

Janusz TYKOCKI\*  
Andrzej JORDAN\*  
Daniel ŻELAZNY\*

## BADANIE WRAŻLIWOŚCI UKŁADÓW WIELO-PARAMETRYCZNYCH

W pracy przedstawiono badanie wrażliwości układów, wykorzystując w tym celu *zmodyfikowaną zasadę Pareto*. Zasada Pareto zazwyczaj stosowana w naukach ekonomicznych została wykorzystana do badania wrażliwości dwóch układów fizycznych: fragmentu sieci średniego napięcia z turbinami wiatrowymi oraz przemieszczeń belki stalowej poddanej równomiernemu obciążeniu. W pierwszym przypadku funkcją celu  $F_p$  były straty mocy czynnej w układzie, w drugim przemieszczenie końca belki.

SŁOWA KLUCZOWE: Reguła Pareto, elektrownie wiatrowe, wrażliwość układu

### 1. WSTĘP

Badaniem wrażliwości układów zajmuje się teoria sterowania, wprowadzając do analizy *funkcję wrażliwości*  $W(s,x) = dG(s,x)/dx \cdot x/G(s,x)$ , gdzie  $G(s,x)$  jest transmitancją układu a,  $x$  zmienianym parametrem. Jedną z przyczyn analizy wrażliwości jest chęć zmniejszenia wpływu parametrów układu na wielkości regulowane [1]. Obecnie zajmujemy się metodą, która w pewnym sensie również bada wrażliwość układu na zmiany jego parametrów i jest stosowana pod nazwą zasady Pareto.

Zasada Pareto zasadniczo stosowana w naukach ekonomicznych [2, 3, 4] ze szczególnym uwzględnieniem analizy zasobów magazynowych [5, 6] znalazła również zastosowanie w naukach technicznych [7, 8]. W tym przypadku określono elementy zbiorów  $A$ ,  $B$ ,  $C$  mające podstawowy, średni i minimalny wpływ na funkcję celu  $F_p$  charakteryzującą techniczny układ wielo-parametryczny. Elementy zbiorów  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są parametrami układu.

W niniejszej pracy omówimy zastosowanie *zmodyfikowanej zasady Pareto* do analizy dwóch układów, z których jeden jest opisany układem równań algebraicznych i jego badania dotyczą strat mocy czynnej w sieci elektroenergetycznej, drugi opisany układem równań o pochodnych zwyczajnych i dotyczy anali-

\* Państwowa Wyższa Szkoła Informatyki i Przedsiębiorczości, Łomża.

zy przemieszczenia belki zamocowanej jednostronnie, poddanej równomiernemu obciążeniu. Modyfikacja *zasady Pareto* polega na:

- wprowadzeniu podstaw algebry liniowej zamiast wykresów *ABC* do analizy wyników,
- globalnej ocenie wartości funkcji celu w zależności od parametru podstawowego  $p_p$ .

## 2. PODSTAWY TEORETYCZNE METODY

Opracowanie metodyki badań wynikającej z „zasady Pareto 80/20” w naukach technicznych, ze szczególnym uwzględnieniem układów energetycznych jest oryginalnym osiągnięciem, w którym wykorzystano definicje oraz algorytm analizy układów wielo-parametrycznych [3, 4].

*Def.* Układem wielo-parametrycznym nazywamy układ fizyczny, który możemy opisać funkcją zależną od wielu parametrów

$$F_p = f(p_1, \dots, p_n) \quad (1)$$

Funkcja  $F_p$  zależy od wektora  $P$ ,

$$P = [p_1, \dots, p_n] \quad (2)$$

którego składowymi są parametry  $p_1, \dots, p_n$ , przy czym zmiany wartości  $p_1, \dots, p_n$  są ograniczone

$$m_k \leq p_k \leq n_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Zmiany wartości parametrów wynikają z przyjętych założeń, procesu technologicznego stosowanego w produkcji elementów układu lub zmian fizycznych środowiska, w którym znajduje się układ, natomiast  $m_k, n_k$  są dolną i górną granicą tych zmian. Funkcję  $F_p$  nazywać będziemy *funkcją celu*, parametry  $p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) *parametrami bazowymi* a ich zmiany *zakresem zmian bazowych*. Dodatkowo wprowadzimy parametr *podstawowy*  $p_p$  w celu globalnej analizy układu.

Ogólna metodyka postępowania jest następująca: mając model matematyczny opisujący układ określamy parametry bazowe, zakres zmian bazowych tych parametrów oraz parametr podstawowy  $p_p$ .

W celu analizy wpływu poszczególnych parametrów na wartość funkcji  $F_p$  definiujemy względną funkcję celu  $F_{k,pw}$

$$F_{k,pw} = \frac{F_{k,p \max} - F_{k,p \min}}{F_{k,p \max}} \quad (4)$$

gdzie  $F_{k,p \max} - F_{k,p \min}$  jest różnicą między maksymalną i minimalną wartością funkcji celu  $F_p$  wyznaczoną dla parametrów  $m_k$  i  $n_k$  (tzn. dla założonego zakresu zmian bazowych parametru ( $k = 1, 2, \dots, n$ )). Następnie wprowadzamy element skumulowanej wartości  $a_k$  (współczynnik wagi) odpowiadający parametrowi  $p_k$ , dla każdego parametru podstawowego  $p_p$  ( $p = 1, \dots, M$ )

$$a_k = \frac{F_{k,pw}}{\sum_k F_{k,pw}} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

otrzymując względną sumaryczną wartość współczynników wagi, tzn. wartość skumulowaną  $S = 1$ .

$$S = \sum_k a_k = 1 \quad (6)$$

Współczynniki wagi  $a_k$  są elementami macierzy  $A = [a_{ij}]$ , ( $i = 1, \dots, M$ ;  $j = 1, \dots, n$ ), przy czym  $M$  jest liczbą parametrów podstawowych a  $n$  liczbą parametrów bazowych. Na przykład, element  $a_{11}$  macierzy  $A$  odpowiada parametrowi bazowemu  $a_1$  dla parametru podstawowego  $p_1$ .

Obecnie przedstawimy analizę wpływu parametrów bazowych na wartość funkcji celu dla dwóch układów wielo-parametrycznych: sieci elektrycznej średniego napięcia z turbinami wiatrowymi oraz belki stalowej zamocowanej sztywno jednym końcem i poddanej równomiernemu obciążeniu.

### 3. SIEĆ ŚREDNIEGO NAPIĘCIA Z TURBINAMI WIATROWYMI

Na rys. 1 został przedstawiony fragment sieci elektroenergetycznej średniego napięcia. Pięć turbin wiatrowych o mocy 2 MVA każda, jest podłączonych stale do węzła  $w_0$ , Natomiast jedną turbinę o mocy 2 MVA podłączono kolejno do poszczególnych węzłów układu. Zakładamy, że parametrem podstawowym jest numer węzła  $w_k$  ( $k = 0, 1, \dots, 18$ ), natomiast parametrami bazowymi wartości impedancji obciążenia  $Z_k$  ( $k = 0, 1, \dots, 22$ ) (rys. 1.) Wartości impedancji przedstawiono w tabeli 1 i tabeli 2.

Tabela 1. Impedancja linii zasilającej

$Z_L$	$Z_{L1}$	$Z_{L2}$	$Z_{L3}$	$Z_{L4}$	$Z_{L5}$	$Z_{L6}$	$Z_{L7}$	$Z_{L8}$	$Z_{L9}$	$Z_{L10}$	$Z_{L11}$	$Z_{L12}$	$Z_{L13}$	$Z_{L14}$	$Z_{L15}$	$Z_{L16}$	$Z_{L17}$	$Z_{L18}$	$Z_{L19}$	$Z_{L20}$	$Z_{L21}$	$Z_{L22}$	$Z_{L23}$	$Z_{L24}$	$Z_{L25}$	$Z_{L26}$	$Z_{L27}$	$Z_{L28}$	$Z_{L29}$
[Ω]	0,5	0,1	0,3	0,3	0,5	0,4	0,3	0,2	0,7	0,1	0,6	0,8	0,2	0,3	2,4	0,6	0,7	0,8	0,1	0,6	1,2	0,6	0,4	1,7	0,5	0,1	0,4	0,1	0,1

Tabela 2. Impedancje obciążenia

$Z$	$Z_0$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$	$Z_7$	$Z_8$	$Z_9$	$Z_{10}$	$Z_{11}$	$Z_{12}$	$Z_{13}$	$Z_{14}$	$Z_{15}$	$Z_{16}$	$Z_{17}$	$Z_{18}$	$Z_{19}$	$Z_{20}$	$Z_{21}$	$Z_{22}$
[kΩ]	3,6	3,6	9,0	9,0	9,0	3,6	4,5	9,0	9,0	9,0	9,0	9,0	9,0	9,0	9,0	9,0	2,3	9,0	9,0	9,0	3,6	9,0	9,0

Funkcją celu  $F_p = P_s$  są straty mocy czynnej w sieci, parametrem podstawowym kolejne węzły. Moc strat liczymy na podstawie wzoru:

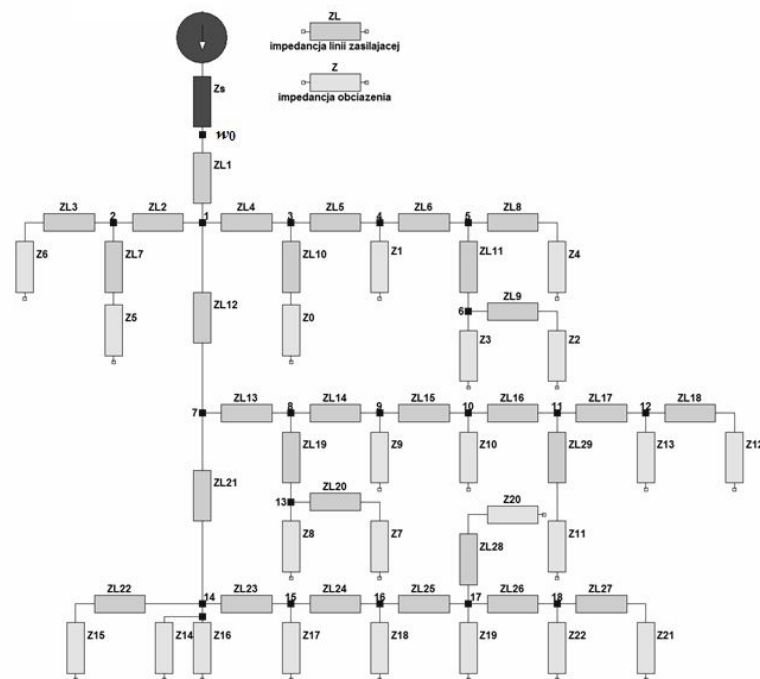
$$P_s = \sum I_n^2 R_n \quad (7)$$

gdzie  $I_n$  jest wartością skuteczną prądu w  $n$ -tej gałęzi sieci a  $R_n$  jej rezystancją.

Modelem matematycznym jest układ równań,  $2 \cdot n$  razy rozwiązywany metodą numeryczną.

$$\underline{Y} \cdot \underline{V}_M = \underline{I} \quad (8)$$

przy czym  $M$  jest wymiarem macierzy,  $\underline{Y}$  macierzą admitancji systemu,  $\underline{V}$  jest zespolonym wektorem potencjałów węzłowych.  $\underline{I}$  jest zespolonym wektorem prądu generatora w kolejno analizowanym węzle.



Rys. 1. Fragment sieci średniego napięcia z turbinami wiatrowymi

Parametrami bazowymi są impedancje obciążeń  $Z_k$  ( $k = 0, 1, \dots, 22$ ) z rys. 1, natomiast parametrem podstawowym nr węzła  $w_n$  ( $n = 0, 1, \dots, 18$ ) do którego podłączono turbinę wiatrową.

Procedurę metody oraz uzyskane wyniki przedstawiono poniżej:

*Krok 1.* Definiujemy wektor  $P$ , który ma następujące składowe

$$P = [Z_0, Z_1, \dots, Z_k] \quad k = 0, 1, \dots, 22 \quad (9)$$

oraz funkcję celu zdefiniowaną za pomocą funkcji (7), parametry bazowe  $p_k$  spełniają zależność

$$0.9 \cdot p_k \leq p_k \leq 1.1 \cdot p_k \quad k = 0, 1, \dots, 22 \quad (10)$$

*Krok 2.* Z założenia (wzór 9), parametry  $p_k$  zmieniamy o  $\pm 0,1$  i obliczamy wartość skumulowaną  $S = \sum_k a_k$ , wyznaczamy współczynniki wagi rozwiązując

$2 \cdot n$  ( $n$  - liczba parametrów bazowych) razy układ równań (8).

Przykładowo dla parametru podstawowego  $w_1 = 1$

$$S = \sum_k a_k = 0,103(Z_0)+0,091(Z_1)+0,031(Z_2)+0,03(Z_3)+0,033(Z_4)+ \\ 0,11(Z_5)+0,086(Z_6)+0,011(Z_7)+0,009(Z_8)+0,008(Z_9)+ \\ 0,007(Z_{10})+0,011(Z_{11})+0,013(Z_{12})+0,015(Z_{13})+ \\ 0,019(Z_{14})+0,02(Z_{15})+0,071(Z_{16})+0,024(Z_{17})+ \\ 0,045(Z_{18})+0,042(Z_{19})+0,119(Z_{20})+0,052(Z_{21})+0,051(Z_{22}) = 1 \quad (11)$$

*Krok 3.* Definiujemy macierz  $A = [a_{ij}]$ , w której liczba wierszy równa jest wartościom parametru podstawowego  $p_p$ , a liczba kolumn liczbie parametrów bazowych

	Z0	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15	Z16	Z17	Z18	Z19	Z20	Z21	Z22	
$A =$	0,37	0,42	0,18	0,19	0,18	0,34	0,28	0,26	0,27	0,27	0,33	0,35	0,36	0,36	0,39	0,39	1,56	0,40	0,48	0,41	1,19	0,51	0,50	w0
	1,03	0,91	0,31	0,30	0,33	1,10	0,86	0,11	0,09	0,08	0,07	0,11	0,13	0,15	0,19	0,20	0,71	0,24	0,45	0,42	1,19	0,52	0,51	w1
	0,90	0,80	0,27	0,26	0,29	1,65	1,30	0,09	0,08	0,07	0,06	0,10	0,12	0,13	0,16	0,17	0,62	0,21	0,40	0,37	1,04	0,45	0,45	w2
	1,60	1,51	0,57	0,56	0,58	0,80	0,63	0,08	0,07	0,06	0,05	0,08	0,10	0,11	0,14	0,14	0,51	0,17	0,33	0,31	0,86	0,38	0,37	w3
	1,22	2,24	0,87	0,86	0,88	0,61	0,48	0,06	0,05	0,04	0,04	0,06	0,07	0,08	0,10	0,11	0,39	0,13	0,25	0,23	0,65	0,28	0,28	w4
	1,10	2,03	1,10	1,09	1,11	0,55	0,43	0,05	0,05	0,04	0,04	0,05	0,07	0,07	0,09	0,10	0,35	0,12	0,23	0,21	0,59	0,26	0,25	w5
	1,01	1,85	1,44	1,44	1,01	0,50	0,39	0,05	0,04	0,04	0,03	0,05	0,06	0,07	0,09	0,09	0,32	0,11	0,21	0,19	0,54	0,24	0,23	w6
	0,40	0,35	0,12	0,12	0,13	0,43	0,33	0,53	0,53	0,52	0,46	0,44	0,43	0,43	0,43	0,42	1,74	0,39	0,31	0,23	0,69	0,28	0,28	w7
	0,37	0,32	0,11	0,11	0,12	0,39	0,31	0,60	0,60	0,59	0,53	0,52	0,51	0,51	0,39	0,39	1,61	0,36	0,28	0,22	0,64	0,26	0,26	w8
	0,34	0,30	0,10	0,10	0,11	0,36	0,28	0,55	0,55	0,70	0,65	0,64	0,63	0,62	0,36	0,36	1,48	0,33	0,26	0,20	0,59	0,24	0,24	w9
	0,24	0,21	0,07	0,07	0,08	0,25	0,20	0,39	0,39	0,49	1,21	1,20	1,19	1,19	0,25	0,25	1,04	0,23	0,18	0,14	0,41	0,17	0,17	w10
	0,22	0,19	0,07	0,06	0,07	0,24	0,19	0,36	0,36	0,46	1,13	1,33	1,33	1,33	0,24	0,23	0,98	0,22	0,17	0,13	0,38	0,16	0,16	w11
	0,21	0,19	0,06	0,06	0,07	0,23	0,18	0,35	0,34	0,44	1,07	1,27	1,51	1,50	0,23	0,22	0,93	0,21	0,16	0,12	0,37	0,15	0,15	w12
	0,36	0,32	0,11	0,11	0,12	0,39	0,30	0,65	0,65	0,58	0,53	0,52	0,51	0,50	0,39	0,39	1,59	0,36	0,28	0,21	0,63	0,26	0,26	w13
	0,20	0,18	0,06	0,06	0,06	0,21	0,17	0,27	0,26	0,26	0,23	0,22	0,22	0,21	0,60	0,60	2,41	0,57	0,53	0,42	1,23	0,51	0,51	w14
	0,15	0,12	0,00	0,00	0,01	0,16	0,11	0,22	0,21	0,21	0,18	0,17	0,17	0,16	0,57	0,56	2,46	0,67	0,62	0,49	1,54	0,61	0,61	w15
	0,14	0,12	0,04	0,04	0,04	0,15	0,12	0,19	0,18	0,18	0,16	0,15	0,15	0,15	0,42	0,42	1,70	0,49	0,84	0,68	1,98	0,83	0,83	w16
	0,13	0,12	0,04	0,04	0,04	0,14	0,11	0,17	0,17	0,17	0,15	0,15	0,14	0,14	0,40	0,39	1,61	0,46	0,79	0,73	2,12	0,89	0,89	w17
	0,13	0,11	0,04	0,04	0,04	0,14	0,11	0,17	0,17	0,17	0,15	0,15	0,14	0,14	0,39	0,39	1,60	0,46	0,79	0,73	2,12	0,91	0,91	w18

(12)

należy zaznaczyć, że w celu większej czytelności macierzy, w tym przypadku przeskalowano ją w następujący sposób:  $a_{ij} \cdot 10$

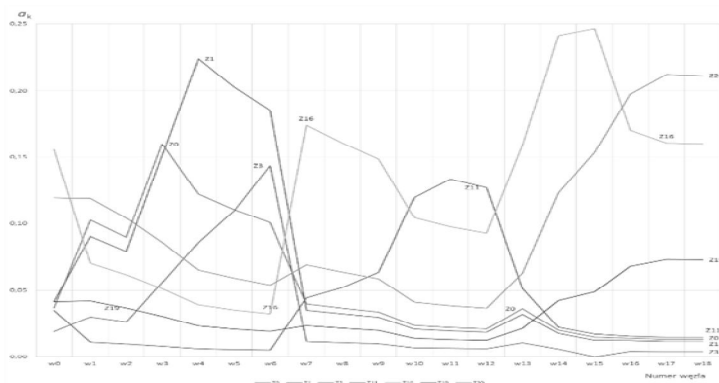
*Krok 4.* Dla poszczególnych wartości parametru podstawowego  $p_p$  wyznaczamy elementy zbiorów  $A$ ,  $B$  i  $C$  oraz sporządzamy wykresy przedstawiające zmiany tych elementów w zbiorach  $A$   $B$   $C$  w zależności od parametru podstawowego  $p_p$  (rys. 2).

Przykładowo dla parametru podstawowego  $p_p = w_{11}$  zbiór:

$$A = \{Z_{10}, Z_{11}, Z_{12}, Z_{13}, Z_{16}\},$$

$$B = \{Z_9, Z_{20}, Z_7, Z_8\},$$

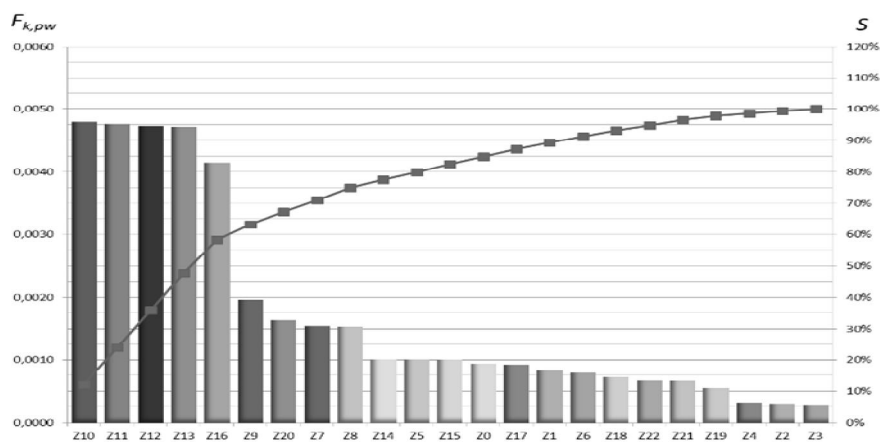
$$C = \{Z_{14}, Z_5, Z_{15}, Z_0, Z_{17}, Z_1, Z_6, Z_{18}, Z_{22}, Z_{21}, Z_{19}, Z_4, Z_2, Z_3\}$$



Rys. 2. Wykresy wybranych współczynników wagi  $a_k$  w zależności od parametru podstawowego. Punkty dyskretne połączono liniami

Wartości współczynników wagi  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, 22$ ) dla parametru podstawowego  $p_p = w_k$  ( $k = 0, 1, \dots, 18$ ) zależą od odległości węzła  $w_k$  od węzła, w którym podłączono impedancję obciążenia, i wartości tej impedancji.

Wykres *ABC* dla parametru podstawowego  $p_p = w_{11}$  przedstawia rys. 3.



Rys. 3. Wykresy słupkowe  $F_{k,pw}$  oraz krzywa Lorentza dla węzła  $w_{11}$

#### 4. BADANIE PRZEMIESZCZENIA BELKI STALOWEJ

W celu przedstawienia szerszego spojrzenia na możliwości metody, przeprowadzimy obecnie analizę przemieszczeń belki stalowej o przekroju przedstawionym na rys. 4. Belka jest zamocowana jednostronnie i poddana równomiernemu obciążeniu  $A$ .

Przemieszczenie belki  $y(x)$  opisane jest równaniem różniczkowym [9]:

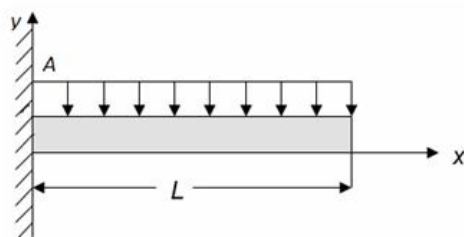
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{A}{2EI} (L-x)^2 \quad (13)$$

z warunkami brzegowymi  $y(x) = 0$  oraz  $dy/dx = 0$  dla  $x = 0$ ,  
gdzie:  $y$  – przemieszczenie belki [m],  $L$  – długość belki [m],  $x$  – odległość od miejsca mocowania [m],  $A$  – obciążenie [N/m],  $E$  – moduł Younga [N/m<sup>2</sup>],  $I$  – moment bezwładności [m<sup>4</sup>], (rys. 4).

Wartości bazowe badanej belki przedstawiono w tabeli 3 (rys. 5).

Tabela 3. Wartości bazowe

$a1$	$a2$	$a3$	$b1$	$b2$	$b3$	$b4$	$E$
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[N/m <sup>2</sup> ]
0,03	0,01	0,07	0,02	0,05	0,01	0,02	2,1E+11



Rys. 4. Analizowany układ belki z równomiernym obciążeniem  $A$  [N/m]

Równanie (13) można przedstawić w postaci układu dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu, przyjmując  $y(x) = z_1(x)$  oraz  $dy/dx = z_2(x)$ , mamy:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (14a)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{A}{2EI} (L-x)^2 \quad (14b)$$

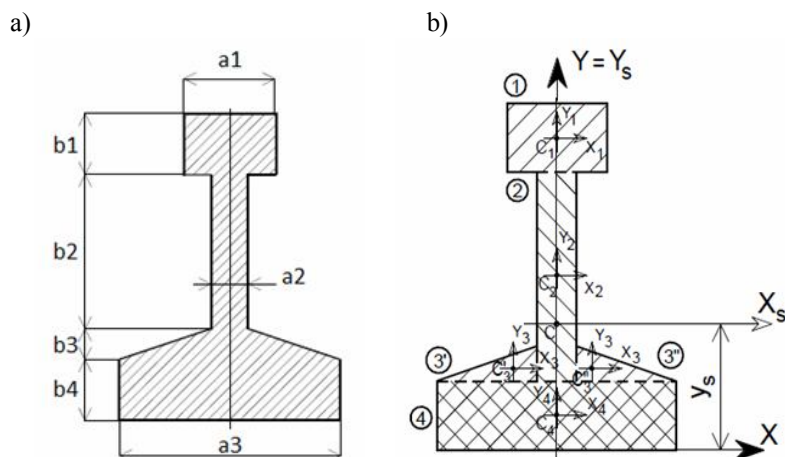
Jednocześnie zakładamy, że belka jest poddana obciążeniu  $A$  [N/m]. Przekrój belki przedstawiono na rys. 5.

Moment bezwładności  $I$  belki [m<sup>4</sup>] wyznaczamy za pomocą następujących wzorów [10]:

– wyznaczenie środka ciężkości  $G$

$$G = \frac{\sum_i S_i y_i}{\sum_i S_i} = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3 + S_4 y_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \quad (15)$$

gdzie  $S_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) – pola poszczególnych elementów przekroju (rys. 5b),  $y_k$  odległość od osi  $X$ .



Rys. 5. Przekrój belki, jej parametry bazowe (wymiary) (a) oraz schemat obliczenia modułu bezwładności  $I_{X_s}$  (b)

– dla przekroju z rys. 5a

$$G = \frac{a_1 b_1 \left( \frac{b_1}{2} b_2 + b_3 + b_4 \right) + a_2 (b_2 + b_3) \left( \frac{b_2 + b_3}{2} + b_4 \right)}{a_1 b_1 + a_2 (b_2 + b_3) + 2 \left( \frac{a_3 - a_2}{2} \frac{b_3}{2} \right) + a_3 b_4} + \frac{2 \frac{(a_3 - a_2)}{4} b_3 \left( \frac{b_3}{3} + b_4 \right) + a_3 b_4 \frac{b_4}{2}}{a_1 b_1 + a_2 (b_2 + b_3) + 2 \left( \frac{a_3 - a_2}{2} \frac{b_3}{2} \right) + a_3 b_4} \quad (16)$$

wobec tego

$$I_1 = \frac{a_1 b_1^3}{12} + a_1 b_1 \left( \frac{b_1}{2} + b_2 + b_3 + b_4 - G \right)^2 \quad (17a)$$

$$I_2 = \frac{a_2 (b_2 + b_3)^3}{12} + a_2 (b_2 + b_3) \left( \frac{b_2 + b_3}{2} b_4 - G \right)^2 \quad (17b)$$

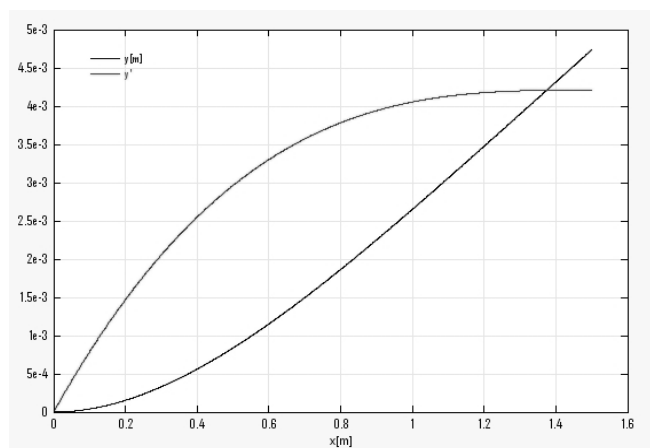
$$I_3 = 2 \left[ \frac{\frac{a_3 - a_2}{2} b_3^3}{36} + \frac{(a_3 - a_2) b_3}{2} \left( \frac{b_3}{3} + b_4 - G \right)^2 \right] \quad (17c)$$

$$I_4 = \frac{a_3 b_4^3}{12} + a_3 b_4 \left( \frac{b_4}{2} - G \right)^2 \quad (17d)$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (17e)$$



Układ równań (14a) i (14b) rozwiązano numerycznie. Przykładowy wynik przemieszczenia belki i pochodnej przemieszczenia przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6. Przebiegi przemieszczenia  $y(x)$  oraz  $dy/dx$  jego pochodnej dla  $A_6 = 8000$  [N/m]

Biorąc pod uwagę równania (14) oraz wzory (17) parametrami bazowymi są:  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, E$ , natomiast parametrem podstawowym założone wartości  $A_k$  ( $k = 1, \dots, 8$ ).

Procedura metody i uzyskane wyniki są następujące:

*Krok 1.* Definiujemy wektor  $P$ , który ma następujące składowe

$$P = [a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, E] \quad (18)$$

oraz funkcję celu  $F_{k,p}$ , którą jest przemieszczenie belki  $y(x)$  dla  $L = 1,5$  m

$$F_{k,p} = y(x) \Big|_{L=1,5} \quad (19)$$

Przy czym parametry bazowe  $p_k$  spełniają zależność

$$0,9 \cdot p_k \leq p_k \leq 1,1 \cdot p_k \quad k = 1, \dots, 8 \quad (20)$$

*Krok 2.* Z założenia (wzór 18), parametry  $p_k$  zmieniamy o  $\pm 0,1$  i obliczamy wartość skumulowaną  $S = \sum_k a_k$ , wyznaczamy współczynniki wagi rozwiązując 2·n razy układ równań (14).

Przykładowo dla parametru podstawowego  $A_1 = 3000$  N/m

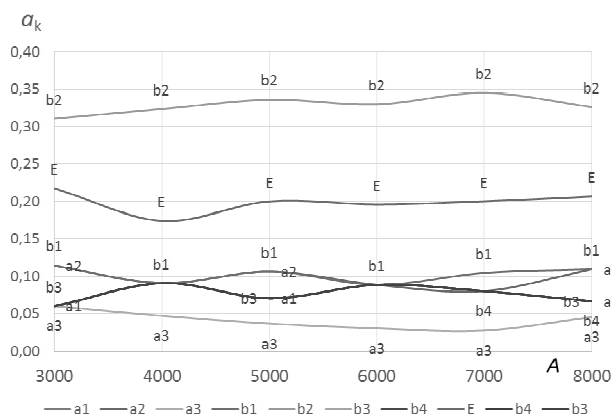
$$S = \sum_k a_k = 0,0605(a_1) + 0,1146(a_2) + 0,0605(a_3) + 0,1146(b_1) + 0,3111(b_2) + 0,0605(b_3) + 0,0605(b_4) + 0,2178(E) = 1 \quad (21)$$

*Krok 3.* Definiujemy macierz  $A = [a_{ij}]$ , w której liczba wierszy równa jest wartościom parametru podstawowego  $p_p$ , a liczba kolumn liczbie parametrów bazowych

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 = 3000 \\ A_2 = 4000 \\ A_3 = 5000 \\ A_4 = 6000 \\ A_5 = 7000 \\ A_6 = 8000 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,0605 & 0,1146 & 0,0605 & 0,1146 & 0,3111 & 0,0605 & 0,0605 & 0,2178 \\ 0,0908 & 0,0908 & 0,0473 & 0,0908 & 0,3242 & 0,0908 & 0,0908 & 0,1746 \\ 0,0711 & 0,1066 & 0,0367 & 0,1066 & 0,3366 & 0,0711 & 0,0711 & 0,2003 \\ 0,0886 & 0,0886 & 0,0304 & 0,0886 & 0,3304 & 0,0886 & 0,0886 & 0,1962 \\ 0,0804 & 0,0804 & 0,0274 & 0,1048 & 0,3457 & 0,0804 & 0,0804 & 0,2004 \\ 0,0671 & 0,1096 & 0,0457 & 0,1096 & 0,3269 & 0,0671 & 0,0671 & 0,2068 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (22)$$

*Krok 4.* Dla poszczególnych wartości parametru podstawowego  $p_p$  wyznaczamy elementy zbiorów  $A$ ,  $B$  i  $C$  oraz sporządzamy wykresy przedstawiające zmiany tych elementów w zbiorach  $A$   $B$   $C$  w zależności od parametru podstawowego  $p_p$  (rys. 7).

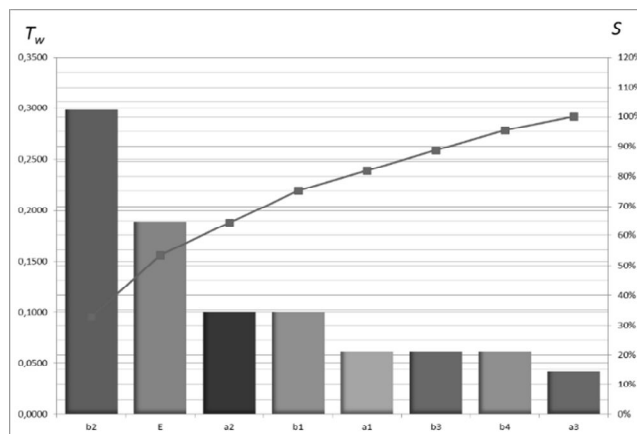
Na przykład dla parametru podstawowego  $p_p = A_6 = 8000$  [N/m] zbiór  $A = \{b_2, E\}$ ,  $B = \{a_2, b_1\}$ ,  $C = \{b_3, b_4, a_1, a_3\}$ .



Rys. 7. Wykresy współczynników wagi  $a_k$  dla przyjętych wartości  $A_k$

Należy zaznaczyć, że interakcja pomiędzy współczynnikami wagi  $a_k$  występuje w przeciwieństwie do poprzednich badań [7, 8], na poziomie parametrów należących do zbioru  $B$ . Parametry mające podstawowy i średni wpływ na odkształcenie belki są praktycznie stałe w całym zakresie zmian parametru podstawowego  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ), rys. 7.

Alternatywnie, wykresy słupkowe dla parametru podstawowego  $A_6 = 8000$  [N/m] przedstawiono na rys. 8.

Rys. 8. Wykresy słupkowe  $A, B, C$  oraz krzywa Lorentza, dla  $A = 8000$  [N/m]

## 5. WNIOSKI

W pracy omówiono badanie wrażliwości dwóch układów wielo-parametrycznych, z których jeden został opisany układem równań algebraicznych, drugi układem równań różniczkowych zwyczajnych. W pierwszym przypadku analizowano straty mocy w sieci średniego napięcia, w drugim analiza dotyczyła przemieszczeń belki stalowej zamocowanej jednostronnie i poddanej równomiernemu obciążeniu. W badaniach wykorzystano *zmodyfikowaną zasadę Pareto* wskazując w ten sposób na możliwości jej szerszego zastosowania w porównaniu do poprzednich badań [7, 8].

Badając sieć elektroenergetyczną przedstawiono wpływ impedancji odbiorów na straty mocy czynnej sieci średniego napięcia w zależności od miejsca przyłączenia turbiny wiatrowej. Analizując przemieszczenie belki zdefiniowano parametry układu mechanicznego mające decydujący wpływ na jego wytrzymałość są to  $E$  i  $b_2$  (wysokość części środkowej belki). W tym drugim przypadku uzyskane wyniki można wykorzystać do optymalizacji przekroju belki w zależności od zadanego obciążenia. Macierz  $A = [a_{ij}]$  jest wykorzystywana do globalnej analizy wpływu parametrów układu na wartość funkcji celu  $F_p$ , ponadto w ramach realizowanego projektu badawczego są prowadzone prace dotyczące opracowania filtru numerycznego filtrującego z  $A$  elementy zbiorów  $A, B, C$  według reguły 20/80 z założonymi odchyłkami. Macierz  $A$  i wektor  $P$  są również wykorzystywane w opracowywanych programach numerycznych optymalizacji układów wielo-parametrycznych z wykorzystywaniem algorytmów genetycznych.

*Prace prowadzono w ramach projektu badawczego PWSliP w Łomży - BST-21/IIIa/21/2015 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.*

### LITERATURA

- [1] Kaczorek T.: "Teoria sterowania, t.1", PWN, Warszawa, 1977.
- [2] Bowersox D.J., Closs D.J., Cooper M.B.: "Supply chain logistics management", Mc Graw-Hill, 2007.
- [3] Ultsch A.: "Proof of Pareto's 80/20 Law and Precise Limits for ABC-Analysis", Technical Report 2002/c, University of Marburg- Germany, 2002.
- [4] Motadel M.R., Eshlagy A.T., Ghasemi S.: "The Presentation of a Mathematical Model to Assess and Control the Inventory Control System Through ABC Analysis Approach", International Journal of Information, Security and Systems Menagement, Vol.1, No.1, pp. 1-13, 2012.
- [5] Ramanathan, R., "ABC inventory classification with multiple-criteria using weighted linear optimization", Computer and Operations Research, 33 (3), pp. 695-700, 2006.
- [6] Makram Ben Jeddou: "An improvement of two multi-criteria inventory classification models", *IOSR Journal of Business and Management*, Vol.11, No. 6, pp 21-27, 2013.
- [7] Tykocki J. Jordan A. : "Pareto - ABC Analysis of High Voltage Single Core Cable Temperature", *Electrical Review*, R.90, Nr.10/2014, pp.172-178, 2014.
- [8] Tykocki J., Jordan A., Surowik D.: "Pareto - ABC Analysis of Temperature Field in High Voltage Three-Phase Systems", *Electrical Review* R. 91, No 5, pp. 107-112, 2015.
- [9] Równanie różniczkowe belki zginanej poprzecznie  
<http://www.atam.pl/back/MN.pptx>  
<http://limba.wil.pk.edu.pl/zwm/12ugiec.pdf>
- [10] Momenty bezwładności figur płaskich  
<http://www.atam.pl/back/mbfp.pdf>

### INVESTIGATION OF THE SENSITIVITY OF MULTI-PARAMETRIC SYSTEMS

Making use of a modified Pareto principle, the paper presents a study of sensitivity systems. The Pareto principle, which is mostly used in economic sciences, has been applied here for sensitivity analysis of two physical systems, i.e. a part of medium voltage grid with wind turbines and a displacement of a steel beam subjected to uniform load. In the first case, the objective function  $F_p$  involved active power losses in the system, whereas in the latter case it was concerned with the displacement of the end of the beam.

(Received: 14. 02. 2016, revised: 2. 03. 2016)