underline{C}_n = \frac{(-1)^n}{2} \left[ -(1 + 2^{-n}) + j\sqrt{3} (1 - 2^{-n}) \right] \quad (14)$$

### 3. STRATY MOC W EKRANACH TRÓJFAZOWEGO JEDNOBIEGUNOWEGO TORU WIELKOPRĄDOWEGO

Zespolona moc pozorna ekranu pierwszego wynosi [8]

$$\underline{S}_{e1} = -\oint_S [\underline{E}_{e1}(r) \times \underline{H}_{e1}^*(r)] \cdot d\mathbf{S} = P_{e1} + jQ_{e1} \quad (15)$$

Ze wzoru (15) otrzymujemy

$$\underline{S}_{e1} = \underline{S}_{e0} + \underline{S}_{e123} \quad (16)$$

gdzie moc  $\underline{S}_{e0}$  dana jest wzorem

$$\underline{S}_{e0} = \frac{\underline{\Gamma}_e l I^2}{2\pi \gamma_e R_3^2} \left\{ R_4 \left[ \underline{j}_{e0}(R_4) \underline{h}_{e0}^*(R_4) \right] - R_3 \left[ \underline{j}_{e0}(R_3) \underline{h}_{e0}^*(R_3) \right] \right\} \quad (17)$$

natomiast

$$\underline{S}_{e123} = \frac{jI^2 l}{\pi \gamma_e R_4^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \left( \frac{R_4}{d} \right)^{2n} \left\{ \begin{array}{l} \underline{f}_{ne}(R_4) [-n \underline{f}_{ne}^*(R_4) + \underline{g}_{ne}^*(R_4)] \\ -\underline{f}_{ne}(R_3) [-n \underline{f}_{ne}^*(R_3) + \underline{g}_{ne}^*(R_3)] \end{array} \right\} \quad (18)$$

Analityczne wyodrębnienie we wzorze (16) części rzeczywistej (mocy czynnej) i części urojonej (mocy biernej) jest trudne ze względu na zespoloną stałą propagacji i zespolone zmodyfikowane funkcje Bessela. Dlatego też do wyznaczenia mocy czynnej posłużymy się wzorem [8]

$$P_{e1} = \iiint_V \frac{1}{\gamma_e} \underline{J}_{e1}(r, \Theta) \underline{J}_{e1}^*(r, \Theta) dV = \frac{1}{\gamma_e} \int_0^l \int_0^{2\pi R_4} \int_0^{R_3} \underline{J}_{e1}(r, \Theta) \underline{J}_{e1}^*(r, \Theta) r dr d\Theta dz \quad (19)$$

Ze wzoru (19) otrzymujemy

$$P_{e1} = P_{e0} + P_{e123} \quad (20)$$

gdzie moc  $P_{e0}$  określona jest wzorem

$$P_{e0} = \frac{\underline{\Gamma}_e^* l I_1^2}{4 \pi \gamma_e \beta_e^2 R_4} \frac{\underline{a}_0}{\underline{d}_0 \underline{d}_0^*} \quad (21)$$

a moc

$$P_{e123} = \frac{\underline{\Gamma}_e^* l I_1^2}{2 \pi \gamma_e R_4} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \left( \frac{R_4}{d} \right)^{2n} \frac{\underline{a}_{ne}}{\underline{b}_{ne} \underline{b}_{ne}^*} \quad (22)$$

przy czym stałe  $\underline{a}_0$  oraz  $\underline{a}_{ne}$ ,  $\underline{b}_{ne}$  określone są w pracy [6].

Moc czynna wydzielana w ekranie bez uwzględniania zjawiska naskórkowości

$$P_{0ew} = \frac{l I_1^2}{\pi \gamma_e (R_4^2 - R_3^2)} \quad (23)$$

Wtedy też moc czynną wydzielaną w ekranie pierwszym możemy wyrazić w jednostkach względnych jako stosunek

$$k_{e1}^{(P)} = \frac{P_{e0} + P_{e123}}{P_{0ew}} \quad (24)$$

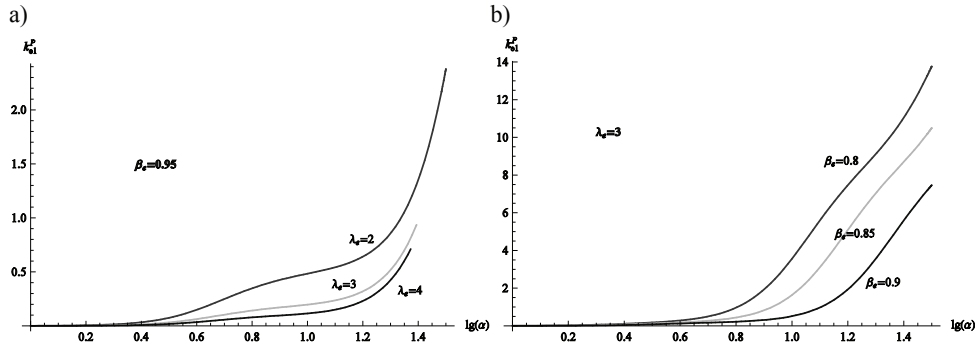
Zależność współczynnika  $k_{e1}^{(P)}$  od parametru  $\alpha_e$  dla różnych wartości względnej grubości  $\beta_e$  ścianki ekranu rurowego oraz różnych wartości względnej odległości  $\lambda_e$  między osiami przewodów przedstawiamy na rysunku 2 (przy czym  $\alpha_e = k_e R_4$ , zaś  $\lambda_e = \frac{d}{R_3}$  ( $0 \leq \lambda_e < 1$ )).

Moc bierną wydzielaną na reaktancji wewnętrznej ekranu rurowego wyznaczymy ze wzoru (15), otrzymując

$$Q_{e1} = Q_{e0} + Q_{e123} \quad (25)$$

przy czym moc  $Q_{e0}$  określona jest wzorem

$$Q_{e0} = -j \frac{l I^2}{2 \pi \gamma_c R_3^2} \left\{ \Gamma_c \left\{ R_4 \left[ \underline{j}_{e0}(R_4) \underline{h}_{e0}^*(R_4) \right] - R_3 \left[ \underline{j}_{e0}(R_3) \underline{h}_{e0}^*(R_3) \right] \right\} - \frac{\Gamma_c^* a_0}{2 \underline{d}_0 \underline{d}_0^*} \right\} \quad (26)$$



Rys. 2. Zależność względnej mocy czynnej w ekranie  $e_1$  od parametru  $\alpha_c$ : a) dla stałej wartości parametru  $\beta_e$  i różnych wartości  $\lambda_e$ , b) stałego parametru  $\lambda_e$  i różnych wartości  $\beta_e$

natomiast moc

$$Q_{e123} = -j (S_{e123} - P_{e123}) = \frac{l I_1^2}{\pi \gamma R_4^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \left( \frac{R_4}{d} \right)^{2n} \times \left\{ \begin{aligned} & n \left[ \underline{f}_n(R_3) \underline{f}_n^*(R_3) - \underline{f}_n(R_4) \underline{f}_n^*(R_4) \right] + \\ & \left[ \underline{f}_n(R_4) \underline{g}_n^*(R_4) - \underline{f}_n(R_3) \underline{g}_n^*(R_3) + j \frac{\Gamma_c^* R_4}{2} \frac{\underline{a}_{ne}}{\underline{b}_{ne} \underline{b}_{ne}^*} \right] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

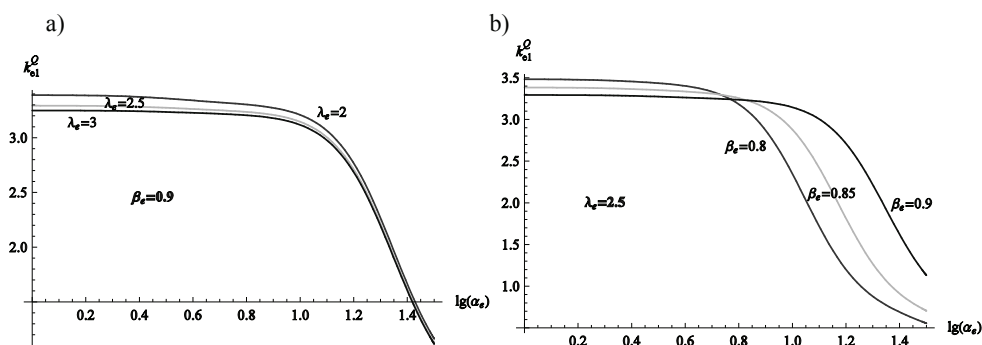
Jeśli wprowadzimy moc bierną odniesienia

$$Q_{0ew} = X_{0ew} I_1^2 = \omega \frac{\mu_0 l}{2 \pi} \left[ \frac{R_3^4}{(R_4^2 - R_3^2)^2} \ln \frac{R_4}{R_3} - \frac{1}{4} \frac{3R_3^2 - R_4^2}{R_4^2 - R_3^2} \right] I_1^2 \quad (28)$$

wówczas moc bierną możemy wyrazić w jednostkach względnych jako stosunek

$$k_{e1}^{(Q)} = \frac{Q_{e0} + Q_{e123}}{Q_{0ew}} \quad (29)$$

Zależność współczynnika  $k_{e1}^{(Q)}$  od parametru  $\alpha_c$  dla różnych wartości parametru  $\beta_e$  oraz  $\lambda_e$  przedstawiamy na rysunku 3.



Rys. 3. Zależność względnej mocy biernej w ekranie  $e_1$  od parametru  $\alpha_e$ : a) dla stałej wartości parametru  $\beta_e$  i różnych wartości  $\lambda_e$ , b) stałego parametru  $\lambda_e$  i różnych wartości  $\beta_e$

W podobny sposób możemy wyznaczyć straty w ekranie  $e_2$  oraz  $e_3$  trójfazowego płaskiego toru wieloprądowego.

#### 4. WNIOSKI

W pracy wyznaczono straty tylko w ekranie  $e_1$  jednobiegunowego płaskiego trójfazowego toru wieloprądowego. Ponieważ moduły  $C_n = A_n$  oznacza to, że straty mocy w ekranie  $e_1$  oraz w ekranie  $e_3$  są jednakowe. Natomiast by określić poziom strat w ekranie  $e_2$  konieczne jest powtórzenie całego toku obliczeń.

W realizowanych w praktyce torach wieloprądowych, dla częstotliwości przemysłowej, wartość parametru  $\alpha_e$  zawarta jest od 5 do 20. Oznacza to, że straty mocy czynnej w ekranie  $e_1$  jednobiegunowego płaskiego toru wieloprądowego mogą być nawet dziesięciokrotnie wyższe od strat mocy czynnej nieuwzględniającej zewnętrznego oraz wewnętrznego zjawiska zbliżenia (rys. 2). O tym jak duża jest różnica pomiędzy tymi mocami decydują parametry geometryczne i fizyczne tegoż toru. Natomiast moc bierna wydzielana na indukcyjności wewnętrznej ekranu  $e_1$  może być nawet trzykrotnie wyższa od moc biernej nie uwzględniającej zjawisk zbliżenia (rys. 3).

Wyznaczając straty mocy należy pamiętać, że wyznaczona z twierdzenia Poyntinga moc bierna związana jest tylko z indukcyjnością wewnętrzną ekranu rurowego. By móc określić całkowitą moc bierną wydzielaną w ekranach jednobiegunowego płaskiego toru wieloprądowego należy również wyznaczyć moc bierną wydzielaną na indukcyjnościach zewnętrznych oraz wzajemnych.

## LITERATURA

- [1] Nawrowski R.: Tory wielkopiędowe izolowane powietrzem lub SF<sub>6</sub>. Wyd. Pol. Poznańskiej, Poznań 1998.
- [2] Piątek Z.: Impedances of high-current busducts. Wyd. Pol. Częst., Częstochowa 2008.
- [3] Kusiak D.: Pole Magnetyczne Dwu i Trójbiegunowych Torów Wielkopiędowych, Praca Doktorska, Częstochowa 2008.
- [4] Szczegielniak T.: Straty mocy w nieekranowanych i ekranowanych rurowych torach wielkopiędowych, Praca Doktorska, Gliwice, 2011.
- [5] Piątek Z., Szczegielniak T., Kusiak D.: Straty mocy w płaskim rurowym trójfazowym torze wielkopiędowym, Wiadomości Elektrotechniczne, nr 11, s. 9-13, 2009.
- [6] Piątek Z., Szczegielniak T., Kusiak D.: Power losses in the screens of the symmetrical three phase high current busduct, Computer Applications in Electrical Engineering. Ed. by Ryszard Nawrowski, Poznań 2012.
- [7] Mc Lachlan N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. PWN, Warszawa 1964.
- [8] Krakowski M.: Elektrotechnika teoretyczna. Pole elektromagnetyczne. WN PWN, Warszawa 1995.

### **POWER LOSSES IN THE SCREENS OF THE SINGLE-POLE THREE PHASE HIGH CURRENT BUSDUCT**

Design of the high current busducts on high currents and voltages causes necessity precise describing of electromagnetic, dynamic and thermal effects. Knowledge of the relations between electrostatics and constructional parameters is necessary in the optimization construction process of the high current busducts. Information about distribution electromagnetic field and power losses is a base into analysis of electrostatics and thermal effects in the high current busducts. In the paper using the Poynting theorem and Jolule-Lenz law the active and reactive power in the screens of the single-pole high current busduct were determined. Into account were taken internal and external proximity effect.