

*Marek Krynke<sup>1</sup>, Krzysztof Mielczarek<sup>2</sup>*

## DOSKONALENIE ZASTĘPCZYCH ELEMENTÓW TOCZNYCH W NUMERYCZNYM MODELOWANIU ŁOŻYSK TOCZNYCH WIEŃCOWYCH

**Streszczenie:** W niniejszym rozdziale zaprezentowano sposoby modelowania części tocznych w łożyskach wieńcowych, w których kulki zastępuje się elementami prętowymi o nieliniowej charakterystyce materiałowej, umieszczonymi pomiędzy środkami krzywizn bieżni w ich przekroju osiowym. Końce elementów prętowych połączono z odpowiednimi węzłami bieżni za pomocą pojedynczych elementów belkowych o dużej sztywności lub za pomocą układu sztywnych belek.

**Słowa kluczowe:** łożyska wieńcowe, zastępcze elementy toczne, metoda elementów skończonych.

### 1. Wprowadzenie

Łożyska toczne wieńcowe są obecnie najczęściej stosowanym obrotowym połączeniem nadwozia i podwozia w maszynach roboczych. Najważniejszą cechą odróżniającą łożyska wieńcowe od konwencjonalnych łożysk tocznych jest ich zdolność do przenoszenia – obok obciążeń osiowych  $Q$  i promieniowych  $H$  – również momentów  $M$  działających w płaszczyznach przechodzących przez oś obrotu łożyska. W przeciwieństwie do typowych łożysk tocznych na ich nośność decydująco wpływa podatność podzespołów wsporczych, w tym podatność pierścieni łożyskowych oraz wielkość luzu w rzędach łożyska (SMOLNICKI T. 2013). Mimo 80 lat stosowania tego typu łożysk, ciągle jeszcze katalogi renomowanych firm zawierają uproszczone charakterystyki ich nośności statycznej. Istniejący stan wiedzy tylko

---

<sup>1</sup> Dr inż., Czestochowa University of Technology, Department of Management, Division of Production Engineering, e-mail: krynke@zim.pcz.pl

<sup>2</sup> Mgr inż., Czestochowa University of Technology, Department of Management, Division of Production Engineering, e-mail: k.mielczarek@wp.pl

pozornie jest wystarczający i w dalszym ciągu stanowi obszar wiedzy wymagający dalszych badań. Dobór łożyska na podstawie tych charakterystyk wiąże się z ryzykiem popełnienia poważnych błędów konstrukcyjnych, skutkujących drastycznym zmniejszeniem trwałości węzła łożyskowego, a w najlepszym razie nie wykorzystaniem w pełni możliwości łożyska (Kania L. 2005, Krynke M., Selejdak J., Borkowski S. 2012).

Znajomość wartości sił działających na elementy toczne łożyska podczas pracy jest podstawą do oceny zdolności łożyska do spełnienia swojej funkcji. Sposób obliczania rozkładu obciążenia wewnętrznego jest przedmiotem większości opracowań autorów zajmujących się problematyką łożysk wieńcowych (ZUPAN S., PREBIL I. 2001). W ogólnym przypadku zagadnienie wyznaczenia rozkładu sił w łożysku wieńcowym jest zagadnieniem wielokrotnie statycznie niewyznaczalnym. Metody obliczeń prowadzące do określenia obciążenia poszczególnych części tocznych można podzielić na metody klasyczne oraz metody numeryczne, najczęściej z wykorzystaniem MES. W metodach klasycznych zazwyczaj rozwiązanie determinuje założenie o idealnej sztywności pierścieni, natomiast metody numeryczne pozwalają na uwzględnienie podatności pierścieni łożyskowych.

Nadal często nośność statyczna łożysk wieńcowych obliczana jest przy założeniu nieodkształcalności pierścieni łożyskowych (KANIA L., KRYNKE M., MAZANEK E. 2012). Jednak w określonych warunkach, w szczególności dla łożysk o dużych średnicach stosowanych w konstrukcjach nie gwarantujących dostatecznej sztywności korpusów, do których są mocowane pierścienie łożyska, założenie takie może prowadzić do zbyt dużych błędów. Dlatego do określania nośności łożysk wieńcowych powinno stosować się metody pozwalające na uwzględnienie podatności pierścieni łożyskowych i śrub mocujących a także podatności ustrojów nośnych maszyny roboczej. Modele obliczeniowe łożysk, które uwzględniają powyższe czynniki najczęściej zbudowane są z elementów skończonych, przy czym łożyska wieńcowe z uwagi na swoje specyficzne cechy wymagają szczególnych metod

modelowania (KRYNKE M., BORKOWSKI S. 2013, KRYNKE M., SELEJDAK J., BORKOWSKI S. 2013).

## 2. Zastępcze elementy toczne w łożyskach wieńcowych

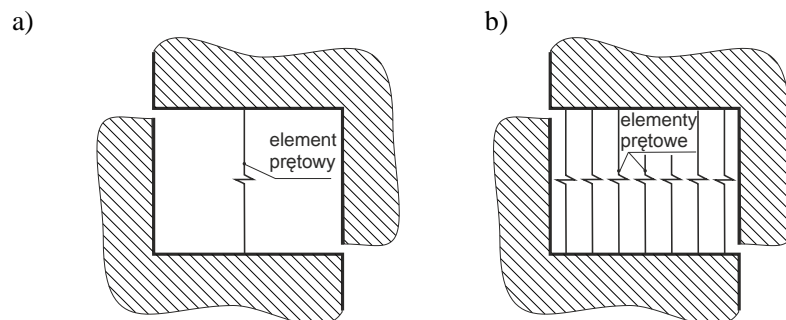
Budowa modeli MES łożysk wieńcowych, z uwagi na ich złożoną konstrukcję, nastęrcza wiele trudności. Jedną z nich jest odpowiednie modelowanie części tocznych. Model MES strefy styku jednego elementu tocznego z bieżnią o dostatecznej dokładności zawiera od kilkunastu do kilkudziesięciu tysięcy stopni swobody (KANIA L., KRYNKE M. 2013). Z uwagi na dużą liczbę tych części (kilkadziesiąt i więcej), budowa pełnego modelu łożyska, z uwzględnieniem kształtu części tocznych i modelowaniem zagadnienia kontaktowego każdej z nich, jest praktycznie niemożliwa. Różnica skali układu element toczny – bieżnia i konstrukcja wsporcza powoduje trudności w uzyskaniu odpowiedniej dokładności obliczeń i osiągnięciu zbieżności rozwiązania numerycznego, ponieważ istnieje zbyt duża różnica sztywności między poszczególnymi elementami skończonymi. Należy podkreślić, że wymagane jest tu przeprowadzenie obliczeń z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznych i fizycznych. Zatem, dążąc do uproszczenia procedur obliczeniowych i tym samym uzyskania optymalnych czasów, obliczeń części toczne w modelach MES zastępuje się jednowymiarowymi elementami skończonymi (elementy liniowe). Najczęściej stosowanymi elementami skończonymi zastępującymi części toczne w modelach obliczeniowych łożysk wieńcowych są:

- elementy prętowe o odpowiedniej jednostronnej nieliniowej charakterystyce materiałowej naprężenie – odkształcenie,
- elementy specjalne (superelementy), przeznaczone głównie do łożysk kulkowych, bazujące na superelemencie zaproponowanym przez T. Smolnickiego w pracy (SMOLNICKI T. 2013).

Elementy zastępcze w postaci elementów prętowych są stosowane przede wszystkim do łożysk wałeczkowych, w których wałeczki zastępuje się najczęściej pojedynczymi elementami prętowymi o długości

równej średnicy wałeczka. Do zastąpienia wałeczków można także wykorzystać układ dwóch lub więcej elementów prętowych, co umożliwi zamodelowanie niesymetrycznego przenoszenia obciążenia przez wałeczek (rys. 1). Ten rodzaj elementów zastępczych można również wykorzystać w modelach obliczeniowych łożysk kulkowych o stałym kącie działania wynoszącym  $90^\circ$ .

Element prętowy ma ściśle określoną długość i wartość przekroju poprzecznego oraz odpowiednio zdefiniowaną charakterystykę materiałową  $\sigma(\varepsilon)$  i pełni rolę nieliniowej sprężyny (KANIA L. 2006). Założony luz osiowy  $s$  łożyska lub ewentualny zacisk wstępny  $\Delta$  w modelach MES można zdefiniować bezpośrednio poprzez przesunięcie charakterystyki materiałowej elementu prętowego zgodnie z kierunkiem odkształcenia  $\varepsilon$  jak na rysunku 2.2 lub przez użycie dodatkowych elementów kontaktowych o regulowanej szczelinie np. elementy typu *gap*.



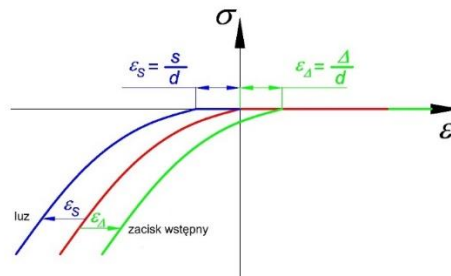
**Rys. 1. Zastępcze elementy prętowe dla wałeczków: pojedynczy element prętowy (a), układ elementów prętowych (b).**

*Źródło: opracowanie własne*

Wprowadzenie superelementu do modelu numerycznego łożyska pozwala uwzględnić:

- podatność podzespołu wsporczego,
- zmienny kąt działania części tocznych,
- luz (zacisk wstępny) w układzie element toczny – bieżnia,

- błędy wykonania podzespołów współpracujących,
- przewyższenie elementu tocznego (pozorna ujemna sztywność).

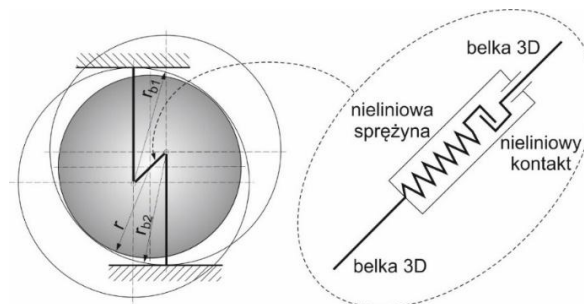


**Rys. 2. Charakterystyka naprężenie – odkształcenie elementu prętowego zastępującego waleczki w modelach MES łożysk.**

Źródło: opracowanie własne

Stąd, superelement stosowany jest przede wszystkim do modelowania kulek w łożysku wieńcowym o zmiennym kącie działania na skutek przenoszonych przez łożysko obciążeń.

Do budowy superelementu wg T. Smolnickiego wykorzystano elementy skończone belkowe z przegubami, element sprężysty o nieliniowej charakterystyce siła – ugięcie, oraz element kontaktowy (rys. 3).

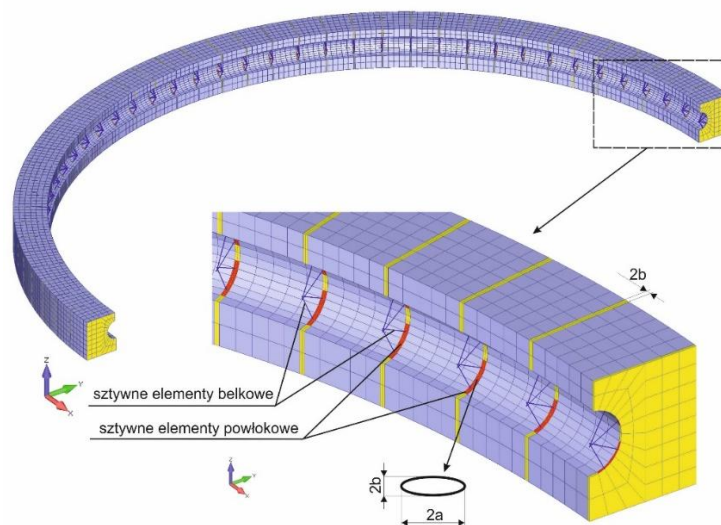


**Rys. 3. Schemat ideowy superelementu.**

Źródło: SMOLNICKI T. 2013

### 3. Modelowanie kontaktu między elementami tocznymi a bieżniami

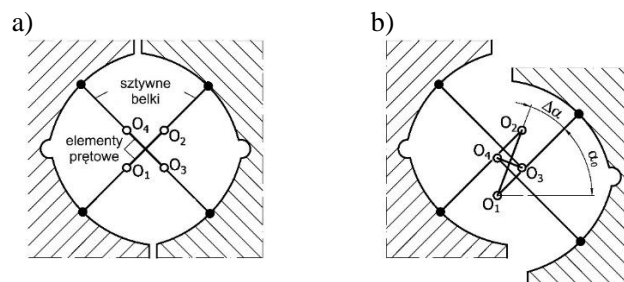
Numeryczny model MES łożyska wieńcowego, w którym części toczne także zastępuje się elementami specjalnymi zaprezentowano w pracy (CHAIB Z., DAIDIE A., GHOSN A. 2008). Kulki, podobnie jak w metodzie Smolnickiego, zastąpiono nieliniowymi sprężynami umieszczonymi pomiędzy środkami krzywizn bieżni w ich przekroju osiowym. Końce nieliniowych sprężyn połączone z odpowiednimi bieżniami za pomocą układu sztywnych belek. Węzły belek nie łączono jednak bezpośrednio z węzłami siatki pierścieni, lecz przy pomocy pośrednich sztywnych elementów powłokowych o rozmiarach odpowiadających długości  $2a$  i szerokości  $2b$  elipsy styku kulki z bieżnią przy maksymalnym obciążeniu elementu tocznego (rys 4). Taki sposób modelowania części tocznych nie wymaga dodatkowej korekcji charakterystyki zastępczej sprężyny (eliminacja II etapu wyznaczania charakterystyki zastępczej) (KANIA L. 2003).



**Rys. 4. Modelowanie kontaktu między elementami tocznymi a bieżniami.**

Źródło: opracowanie własne na podstawie (CHAIB Z., DAIDIE A., GHOSN A. 2008).

W niniejszej pracy omówiono trzy rodzaje superelementów oznaczonych jako S1, S2, S3 w nieco zmodyfikowanej formie, w stosunku do superelementu zaproponowanego przez T. Smolnickiego. We wszystkich trzech przypadkach proponowanych elementów zastępczych zrezygnowano z elementu kontaktowego, zaś element sprężysty zastąpiono elementem prętowym o nieliniowej i asymetrycznej charakterystyce materiałowej. Zmodyfikowany superelement S1 składa się z układu dwóch elementów belkowych połączonych przegubowo w miejscu położenia środków krzywizn bieżni łożyska w ich przekroju osiowym z pojedynczym elementem prętowym. Pozostałe końce elementów belkowych są połączone z węzłami siatki pierścieni łożyska (rys. 5).

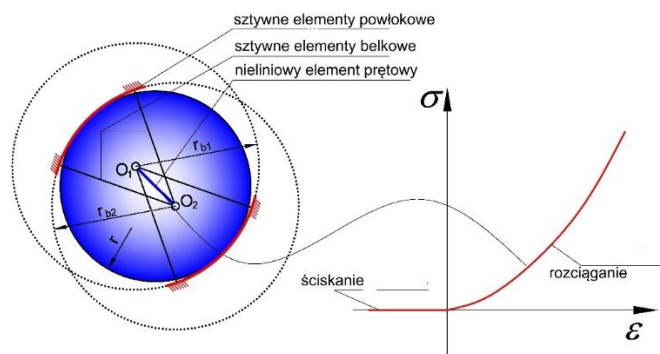


**Rys. 5. Schemat superelementu S1 zastosowany w łożysku jednorzędowym:  
w stanie nominalnym (a), pod obciążeniem (b).**

Źródło: opracowanie własne

Zasadnicza różnica w budowie superelementu S2 wynika z jego zabudowy. W bieżniach pierścieni łożyska wyodrębniono strefy, które są zdyskretyzowane elementami powłokowymi *shell*. Sztywność tych elementów jest bardzo duża w porównaniu do sztywności sąsiednich struktur. Rozmiary tych stref odpowiadają rozmiarom pola styku elementu tocznego z bieżnią łożyska przy jego maksymalnym obciążeniu. W przypadku łożysk kulkowych jest to elipsa styku o długości  $2a$  i szerokości  $2b$ . Zatem, w superelemencie typu S2, elementy prętowe łączą się z bieżniami łożyska za pomocą układu dwóch par elementów

belkowych, których pozostałe końce są połączone z węzłami elementów powłokowych *shell* i jednocześnie odpowiadają odpowiednim węzłom siatki pierścieni łożyska (rys. 6).

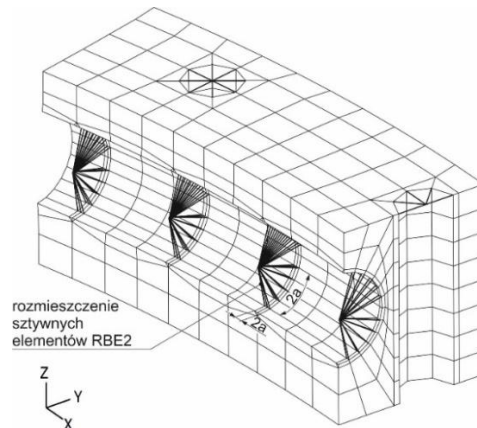


**Rys. 6. Superelement S2 z nieliniową asymetryczną charakterystyką materiałową dla kulek.**

Źródło: opracowanie własne

Superelement S3 jest kolejną modyfikacją superelementu S2. W superelemencie S3 zrezygnowano ze sztywnych elementów powłokowych, natomiast na ich miejsce wprowadzono odpowiedni układ sztywnych elementów *RBE2* (rys. 7). Za pomocą elementów *RBE2* można zdefiniować sztywne połączenie węzłów. Niezależność stopni swobody sieci węzłów łączonych przez te elementy określa się w jednym punkcie, w którym jednocześnie są określone stopnie swobody pozostałych węzłów *RBE2*. Punktami centralnymi siatki węzłów łączonych przez elementy *RBE2* są dwa węzły elementów prętowych, natomiast pozostałe węzły są węzłami pierścieni łożyska. Pierścienie łożyska są dyskretyzowane elementami bryłowymi 8 – węzłowymi, przy czym należy tak przeprowadzić podział na elementy skończone, by można było wyodrębnić węzły elementów w strefach styku elementów tocznych z bieżniami i by rozmiary tych stref odpowiadały rozmiarom pola styku elementu tocznego przy jego maksymalnym obciążeniu, podobnie jak w przypadku superelementu S2.



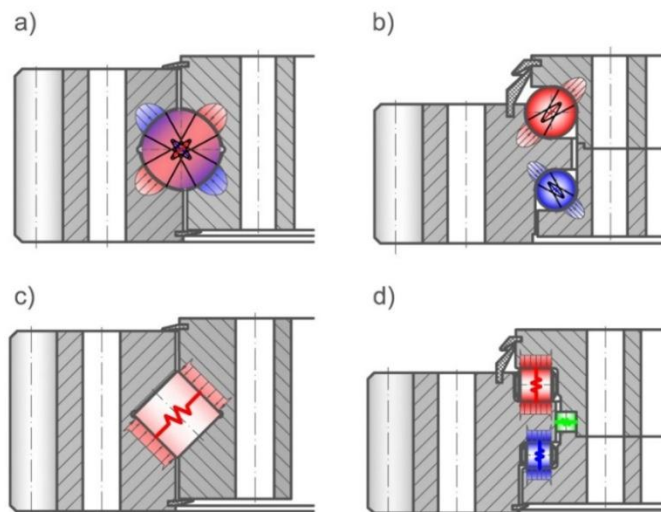


**Rys. 7. Zabudowa superelementu S3 w zewnętrznym pierścieniu  
łożyska kulkowego jednorzędowego.**

Źródło: opracowanie własne

Programy w systemie obliczeniowym metodą elementów skończonych pozwalają na definicję dowolnych nieliniowych materiałów dla elementów prętowych (ADINA 2007). Definicja charakterystyki materiałowej oparta jest na wprowadzeniu do programu w postaci tabelarycznej poszczególnych punktów tej charakterystyki tj. odkształcenia  $\varepsilon$  i odpowiadającego mu naprężenia  $\sigma$ . Zatem każde odkształcenie elementu prętowego powoduje odpowiadające mu naprężenie, co z kolei pozwala na określenie siły przenoszonej przez element prętowy. W przypadku, kiedy odkształcenia elementów prętowych przekroczyłyby wartości podane przy definicji materiału, nastąpi przerwanie obliczeń ze względu na brak zbieżności rozwiązania. W celu zabezpieczenia obliczeń, zaleca się przy definicji materiału dla elementów prętowych zastępujących części toczne, większy zakres charakterystyki materiałowej wykraczający poza wyliczoną sztywność układu *element toczny – bieżnia*. Zatem, charakterystyki materiałowe elementu prętowego  $\sigma(\varepsilon)$ , które są wyznaczone w odrębnej analizie strefy styku pojedynczego elementu tocznego współpracującego z bieżnią łożyska lub za pomocą zależności empirycznych, są wprowadzone do

systemu obliczeń zgodnie ze wszystkimi zasadami MES – konieczność uwzględnienia zmiennej wartości  $\sigma(\varepsilon)$  jest zdefiniowane przez tabelę *odkształcenie – naprężenie*. Za pośrednictwem tych charakterystyk symuluje się odkształcenia zachodzące w obszarze styku pary kontaktowej. Superelement pozwala określić przemieszczenia rzeczywistego elementu tocznego poddanego działaniu obciążenia zewnętrznego przekazywanego na części toczne za pośrednictwem pierścieni łożyskowych, a w szczególności zmiany kąta działania łożysk kulkowych, co trudno jest uzyskać innymi metodami. Przykłady zastosowania superelementu S2 do modelowania kulek w łożyskach wieńcowych kulkowych jedno i dwurzędowych pokazano na rysunku 8a i 8b, natomiast zastosowanie elementów prętowych do modelowania łożysk wałeczkowych krzyżowych i wałeczkowych trzyczędowych pokazano na rysunkach 8c i 8d,



**Rys. 8. Zastępcze elementy toczne: a) w łożysku jednorzędowym czteropunktowym, b) w łożysku kulkowym dwurzędowym, c) w łożysku wałeczkowym krzyżowym, d) w łożysku wałeczkowym trzyczędowym.**

Źródło: opracowanie własne

#### 4. Podsumowanie

Modele obliczeniowe wieńcowych łożysk tocznych z uwagi na ich złożoność muszą podlegać różnego rodzaju uproszczeniom. Dotyczy to również obliczania nośności łożysk z wykorzystaniem metody elementów skończonych.

Przedstawiona analiza wskazuje na różne możliwości stosowania metod numerycznych w praktycznych obliczeniach. Obliczenia MES w zakresie łożysk pozwalają na dokładne określenie rozkładu sił w poszczególnych elementach tocznych łożyska niemożliwych do wyznaczenia metodami analitycznymi, które ograniczają się do obliczeń łożysk przy założeniu nieodkształcalności jego pierścieni. Takie modelowanie umożliwia szybką weryfikację wszystkich zmian konstrukcyjnych czy technologicznych wprowadzanych do geometrii rzeczywistego łożyska, łącznie z uwzględnieniem cech geometrycznych struktury osadzenia łożyska w maszynie. Kluczowym etapem w przedstawionej metodyce obliczeń pozostaje sposób modelowania części tocznych, które zastępuje się elementami specjalnymi (superelementami). Zarówno budowa takiego superelementu jak i jego charakterystyka zastępcza może w zasadniczy sposób wpływać na otrzymywane wyniki obliczeń. Uzyskanie odpowiedniej charakterystyki nośności łożyska wymaga wzięcia pod uwagę zarówno zjawisk zachodzących w strefie kontaktu elementów tocznych z bieżniami, jak również wpływ metody modelowania części tocznych w numerycznym modelu MES łożyska.

#### Literatura

1. ADINA 2007. *Theory and Modeling Guide, Volume 1*: ADINA. ADINA R&D, Inc., Watertown.
2. CHAIB Z., DAIDIE A., GHOSN A. 2008. *3D simplified finite elements analysis of load and contact angle in a slewing ball bearing*, Journal of Mechanical Design, 130 8: 082601 (8 pages).

3. KANIA L. 2003. *Charakterystyki zastępcze waleczków w modelowaniu łożysk tocznych wieńcowych*, Przegląd Mechaniczny, 57, 7-8: 35-40.
4. KANIA L. 2006. *Modelling of rollers in slewing bearing calculations with the use of finite elements*, Mechanism and Machine Theory, 41, 11: 1359-1376.
5. KANIA L., KRYNKE M. 2013. *Computation of the General Carrying Capacity of Slewing Bearings*. Engineering Computations Vol.30 nr 7. s.1011-1028.
6. KANIA L., KRYNKE M., MAZANEK E. 2012. *A Catalogue Capacity of Slewing Bearings*. Mechanism and Machine Theory Vol. 58. s. 29-45.
7. KRYNKE M., BORKOWSKI S. 2013. *Metodyka budowania modeli obliczeniowych MES łożysk wieńcowych dotycząca dyskretyzacji pierścieni łożyska*. Modelowanie Inżynierskie. Nr 49. s.40-46.
8. KRYNKE M., SELEJDAK J., BORKOWSKI S. 2012. *Diagnosis and Damage of Bearings*. Manufacturing Technology Vol.12 nr 13. s. 140-144.
9. KRYNKE M., SELEJDAK J., BORKOWSKI S. 2013. *Determination of Static Limiting Load Curves for Slewing Bearing with Application of the Finite Element Method*. Materials Engineering = Materialove Inzinierstvo Vol.20 Iss.2. s.64-70.
10. SMOLNICKI T. 2013. *Wielkogabarytowe toczne węzły obrotowe. Zagadnienia globalne i lokalne*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
11. ZUPAN S., PREBIL I. 2001. *Carrying angle and carrying capacity of a large single row ball bearing as a function of geometry parameters of the rolling contact and the supporting structure stiffness*, Mechanism and Machine Theory, 36, s. 1087-1103.