



Metoda dekompozycji lepkościowej w obliczeniach numerycznych płynów lepkich na przykładzie zmiany topologii struktur wirowych

AUTOR: Andrzej Kosior^{a,*}

REKOMENDOWANE PRZEZ: Henryk Kudela^a

^a Zakład Numerycznego Modelowania Przepływów, Instytut Inżynierii Lotniczej, Procesowej i Maszyn Energetycznych, Politechnika Wroclawska

* Adres do korespondencji: andrzej.kosior@pwr.edu.pl, tel. 71 320 35 53

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiona została metoda dekompozycji lepkościowej. Zastosowana do równań ruchu lepkiego i nieściśliwego płynu pozwala rozbić krok czasowy na dwa podkroki. Przykład zastosowania tej metody został pokazany z wykorzystaniem metody cząstek wirowych typu „Wir w komórce”, która pozwala na dokładne badanie ewolucji wirowości i co nie mniej ważne bardzo dobrze nadaje się do wykorzystania w obliczeniach równoległych. Badania dynamiki wirowości mają podstawowe znaczenie dla badań nad turbulencją, jak również rozwiązywania zagadnień inżynierskich. W pracy przedstawione zostaną wyniki symulacji numerycznych zjawiska zmiany topologii (rekonekcji) dwóch równoległych rurek wirowych oraz zderzenia dwóch pierścieni wirowych.

SŁOWA KLUCZOWE: *metoda dekompozycji lepkościowej, obliczenia równoległe, karty graficzne*

1. WPROWADZENIE

Numeryczne modelowanie przepływów płynów lepkich jest bardzo popularne w zagadnieniach technicznych w tym także z dziedziny energetyki. Symulowane są zarówno zagadnienia przepływowe (np. praca turbiny) jak i cieplnych (np. zjawiska zachodzące wewnątrz kotła). Metoda ta pozwala w szybki sposób przetestować różne rozwiązania bez potrzeby budowania dużych i drogich stanowisk eksperymentalnych.

Do rozwiązywania równań NavieraStokesa w obecnej pracy wykorzystano metodę cząstek wirowych, w której korzysta się z metody dekompozycji lepkościowej. Wykorzystuje ona fakt, że w przepływie cieczy lepkiej rządzą dwa zjawiska: konwekcja oraz dyfuzja. Krok czasowy związany z ewolucją płynu rozbijany jest na dwie części. W pierwszym podkroku płyn przemieszczany jest zgodnie z prawami ruchu płynu nielepkiego. W drugim symulowany jest wpływ lepkości poprzez rozwiązanie równania dyfuzji.

Zrozumienie dynamiki i wzajemnych oddziaływań pomiędzy różnymi strukturami wirowymi jest kluczowym elementem w objaśnianiu i kontrolowaniu ruchu płynu [1]. Głównym źródłem wiedzy na temat wzajemnej interakcji struktur wirowych jest wizualizacja przepływu. Niestety uważa się, że nie jest ona w stanie właściwie oddać ewolucji struktur wirowych, zwłaszcza przy długim czasie obserwacji [2], [3]. Wiąże się to z faktem, że w eksperymentach używa się pasywnych cząstek (jak np. barwnik), które nie podążają w płynie tak jak elementy wirowe. W ostatnich latach często wykorzystywane są w badaniach metody optyczne takie jak PIV czy LDA. Są to jednak wtórne metody wyznaczania pola wirowości obarczone błędem zarówno pomiarowym jak i wykorzystywanej metody różniczkowania. Na tym tle symulacje numeryczne wydają się być odpowiednim podejściem do badania wzajemnych oddziaływań pomiędzy strukturami wirowymi. Do badań numerycznych wybraliśmy metodę cząstek wirowych typu Wir w komórce (ang. Vortex-in-Cell – VIC) [4]. W metodzie tej używane są cząstki niosące informację o wirowości. Śledzenie przemieszczeń tych cząstek i zmiany ich intensywności pozwala na badanie ewolucji pola wirowości. Znając rozkład przestrzenny pola wirowości można wyznaczyć pole prędkości płynu.

Obliczenia trójwymiarowe ruchu płynu, niezależnie od metody numerycznej, wymagają długich czasów obliczeniowych. Aby temu zaradzić coraz częściej do obliczeń numerycznych wykorzystuje się środowiska wieloprocesorowe umożliwiające obliczenia równoległe. Dla metody VIC wykorzystaliśmy do obliczeń równoległych karty graficzne (ang. Graphics Processing Units – GPUs). Karty graficzne produkowane z myślą o grach komputerowych stanowią tanie i łatwo dostępne narzędzie do obliczeń równoległych. Metoda typu VIC bardzo dobrze nadaje się do zrównoleglania. Zarówno ruch cząstki, jak i przeniesienie informacji z cząstki na węzły z procesami niezależnymi do pozostałych cząstek. Dzięki temu obliczenia dla wszystkich cząstek mogą być wykonywane równoległe. Szczegóły implementacji metody cząstek wirowych wykorzystującej w obliczeniach karty graficzne można znaleźć w artykule [5].

Do testów pokazujących poprawność trójwymiarowej implementacji symulacji ruchu płynu metodą VIC wybrane zostały dwa przypadki: zmiany topologii linii wirowych dwóch równoległych rurek wirowych oraz zderzenia dwóch pierścieni wirowych. Zjawisko zmiany topologii linii wirowych nazywane jest czasami przełączaniem się linii wirowych lub rekonekcją (od angielskiej nazwy *reconnection*). Wyniki otrzymane dla pierwszego przypadku były porównywane z wynikami numerycznymi przedstawionymi w [2]. Wyniki eksperymentalne dla drugiego przypadku można znaleźć w [6].

2. ALGORYTM DEKOMPOZYCJI LEPKOŚCIOWEJ

Równania ruchu dla płynu lepkiego i nieściśliwego zawierają w sobie dwa zjawiska: konwekcję (człony bezwładnościowe) oraz dyfuzję. Ze względu na małą wartość współczynnika lepkości płynu numeryczne rozwiązywanie takiego równania stanowi poważne wyzwanie. Wynika to z faktu, że wprowadzenie do obliczeń siatki numerycznej wprowadza również lepkość numeryczną. Rząd tej lepkości, wynikającej z dyskretyzacji równań,

może być właśnie rzędu rzeczywistej lepkości płynu. Może to prowadzić do zmiany fizyki badanego numerycznie zjawiska.

Jednym ze sposobów radzenia sobie z tego typu problemami jest dekompozycja operatorów („operator splitting”). W metodzie tej rozwiązywane zagadnienie rozbijane jest na części i rozwiązywane w podkrokach. W zastosowaniu do równań ruchu płynu lepkiego i nieściśliwego metoda ta pozwala osobno rozwiązać część nielepką równań w pierwszym podkroku oraz wpływ lepkości w drugim. Dzięki temu możliwe jest zastosowanie schematów numerycznych odpowiednich dla danej części rozwiązywanego zagadnienia.

Założmy przykładowo, że zadane jest zagadnienie początkowe opisujące ewolucję zjawiska:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) = 0, U(0) = U_0 \quad (1)$$

Niech S_t będzie operatorem rozwiązującym powyższe zagadnienie, czyli $U(t) = S_t U_0$. Przyjmijmy, że operator A może być rozłożony na sumę dwóch elementarnych operatorów: $A = A_1 + A_2$. Dla każdego z operatorów A_j można otrzymać rozwiązanie:

$$U_j(t) = S_t^j U_0 = e^{-tA_j} U_0, j = 1, 2 \quad (2)$$

Przybliżone rozwiązanie zagadnienia całkowitego otrzymuje się jako:

$$U(\Delta tn) \approx [S_{\Delta t}^2 S_{\Delta t}^1]^n U_0 = (e^{-\Delta t A_2} e^{-\Delta t A_1})^n U_0 \quad (3)$$

Dla operatorów liniowych wzór (3) nosi nazwę wzoru Lie-Trottera-Kato [8].

Rozpatrując pojedynczy krok czasowy można napisać za [9], że rozwiązanie dokładnie spełnia równanie:

$$U(t_{n+1}) = e^{(A_1 + A_2)\Delta t} U(t_n) \quad (4)$$

Rozwijając wzór (4) w szereg Taylora otrzymujemy:

$$e^{(A_1 + A_2)\Delta t} = I + \Delta t(A_1 + A_2) + \frac{1}{2} \Delta t^2 (A_1 + A_2)^2 + \dots \quad (5)$$

Dla wnętrza nawiasu po prawej stronie równania (3) rozwinięcie w szereg Taylora będzie miało postać:

$$\begin{aligned} e^{A_1 \Delta t} e^{A_2 \Delta t} &= (I + \Delta t A_1 + \frac{1}{2} \Delta t^2 A_1^2 + \dots)(I + \Delta t A_2 + \frac{1}{2} \Delta t^2 A_2^2 + \dots) = \\ &= I + \Delta t(A_1 + A_2) + \frac{1}{2} \Delta t^2 (A_1^2 + 2A_1 A_2 + A_2^2) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Porównując rozwinięcia (5) i (6) w ogólnym przypadku otrzymamy:

$$(A_1 + A_2)^2 = (A_1^2 + A_1A_2 + A_2A_1 + A_2^2) \neq (A_1^2 + 2A_1A_2 + A_2^2) \quad (7)$$

Te dwa rozwinięcia są sobie równe w przypadku, w którym operatory A_1 i A_2 komutują. W przeciwnym wypadku metoda dekompozycji lepkościowej jest pierwszego rzędu. Możliwe jest podniesienie rzędu metody dekompozycji lepkościowej do rzędu drugiego poprzez zastosowanie metody Stranga [9]:

$$\begin{aligned} U^* &= S_{\Delta t/2}^1 U(t_n), \\ U^{**} &= S_{\Delta t}^2 U^* \\ U(t_{n+1}) &= S_{\Delta t/2}^1 U^{**} \end{aligned} \quad (8)$$

Dekompozycja operatorów pozwala na uzyskanie prostej do implementacji i bardziej efektywnej metody. Dzięki niej można połączyć wyspecjalizowane metody numeryczne rozwinięte w celu efektywnego rozwiązania danej klasy zagadnień ewolucyjnych. W ten sposób można wybierać ze zbioru wydajnych i dobrze przetestowanych metod numerycznych dla podstawowych operatorów, które można ze sobą połączyć w celu rozwiązania skomplikowanych problemów. Użycie dekompozycji operatorów pozwala również na łatwą zmianę schematu numerycznego dla jednego operatora na inny również rozwiązujący ten operator. Co więcej wykorzystanie takiego algorytmu pozwala czasami na zmniejszenie zapotrzebowania na pamięć operacyjną, zwiększenie przedziału stabilności metody, a nawet stworzenie metody stabilnej bezwarunkowo. Dla zagadnień wielowymiarowych może to być czasami jedyna możliwa do zastosowania metoda. Ostatnią zaletą jest możliwość (oraz łatwość) dodawania kolejnych poziomów złożoności do modelu numerycznego, ponieważ każdy nowy, kolejny wyraz (model) będzie niezależnym modulem numerycznym.

Przykładem zastosowania metody dekompozycji operatora może być popularna, dobrze opanowana metoda naprzemiennych kierunków (ang. Alternating Direction Implicit – ADI), w której wielowymiarowe zagadnienie jest redukowane do sekwencji zagadnień jednowymiarowych.

2.1. RÓWNANIACH RUCHU PŁYNU

Równania ruchu lepkiego i nieściśliwego płynu mają postać:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta u \quad (9)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (10)$$

gdzie $u = (u_1, u_2, u_3)$ jest wektorem prędkości, ρ - gęstością płynu, p - ciśnieniem a ν - kinematycznym współczynnikiem lepkości. Równanie (4) można przetransformować do równania Helmholtza na ewolucję wirowości [7]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) u + \nu \Delta \omega, \quad (11)$$

gdzie $\omega = \nabla \times u$.

W użytej w obecnym artykule metodzie cząstek wirowych wykorzystuje się algorytm dekompozycji lepkościowej [8]. Rozwiązanie otrzymywane jest w dwóch krokach. Najpierw rozwiązywane jest nielepkie równanie Eulera:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) u \quad (12)$$

Następnie, efekt lepkości symulowany jest przez rozwiązanie równania dyfuzji:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \Delta \omega, \quad (13)$$

$$\omega(x, 0) = \omega_l, \quad (14)$$

gdzie ω_l jest rozkładem wirowości otrzymanych z kroku nielepkiego.

Do rozwiązywania równań (13) i (14) można użyć dowolnej odpowiedniej metody takiej jak np. Particle Strength Exchange (PSE) [4] lub metody różnic skończonych.

Z nieściślności przepływu (10) wynika istnienie potencjału wektorowego A takiego, że:

$$u = \nabla \times A \quad (15)$$

Zakładając, że potencjał wektorowy $A = (A_1, A_2, A_3)$ jest bezdywergentny, $\nabla \cdot A = 0$, to jego składowe można wyznaczyć rozwiązując trzy równania Poissona [7]:

$$\Delta A_i = -\omega_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

Równanie Poissona może być efektywnie rozwiązane przy użyciu siatki numerycznej i metody różnic skończonych. Otrzymane rozwiązanie równania (16) pozwala na wyznaczenie pola prędkości na siatce z zależności (15). Prędkość z siatki jest interpolowana na aktualne położenie cząstki. Takie podejście pozwala na znaczące przyspieszenie obliczeń (~1000 razy dla przypadku 100000 cząstek w porównaniu do algorytmu „każdy z każdym” oraz ~100 razy w porównaniu do szybkiej metody wielopolowej [10]). Układ równań algebraicznych otrzymany z dyskretyzacji równania Poissona (11) był rozwiązywany metodą wielosiatkową (ang. Multigrid method) [11]. Przemieszczenie cząstek w aktualnym polu prędkości jako:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u \quad (17)$$

było realizowane metodą Rungego–Kutty czwartego rzędu. Na koniec każdego kroku czasowego intensywność cząstek była interpolowana na węzły siatki:

$$\omega_j = \sum_p \tilde{\alpha}_{p_n} \varphi \frac{(x_j - \tilde{x}_p)}{h} h^{-3} \quad (18)$$

gdzie j jest indeksem węzła siatki numerycznej a p jest indeksem cząstki.

W niniejszej pracy wykorzystywane było następujące jądro interpolacyjne [4]:

$$\varphi(x) = \begin{cases} (2 - 5x^2 + 3|x|^3)/2 & \text{dla } 0 \leq |x| \leq 1 \\ (2 - |x|)^2(1 - |x|)/2 & \text{dla } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{dla } 2 \leq |x| \end{cases} \quad (19)$$

Dla przypadku trójwymiarowego $\varphi = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)$. Zastosowane jądro interpolacyjne φ spełnia warunek [4]:

$$\sum_j (x - x_j)^k \varphi \frac{(x - x_j)}{h} = 0 \quad 1 \leq |k| \leq m - 1 \quad m = 3 \quad (20)$$

z czego wynika, że jest rzędu $m = 3$ [4]. Oznacza to, że wielomiany do rzędu m włącznie będą dokładnie reprezentowane przez jądro (14).

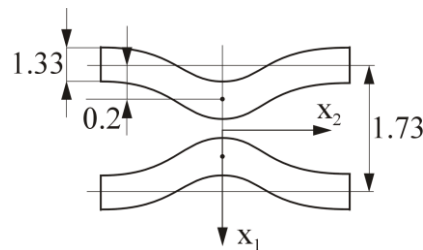
3. WYNIKI

Jest wiele dowodów eksperymentalnych pokazujących, że struktury wirowe przypominające rurki ewoluują i oddziałują ze sobą w przepływach z dużą liczbą Reynoldsa (przepływach turbulentnych). Struktury wirowe najczęściej zajmują pewne wydzielone miejsca w przestrzeni przepływu. Można założyć, że większość przestrzeni jest wypełniona płynem bezwirowym, a przepływ jest determinowany przez rurki wirowe o małej średnicy. Kiedy rurki te zbliżają się do ścianek stałych lub siebie nawzajem zachodzą gwałtowne procesy ewolucyjne [12]. Rozrywanie się i łączenie linii wirowych, tzw. rekonekcja, może być podstawowym procesem ewolucji trójwymiarowych wirów i w mechanice turbulencji [13].

Celem przedstawionych testów numerycznych jest pokazanie, że metoda cząstek wirowych jest w stanie odtworzyć wyniki otrzymane w rzeczywistych eksperymentach. W poprzednich artykułach autorzy pokazali zgodność wyników otrzymanych przy pomocy tej metody z wynikami badań numerycznych przeprowadzonych innymi metodami [14].

3.1. WPŁYW LICZBY REYNOLDSA NA PRZEBIEG PROCESU REKONEKCJI NA PRZYKŁADZIE DWÓCH RÓWNOLEGLYCH RUREK WIROWYCH

Dane do testu pochodzą z pracy [2] i są przedstawione na rys. 1.



Rys. 1. Warunki początkowe dla przypadku równoległych rurek wirowych z symetrycznym zaburzeniem

Początkowy rozkład wirowości w rdzeniu opisany był wzorem:

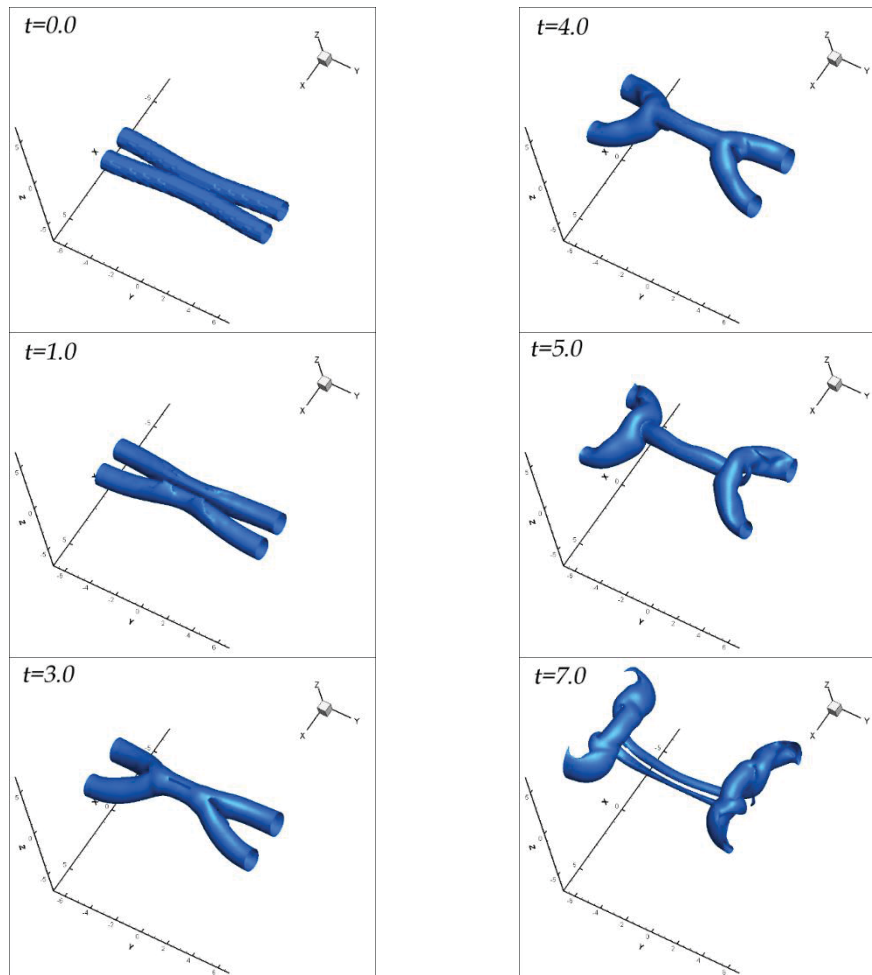
$$\omega(r) = \omega_0 e^{-\frac{r^2}{a^2}} \quad (21)$$

gdzie $\omega_0 = 20,0$, a $a = 0,667$. Na tej podstawie obliczona została cyrkulacja Γ i liczb Reynoldsa:

$$\Gamma = \int_0^a \omega(r) 2\pi r dr, \quad \text{Re}_\Gamma = \frac{\Gamma}{\nu} \quad (22)$$

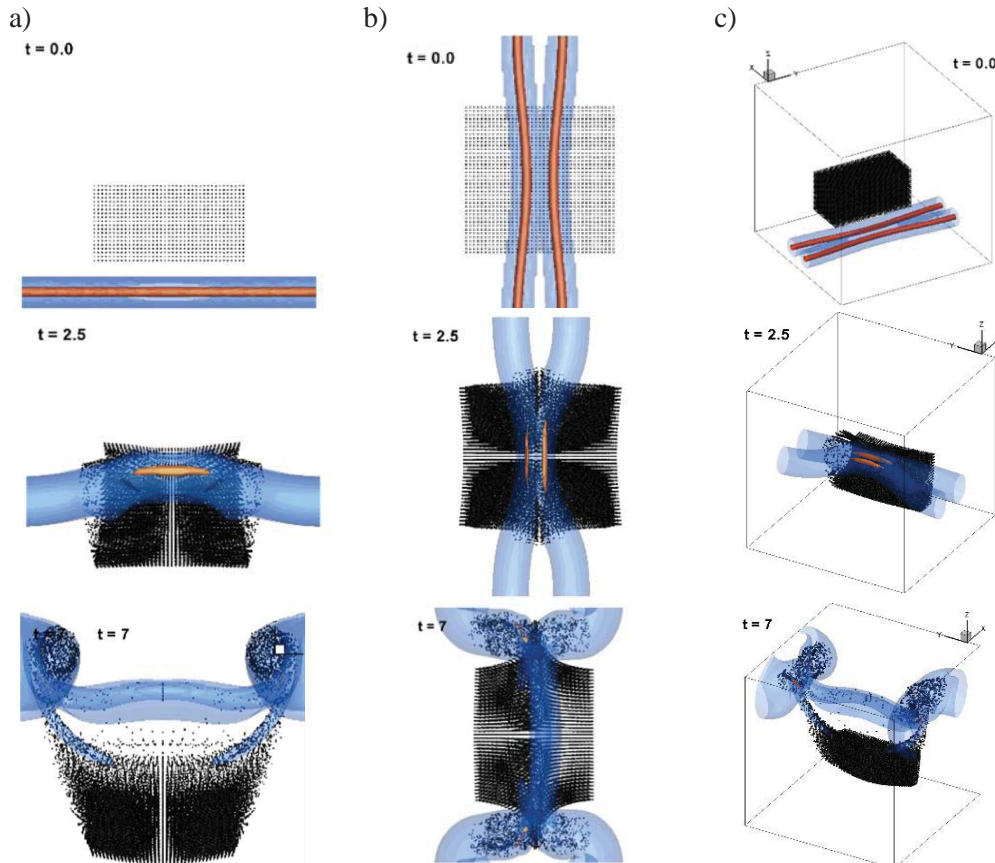
gdzie ν jest kinematycznym współczynnikiem lepkości. Dla prezentowanego przypadku wynosiły one odpowiednio $\Gamma = 17.65$ i $\text{Re}_\Gamma = 1003$. Obszar obliczeniowy stanowił sześcian o wymiarach $4\pi \times 4\pi \times 4\pi$ z okresowymi warunkami brzegowymi we wszystkich kierunkach. Liczba węzłów w każdym kierunku wynosiła $N = 128$. Do obliczeń przyjęto krok czasowy $\Delta t = 0.01$. Jakościowa zgodność z wynikami przedstawionymi w pracy [2] jest bardzo dobra.

Interakcja rurek wirowych przedstawiona na rys. 2 przechodzi przez klasyczne etapy rozrywania i łączenia się rurek wirowych wymienione przez innych autorów (np. [1], [2]). Rurki wirowe zbliżają się do siebie i zderzają się w $t = 1$. W miarę zbliżania się wirów do siebie ich rdzenie spłaszczają się, stają się coraz bardziej zdeformowane i przekształcają się w strukturę głowa - ogon (ang. head-trail). Ten etap charakteryzuje się aktywną dyfuzją (ang. cross-diffusion), której towarzyszy mostowanie pomiędzy dwoma strukturami wirowymi. Wytworzone mosty pod wpływem wzajemnej indukcji zaczynają się poruszać w górę i oddalać od siebie. Z powodu tego ruchu efekty lepkościowe pomiędzy dwoma strukturami nie mają okazji do całkowitej anihilacji wirowości. Pozostałości wirowości, zwane nićmi, zaczynają się wyginać w górę z powodu prędkości indukowanej przez nowe struktury wirowe.



Rys. 2. Obraz izopowierzchni $|\omega| = 0.15\omega_0$ dla ewolucji dwóch równoległych rurek wirowych

Mieszanie płynu otaczającego rurki wirowe biorące udział w procesie rekonekcji jest przedstawione za pomocą pasywnych markerów na rys. 3. Widać, że proces rekonekcji zintensyfikował proces mieszania w pewnym obszarze przepływu. Markery leżące w środkowej części obszaru przepływu, w której doszło do zmiany topologii linii wirowych, zostały uniesione przez przepływ i wymieszane. Z kolei cząstki pasywne leżące w obszarze przez który nie przechodziły rurki wirowe pozostały praktycznie nieruszone. W tym wypadku widać ograniczony zasięg działania procesu rekonekcji.



Rys. 3. Ruch pasywnych markerów wywołany polem prędkości powstałym w czasie rekonekcji dwóch rurek wirowych widziany z różnych punktów: a) z boku, b) z góry, c) pod kątem

3.2. ZDERZENIE DWÓCH PIERŚCIENI WIROWYCH

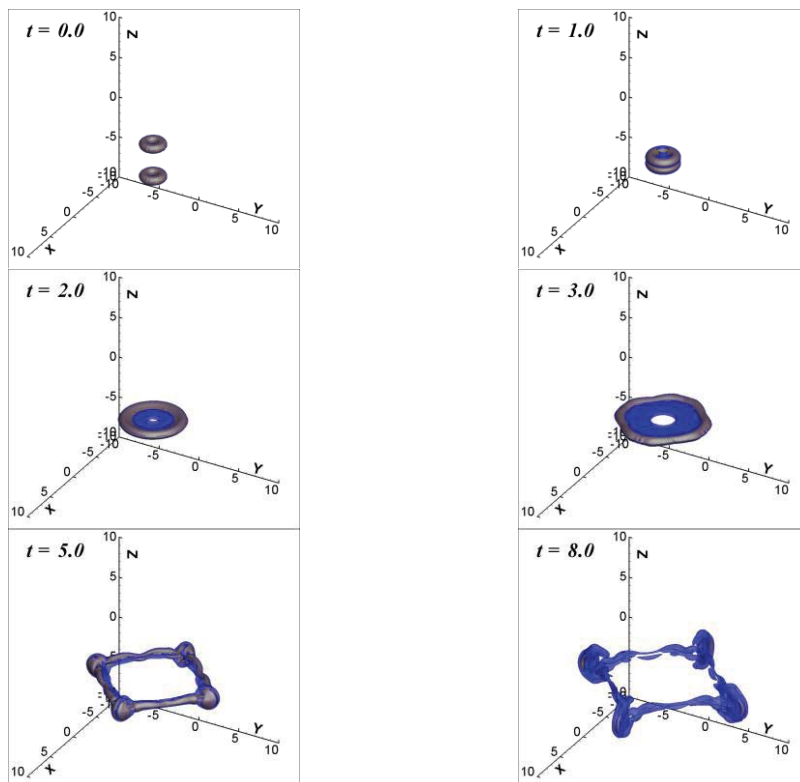
Ten przypadek pokazuje zderzenie dwóch pierścieni wirowych. Wyniki eksperymentalne można znaleźć w artykule [6] oraz na stronie internetowej autora.

W tym przypadku parametry we wzorach (21) i (22) miały wartości $\omega_0 = 20,0$, $a = 0,5$, $R = 1,0$, $\nu = 0,01$, $Re_\Gamma = 1000$. Wyniki w formie izopowierzchni wirowości przedstawione są na rys. 4a wizualizacja pasywnymi markerami na rys. 5.

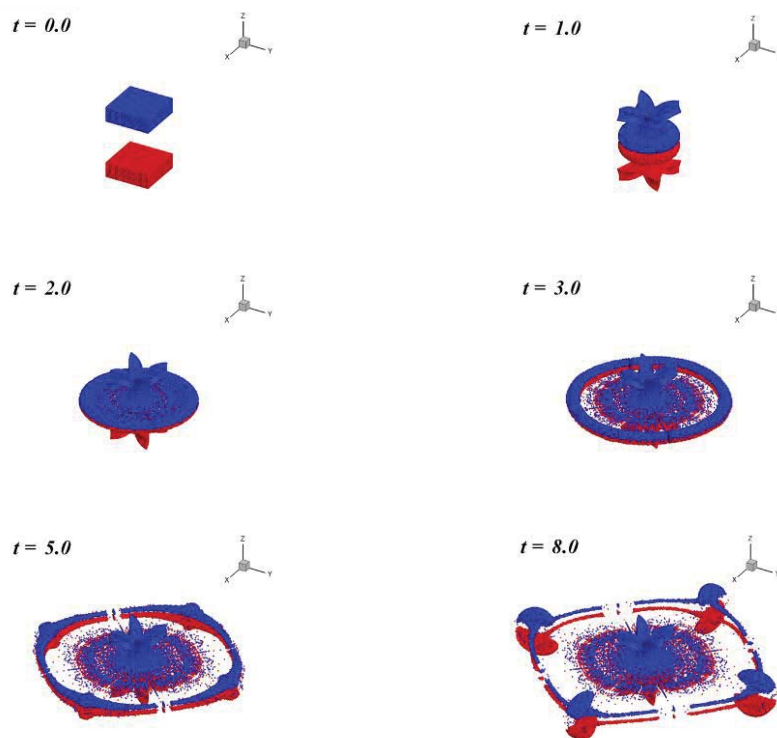
W czasie zbliżania się do siebie prędkości indukowane przez pierścienie powodują rozszerzanie się ich i spłaszczenie rdzenia (przekroju). W chwili $t=2$ na rys. 4 widoczny jest specyficzny rozkład wirowości nazywany przez Lima membraną. Zgodnie z [2] w momencie kiedy pierścienie osiągają wielkość ok. 4 początkowych średnic pojawia się asymetryczne zaburzenie w postaci fali. Powoduje ono powstanie na obwodzie każdego pierścienia czterech skupisk wirowości. Wyniki numeryczne pokrywają się z wynikami eksperymentu dla liczb Reynoldsa $Re < 1000$. W eksperymencie liczba skupisk

wirowości jest dużo większa niż w obliczeniach numerycznych. Powodem może być wpływ warunków brzegowych obszaru obliczeniowego lub inny sposób wyznaczania liczby Reynoldsa w pracy [2].

Wiadomo, że w przepływie lepkiem wirowość nie jest unoszona przez cząstki płynu i dlatego trudno jest przeprowadzić wizualizację ewolucji pola wirowości. Z tego powodu lepszym sposobem porównania otrzymanych wyników numerycznych z eksperymentem jest umieszczenie w obszarze obliczeniowych pasywnych markerów unoszonych przez płyn. Na rys. 5 przedstawione są pokolorowane pasywne markery. Kolory odpowiadają początkowemu położeniu. W chwili początkowej pierścienie wirowe są całkowicie schowane w obszarze pokrytym markerami. Każdy z tych obszarów zawiera markery rozłożone na siatce posiadającej $100 \times 100 \times 50$ węzłów. Oczywiście część markerów leżała poza obszarem pierścieni. W chwili $t=1$ widoczny jest ogon stworzony z markerów znajdujących się początkowo poza pierścieniami wirowymi. W chwili $t=3$ widoczna jest membrana. Obraz przedstawiony w chwili $t=5$ bardzo przypomina wyniki otrzymane przez Lima w pracy [2]. Z chwili $t=8$ jasno wynika, że proces rekonekcji w tym wypadku nie zaszedł. Markery pasywne nie zostały zmieszane.



Rys. 4. Obraz izopowierzchni $|\omega| = 0.05\omega_0$ (niebieskie) oraz $|\omega| = 0.2\omega_0$ (żółte – prześwituje jako szare przez powierzchnie niebieskie) dla zderzenia dwóch pierścieni wirowych



Rys. 5. Zderzenie dwóch pierścieni wirowych przedstawione za pomocą pasywnych markerów

4. POSUMOWANIE

W pracy przedstawiona została implementacja metody cząstek wirowych typu „wir w komórce” wykorzystująca metodę dekompozycji lepkościowej. Implementacja ta została wykorzystana w testach przedstawiających rekonekcję dwóch rurek wirowych oraz zderzenia pierścieni wirowych. Otrzymane wyniki numeryczne zostały porównane z wynikami numerycznymi otrzymanymi innymi metodami przez innych autorów (pierwszy przypadek testowy) oraz z wynikami rzeczywistych eksperymentów (drugi przypadek testowy). W obu tych testach została otrzymana wysoka jakościowa zgodność rezultatów. Pokazuje, że przedstawiona w artykule implementacja metody cząstek wirowych jest w stanie poprawnie symulować ewolucję struktur wirowych w czasie. Zastosowanie metody dekompozycji lepkościowej pozwala na dokładne modelowanie efektów lepkościowych.

LITERATURA

- [1] **Kida S., Takaoka M.:** *Vortex Reconnection, Annul Review of Fluid Dynamics*, Vol. 26, 169–189, 1994.
- [2] **Melander V.M., Hussain F.:** *Cross-linking of two antiparallel vortex tubes, Phys. Fluids A*, Vol. 1, Issue 4, 633-636, 1989.
- [3] **Kida S., Takaoka M.:** *Breakdown of frozen motion of vorticity field and vorticity reconnection, Journal of Physical Society of Japan*, Vol. 60, Issue 7, 2184-2196, 1991.
- [4] **Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D.:** *Vortex Methods: Theory and Practice*, Cambridge University Press, 2000.
- [5] **Kosior A., Kudela H.:** *Parallel computations on GPU in 3D using the Vortex Particle Method, Computers and Fluids*, Vol. 80, 423-428, 2013.
- [6] **Lim T.T., Nickels T.B.:** *Instability and reconnection in the head-on collision of two vortex rings, Nature*, Vol. 357, 225-227, 1992.
- [7] **Wu J.Z., Ma H.Y., Zhou M.D.:** *Vorticity and Vortex Dynamics*, Springer, 2006.
- [8] **Holden H., Karlsen K.H., Lie K.-A., Risebro W.H.:** *Splitting Methods for Partial Differential Equations with Rough Solutions*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [9] **LeVeque R.J.:** *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, European Mathematical Society, 2010.
- [10] **Cottet G.-H., Poncet P.:** *Advances in direct numerical simulations of 3D wall-bounded flows by Vortex-in-Cell methods, Journal of computational physics*, 2003.
- [11] **Trottenber U., Oosterlee C.W., Schuller A., .:** *Multigrid*, Academic Press, 2001.
- [12] **Zabusky N.J., Melander M.V.:** *Three-dimensional vortex tube reconnection: Morphology for orthogonally-offset tubes, Physica D*, Vol. 37, 555-562, 1989.
- [13] **Saffman P.G.:** *A model of vortex reconnection, Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 212, 395-402, 1990.
- [14] **Kudela H., Kosior A.:** *Parallel reconnection of vortex tube reconnection using a graphics card and the 3D Vortex-in-Cell method, Procedia IUTAM*, Vol. 7, 59-66, 2013.