



Analiza wyężenia sępów żelbetowych metodą relaksacji dynamicznej

ANNA SZCZEŚNIAK, ADAM STOLARSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Łądowej i Geodezji,
00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2,
aszczesniak@wat.edu.pl, astolarski@wat.edu.pl

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę analizy statycznego odkształcenia sępów żelbetowych z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej i nieliniowości fizycznych materiałów konstrukcyjnych. Dla stali zbrojeniowej zastosowano model materiału sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem. Dla betonu przyjęto model sprężysto-plastyczny z uwzględnieniem osłabienia materiałowego. Metodę analizy wyężenia układu konstrukcyjnego opracowano z wykorzystaniem metody różnic skończonych. Opracowano efektywną metodę relaksacji dynamicznej rozwiązania układu równań równowagi elementów żelbetowych. Na podstawie metody rozwiązania zbudowano własne procedury numeryczne i program obliczeniowy. W celu sprawdzenia poprawności wprowadzonych procedur obliczeniowych wykonano analizę numeryczną sępów żelbetowych przegubowo podpartych i obciążonych siłą podłużną działającą na zadanym mimośrodzie. Otrzymane wyniki analizy porównano z wynikami doświadczalnymi zaczerpniętymi z literatury oraz wynikami obliczeń analitycznych.

Słowa kluczowe: mechanika konstrukcji, sępy żelbetowe, nieliniowość fizyczna, nieliniowość geometryczna

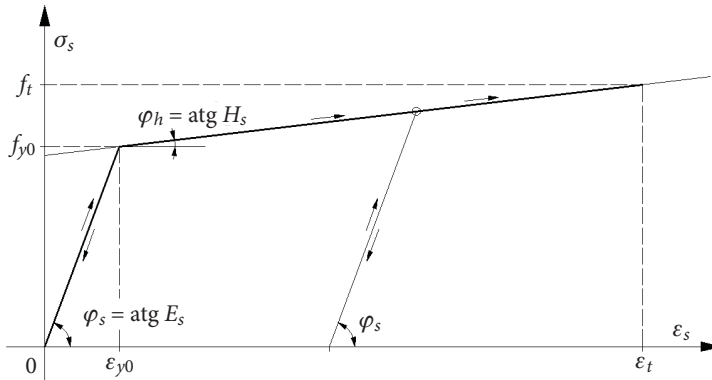
1. Wstęp

W artykule przedstawiono metodę analizy statycznego odkształcenia sępów żelbetowych z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej i nieliniowości fizycznych materiałów konstrukcyjnych. Analiza obejmuje opis zachowania mimośrodkowo ściskanego elementu żelbetowego, modelowanego jako ustrój prętowy, obciążony statycznie. Podstawą teoretycznego modelowania zachowania elementu konstrukcyjnego są równania teorii dużych przemieszczeń ustroju prętowego. Metodę analizy

wyłączenia układu konstrukcyjnego opracowano z wykorzystaniem metody różnic skończonych. W celu rozwiązania układu równań równowagi prętowych elementów żelbetowych wykorzystano efektywną metodę relaksacji dynamicznej. Na podstawie metody rozwiązania zbudowano własne procedury numeryczne i program obliczeniowy. W celu sprawdzenia poprawności wprowadzonych procedur obliczeniowych wykonano analizę numeryczną słupów żelbetowych, a otrzymane wyniki porównano z wynikami doświadczalnymi i teoretycznymi zaczerpniętymi z literatury.

2. Modelowanie materiałów konstrukcyjnych

Przyjęto sprężysto-plastyczny model stali zbrojeniowej ze wzmocnieniem (rys. 1). Rozważano jednoosiowy stan naprężenia, ze względu na charakter pracy wiotkich prętów zbrojenia w elemencie żelbetowym.



Rys. 1. Model stali zbrojeniowej

Model fizyczny stali zbrojeniowej opisują równania przyrostowe w postaci:

$$\bar{\sigma}_s^n = \sigma_s^{n-1} + E_s \Delta \varepsilon_s^n, \quad \sigma_s^n = \begin{cases} \bar{\sigma}_s^n & \text{dla } \bar{\sigma}_s^n \leq f_y^n \\ f_y^n & \text{dla } \bar{\sigma}_s^n > f_y^n, \end{cases} \quad (1)$$

gdzie: ε_s^n , $\Delta \varepsilon_s^n = \varepsilon_s^n - \varepsilon_s^{n-1}$ — znane odkształcenie i przyrost odkształcenia;

E_s — moduł odkształcenia stali;

f_{y0} — początkowa granica plastyczności;

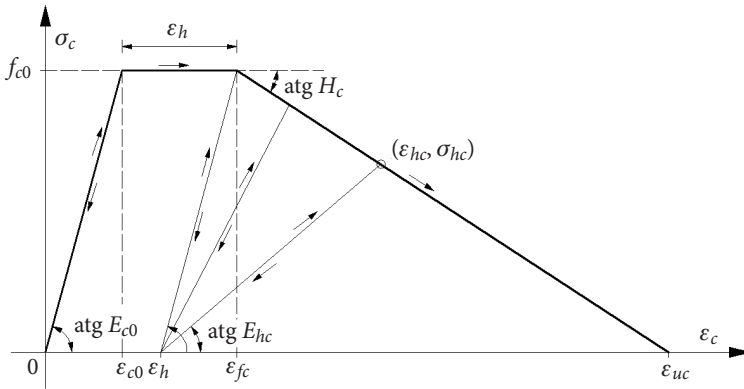
$\varepsilon_{y0} = \frac{f_{y0}}{E_s}$ — graniczne odkształcenie sprężyste;

$$H_s = \frac{f_t - f_{y0}}{\varepsilon_t - \varepsilon_{y0}} \text{ — moduł wzmocnienia plastycznego;}$$

$$f_y^n = f_{y0} + H_s(\varepsilon_s^n - \varepsilon_{y0}) \text{ — aktualna granica plastyczności;}$$

n — krok chwilowego stanu naprężenia-odkształcenia.

W celu opisu zachowania betonu opracowano model materiału sprężysto-plastycznego z uwzględnieniem osłabienia i degradacji modułu odkształcenia (rys. 2). Model opisuje cztery fazy zachowania betonu: 1° — sprężyste osiągnięcie początkowej powierzchni plastyczności; 2° — idealne płynięcie plastyczne w ograniczonym zakresie odkształcenia; 3° — osłabienie materiałowe, 4° — zniszczenie.



Rys. 2. Model betonu

Model fizyczny betonu opisują równania przyrostowe:

$$\bar{\sigma}_c^n = \sigma_c^{n-1} + E_c \Delta \varepsilon_c^n, \quad \sigma_c^n = \begin{cases} \bar{\sigma}_c^n & \text{dla } \bar{\sigma}_c^n \leq f_c^n \\ f_c^n & \text{dla } \bar{\sigma}_c^n > f_c^n \\ 0 & \text{dla } \bar{\sigma}_c^n < 0, \end{cases} \quad (2)$$

gdzie: $E_c = sE_{c0} + (1-s)E_{hc}$ — moduł odkształcenia;

E_{c0} — początkowy moduł odkształcenia;

$E_{hc} = \frac{\sigma_{hc}}{\varepsilon_{hc} - \varepsilon_h}$ — moduł odkształcenia w zakresie osłabienia materiałowego;

$f_c^n = s f_{c0} + (1-s) f_{hc}^n$ — wytrzymałość aktualna;

f_{c0} — wytrzymałość początkowa;

$f_{hc}^n = f_{c0} - H_c(\varepsilon_c^n - \varepsilon_{c0})$ — wytrzymałość aktualna w zakresie osłabienia materiałowego;

$$H_c = \frac{f_{c0}}{\varepsilon_{uc} - \varepsilon_{fc}} \text{ — moduł osłabienia materiałowego;}$$

$$s = \begin{cases} 1 & \text{dla } \varepsilon_c^n \leq \varepsilon_{fc} \\ 0 & \text{dla } \varepsilon_c^n > \varepsilon_{fc} \end{cases} \text{ — wskaźnik zakresu odkształcenia;}$$

$$\varepsilon_c^n, \Delta\varepsilon_c^n = \varepsilon_c^n - \varepsilon_c^{n-1} \text{ — znane odkształcenie i przyrost odkształcenia;}$$

$$\varepsilon_{c0} = \frac{f_{c0}}{E_{c0}} \text{ — graniczne odkształcenie sprężyste;}$$

$$\varepsilon_{fc} \text{ i } \varepsilon_{uc} \text{ — graniczne odkształcenia odpowiednio zakresu idealnego}$$

plynięcia plastycznego i osłabienia materiałowego;

$$\varepsilon_h = \varepsilon_{fc} - \varepsilon_{c0} \text{ — odkształcenie trwałe dla zakresu osłabienia}$$

materiałowego;

$$n \text{ — krok chwilowego stanu naprężenia–odkształcenia.}$$

W przyjętym modelu fizycznym betonu nie uwzględniono właściwości odkształceniowych materiału na rozciąganie, z uwagi na brak istotnego wpływu na przemieszczenia słupów żelbetowych w analizie statycznej nośności granicznej w zakresie niesprężystych odkształceń.

3. Równania równowagi i związki geometryczne

Dla elementu konstrukcyjnego rozpatrywanego jako żelbetowy element prętowy o masie jednostkowej μ , wyprowadzone zostały równania równowagi dynamicznej, które zastosowane zostały do opisu statycznego zachowania konstrukcji po wprowadzeniu krytycznej wartości współczynnika tłumienia c .

W globalnym kartezjańskim układzie współrzędnych $\{x, z\}$, dla układu sił wewnętrznych, podłużnych N , poprzecznych Q i momentów zginających M oraz składowych obciążenia zewnętrznego $\{p_x, p_z\}$ działających na odkształcony element o długości ds i kącie nachylenia θ , różniczkowe równania równowagi mają postać:

$$\begin{cases} -\frac{\partial(N \cos \theta)}{\partial s} + \frac{\partial(Q \sin \theta)}{\partial s} + p_x(s) - \mu \ddot{u} - c \dot{u} = 0 \\ -\frac{\partial(N \sin \theta)}{\partial s} - \frac{\partial(Q \cos \theta)}{\partial s} - p_z(s) + \mu \ddot{w} + c \dot{w} = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial s} - Q = 0. \end{cases} \quad (3)$$

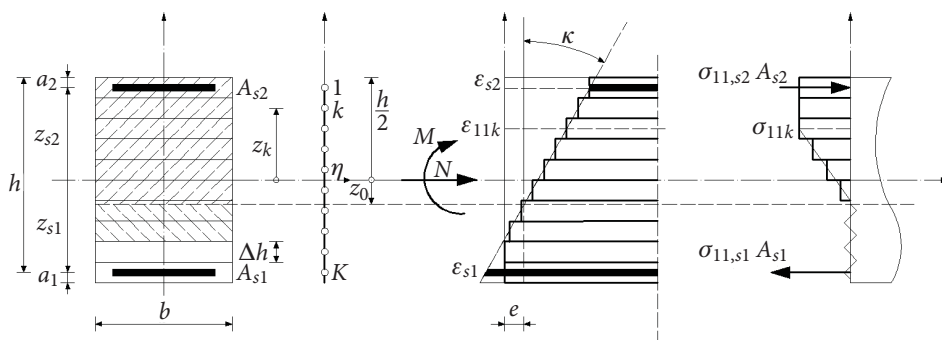
Uwzględniono nieliniowe związki geometryczne, które odnoszą się do odkształcenia podłużnego osi środkowej $e(s)$ oraz krzywizny $\kappa(s)$ elementu prętowego o długości ds :

$$e(s) = \frac{ds^0 - ds}{ds}, \quad \kappa(s) = \frac{d\theta - d\theta^0}{ds}, \quad (4)$$

gdzie: $d\theta, d\theta^0$ — kąty wzajemnego obrotu osi środkowej pręta w konfiguracji aktualnej i początkowej;
 ds^0 — długość odkształconego elementu pręta w konfiguracji początkowej.

4. Równania równowagi w przekroju poprzecznym

Model obliczeniowy przekroju poprzecznego elementu prętowego opracowano przy założeniu podziału przekroju na warstwy betonowe oraz wyróżnieniu dwu warstw stalowych (rys. 3).



Rys. 3. Model żelbetowego przekroju poprzecznego

Stan odkształcenia w poszczególnych warstwach przekroju poprzecznego dla każdego kroku obciążenia n jest określony układem zależności:

$$\varepsilon_{11r}^n = e^n + z_r \cdot \kappa^n, \quad z_r = (z_k, z_{s1}, z_{s2}), \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (5)$$

Dla znanych odkształceń podłużnych osi środkowej e^n i krzywizny κ^n wartości siły podłużnej N^n i momentu zginającego M^n wyznacza się z równań równowagi przekroju poprzecznego:

$$\begin{aligned}
 N^n &= \sum_{k=1}^K \sigma_{11k}^n \cdot A_k + \sigma_{11,s1}^n \cdot A_{s1} + \sigma_{11,s2}^n \cdot A_{s2} \\
 M^n &= \sum_{k=1}^K \sigma_{11k}^n \cdot A_k \cdot z_k + \sigma_{11,s1}^n \cdot A_{s1} \cdot z_{s1} + \sigma_{11,s2}^n \cdot A_{s2} \cdot z_{s2},
 \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie: A_k — pole powierzchni k -tej betonowej warstwy przekroju;
 A_{s1} i A_{s2} — pola powierzchni warstw stalowych.

Zastosowana dyskretyzacja przekroju poprzecznego przedstawiona została przez Bąka i Stolarskiego i opisana w pracy [1].

5. Dyskretyzacja różnicowa elementu prętowego

Równania równowagi (3) oraz związki geometryczne (4) wraz z modelami odkształcenia materiałów i modelem przekroju poprzecznego stanowią sformułowanie problemu w ramach technicznej teorii konstrukcji prętowych.

Rozwiązanie układu równań podstawowych przeprowadzono metodą różnicową na podstawie przyjętej dyskretyzacji modelu obliczeniowego (rys. 4).

Dyskretyzacja ustrojów prętowych polega na dokonaniu podziału osi środkowej prętów węzłami $i = 1, 2, \dots, i-1, i, i+1, \dots, I$ o współrzędnych $\{x, z\}_i$. W przyjętym modelu założono podział elementu na węzły wewnętrzne i brzegowe. Spośród węzłów wewnętrznych wyróżniono węzły główne (nieparzyste) związane z podstawowymi punktami podziału oraz węzły pośrednie (parzyste) związane z odcinkami łączącymi podstawowe punkty podziału

Na tej podstawie równaniom równowagi (3) można nadać formę różnicową ze względu na różniczkowe operatory przestrzenne:

$$\begin{cases}
 -N_{i1} \cos \theta_{i1} + N_{i0} \cos \theta_{i0} + Q_{i1} \sin \theta_{i1} - Q_{i0} \sin \theta_{i0} + P_x(s_i) - m(s_i) \ddot{u}_i - C(s_i) \dot{u}_i = 0 \\
 -N_{i1} \sin \theta_{i1} + N_{i0} \sin \theta_{i0} - Q_{i1} \cos \theta_{i1} + Q_{i0} \cos \theta_{i0} - P_z(s_i) + m(s_i) \ddot{w}_i + C(s_i) \dot{w}_i = 0 \\
 M_{i+2} - M_i - Q_{i1} \Delta s_{i1} = 0.
 \end{cases} \tag{7}$$

gdzie: $i1 = i + 1$, $i0 = i - 1$ — oznaczenie odcinków wewnętrznego podziału przestrzennego;

N_{i1} — siła podłużna w odcinku podziału $i1 = i + 1$;

M_i — moment zginający w węźle głównym i ;

$m = \mu \Delta s_i$ — masa i -tego węzła;

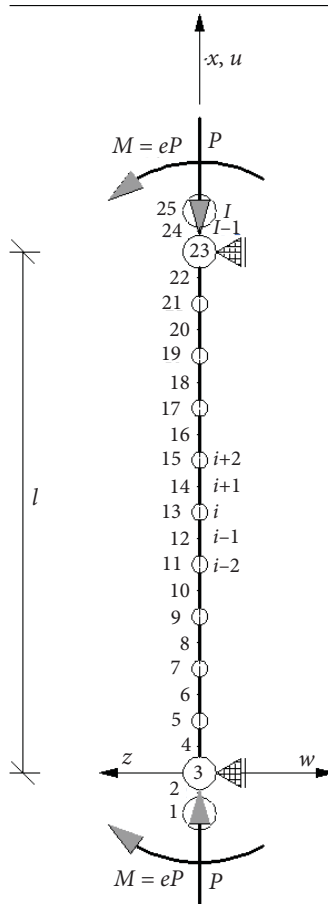
$$\Delta x_{i1} = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta z_{i1} = z_{i+1} - z_i, \quad \Delta s_{i1} = \sqrt{\Delta x_{i1}^2 + \Delta z_{i1}^2}, \quad \Delta \bar{s}_i = \frac{\Delta s_{i1} + \Delta s_{i0}}{2}$$

— składowe długości odcinka;

$$\sin \theta_{i1} = \frac{\Delta z_{i1}}{\Delta s_{i1}}, \quad \cos \theta_{i1} = \frac{\Delta x_{i1}}{\Delta s_{i1}} \quad \text{— funkcje kąta obrotu;}$$

$P_x(s_i) = p_x(s_i) \cdot \Delta \bar{s}_i, \quad P_z(s_i) = p_z(s_i) \cdot \Delta \bar{s}_i$ — składowe obciążenia w i -tym węźle;

ρ_{cs} — gęstość właściwa żelbetu.



Rys. 4. Dyskretyzacja elementu konstrukcyjnego

Dyskretyzacja osi środkowej modelu pozwala również na różnicowe zdefiniowanie związków geometrycznych (4) w postaci:

— dla węzłów głównych podziału $i = 3, I - 2, 2$:

$$e(s_i) = \frac{e(s_{i1}) + e(s_{i0})}{2}, \quad \kappa(s_i) = \frac{\Delta\theta_i - \Delta\theta_i^0}{\Delta s_i}, \quad (8)$$

— dla odcinków podziału $i1 = 2, I - 1, 2$:

$$e(s_{i1}) = \frac{\Delta s_{i1}^{-0} - \Delta s_{i1}^{-}}{\Delta s_{i1}}, \quad \kappa(s_{i1}) = \frac{\kappa(s_{i1+1}) + \kappa(s_{i1-1})}{2}, \quad (9)$$

gdzie: $\Delta\theta_i = \theta_{i1} - \theta_{i0} \cong \sin(\theta_{i1} - \theta_{i0})$ jest kątem wzajemnego obrotu odkształconych odcinków belki.

6. Metoda rozwiązania układu równań równowagi

W pracy rozważono proces dynamiczny, który przy zastosowaniu tłumienia krytycznego $c_f = \max(c_{f,kr})$ umożliwi opis zagadnienia statycznego. Rozwiązanie układu nieliniowych równań równowagi (7) przeprowadzono metodą relaksacji dynamicznej, w której rozwiązanie uzyskuje się rekurencyjnie w kolejnych chwilach pseudoczasu.

W zastosowanej metodzie wykorzystano bezpośrednią metodę różnicową względem pseudoczasu. Polega ona na aproksymacji rozwiązania dla przemieszczeń w każdym węźle podziału osi środkowej belki $u(x_i, t^n)$, $w(x_i, t^n)$ w kolejnych chwilach pseudoczasowych $t^{n-1} = t^n - \Delta t$, $t^n = n\Delta t$, $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ zgodnie z przyjętym schematem różnicowym:

$$\begin{cases} \Delta u_i^n = b_i \Delta u_i^{n-1} + a_i [-N_{i1} \cos \theta_{i1} + N_{i0} \cos \theta_{i0} + Q_{i1} \sin \theta_{i1} - Q_{i0} \sin \theta_{i0} + P_x(s_i)] \\ \Delta w_i^n = b_i \Delta w_i^{n-1} + a_i [N_{i1} \sin \theta_{i1} - N_{i0} \sin \theta_{i0} + Q_{i1} \cos \theta_{i1} - Q_{i0} \cos \theta_{i0} + P_z(s_i)], \end{cases} \quad (10a)$$

$$u_i^n = u_i^{n-1} + \Delta u_i^n, \quad w_i^n = w_i^{n-1} + \Delta w_i^n, \quad (10b)$$

gdzie: $b_i = \frac{m_i}{m_i + C_i \Delta t}$ i $a_i = \frac{\Delta t^2}{m_i + C_i \Delta t}$.

Warunki początkowe dla kroku $t_0 = 0$ przyjęto w postaci:

$$\Delta u_i^{-1} = 0, \quad \Delta w_i^{-1} = 0. \quad (11)$$

Warunkiem zakończenia iteracyjnego rozwiązania równania ruchu tłumionego jest osiągnięcie zbieżności przemieszczeń w kolejnych chwilach czasowych:

$$\|\Delta w_i^t\| \leq \varepsilon_{\Delta w}.$$

Krok czasowy Δt wyznaczony został z uwagi na stabilność metody całkowania numerycznego zastosowanej dla równania różnicowego i ma postać:

$$\Delta t = \alpha_r \frac{1}{2} \Delta x^2 \sqrt{\frac{\rho}{B}}, \quad (12)$$

gdzie: $\alpha_r = 0,2-0,9$ — współczynnik korekcyjny dla kroku pseudoczasowego;
 ρ — masa właściwa żelbetu;
 $B = E_{c0} J_{cs}$ — sztywność zginania przekroju żelbetowego w zakresie sprężystym;
 J_{cs} — moment bezwładności niezarysowanego (sprężystego) przekroju żelbetowego.

Z uwagi na zadany moment brzegowy $M_{i_{b1}} = M$ lub $M_{i_{b1}} = M$ konieczne jest spełnienie równania zgodności momentów na brzegu:

$$F_M = M_{i_{b1}} - M_{i_{r1}} = 0 \text{ lub } F_M = M_{i_{b1}} - M_{i_{r1}} = 0. \quad (13)$$

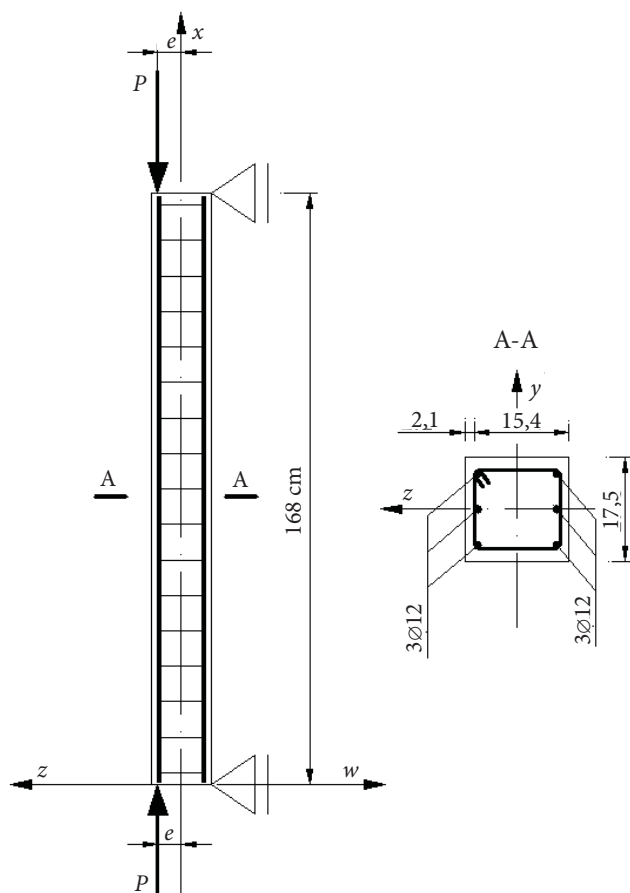
Spełnienie tego warunku wymaga rozwiązania układu nieliniowych równań algebraicznych (6) dla obydwu węzłów brzegowych: fikcyjnego (i_{b1} lub i_{b1}) i rzeczywistego (i_{r1} lub i_{r1}) względem krzywizn $\kappa = \{\kappa_{i_{b1}}, \kappa_{i_{r1}}\}$ lub $\kappa = \{\kappa_{i_{b1}}, \kappa_{i_{r1}}\}$ przy znanych odkształceniach podłużnych $e = \{e_{i_{b1}}, e_{i_{r1}}\}$ lub $e = \{e_{i_{b1}}, e_{i_{r1}}\}$.

Rozwiązanie równania (13) otrzymuje się numerycznie metodą Newtona, uzyskując wynik po j -tej iteracji.

7. Analiza słupów żelbetowych

W celu sprawdzenia poprawności przyjętej metody analizy i zastosowanych procedur numerycznych, przeprowadzone zostały badania nośności granicznej słupów żelbetowych obustronnie obciążonych siłą podłużną działającą na stałym mimośrodku (rys. 5).

Otrzymane wyniki porównane zostały z wynikami badań doświadczalnych oraz wynikami analizy teoretycznej przeprowadzonej przez Lloyd i Rangana [4], jak również z wynikiem teoretycznym otrzymanym przez Godyckiego-Ćwirko i Korzeniowskiego [3]. Badania numeryczne wykonane zostaną dla zakresu doświadczeń,



Rys. 5. Schemat statyczny i geometria przekroju słupa żelbetowego wg [4]

które w pracy [4] oznaczono jako seria I. W badaniu uwzględniono trzy zakresy mimośrodowe e , które wynoszą 15/50/65 mm i kolejno zostały oznaczone literami alfabetu A, B, C.

Słup wykonany jest z betonu i stali o następujących właściwościach materiałowych: $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ — masa właściwa żelbetu, $f_y = 430,0 \text{ MPa}$ — granica plastyczności stali, $E_s = 200,0 \text{ GPa}$ — moduł odkształcenia stali, $\varepsilon_{us} = 0,15$ — odkształcenie graniczne stali, $f_c = 44,78 \text{ MPa}$ — wytrzymałość betonu na ściskanie, $E_c = 32,18 \text{ GPa}$ — moduł odkształcenia betonu, $\varepsilon_{fc} = 0,002$, $\varepsilon_{uc} = 0,00665$ — odkształcenia graniczne betonu przyjęte z zakresu zgodnego z założeniami zawartymi w pracy Stolarskiego [5].

Przyjęty w niniejszej pracy model zachowania betonu został dostosowany zgodnie z kryterium redukującym wytrzymałość i odkształcenia graniczne betonu wg Collinsa i in. [2].

Współczynnik oporu lepkiego wyznaczony został na podstawie zależności:

$$c_{i,kr} = 2\sqrt{m_i \cdot K}. \quad (14)$$

Sztywność układu została ustalona na podstawie warunku:

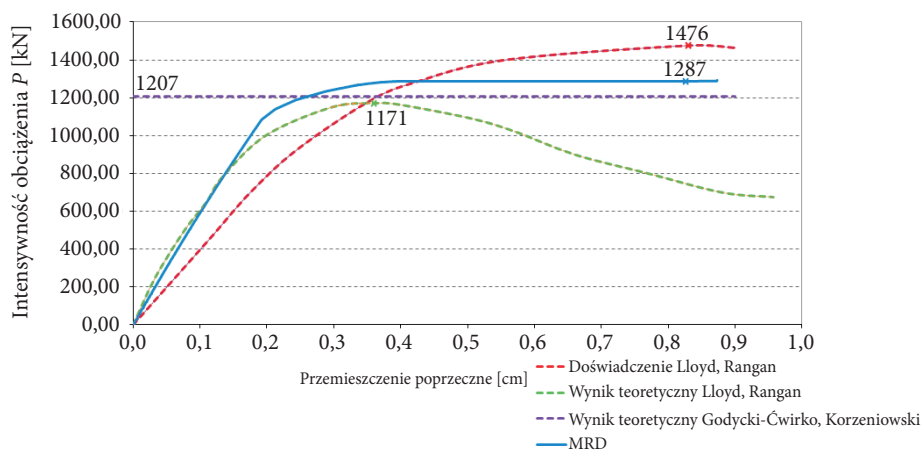
$$K = \max\{K_z, K_x\}, \quad (15)$$

gdzie: $K_z = 42 \frac{E_{e0} J_{cs}}{l^3}$ — sztywność giętna słupa;

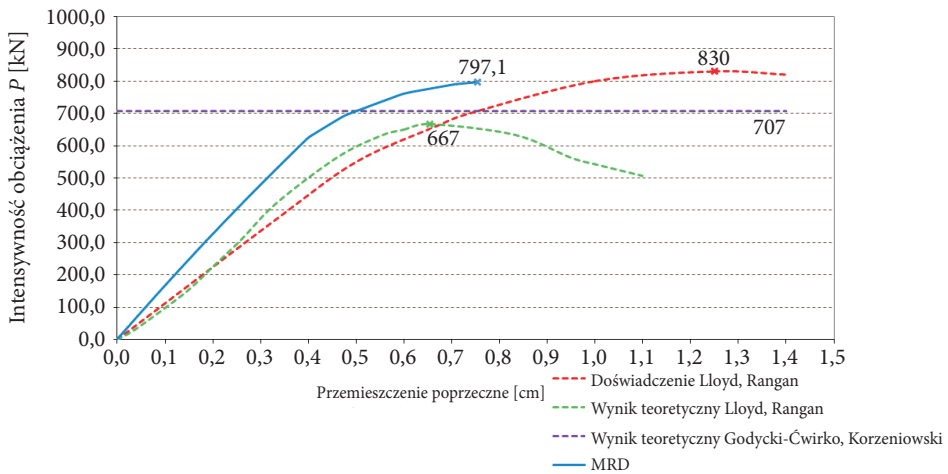
$K_x = \frac{E_{e0} A_{cs}}{l}$ — sztywność podłużna słupa;

A_{cs} — pole powierzchni sprowadzonego przekroju żelbetowego.

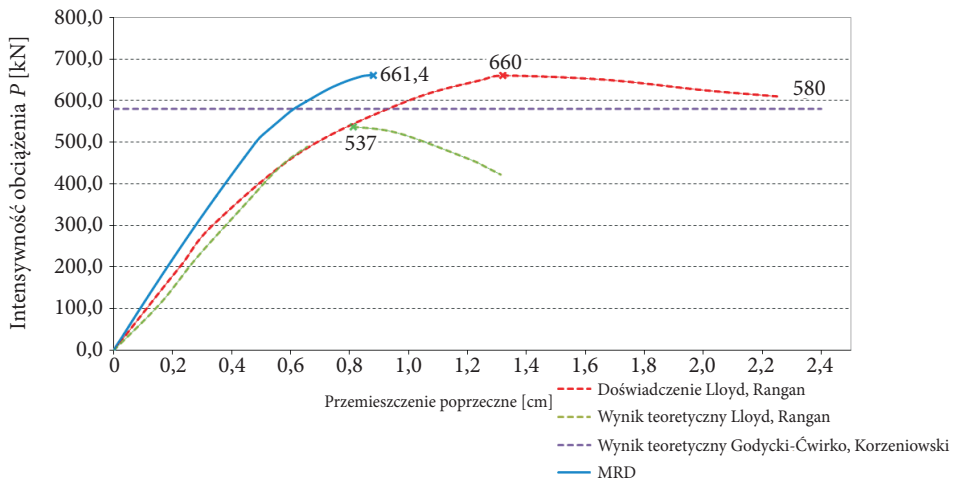
Na rysunku 6 przedstawiono wykresy wyników uzyskanych podczas badania słupa IA. Wyniki badań numerycznych oznaczono linią niebieską. Wyniki badań doświadczalnych przeprowadzonych przez Lloyd i Rangana oznaczone zostały czerwoną linią przerywaną, natomiast wyniki analizy teoretycznej zieloną linią przerywaną. Wartość nośności granicznej ustalonej przez Godyckiego-Ćwirko i Korzeniowskiego oznaczona została przerywaną linią fioletową.



Rys. 6. Wykres obciążenia słupa IA w funkcji przemieszczenia poprzecznego w węźle 13 — porównanie wyników numerycznych z wynikami doświadczalnymi i teoretycznymi



Rys. 7. Wykres obciążenia słupa IB w funkcji przemieszczenia poprzecznego w węźle 13 — porównanie wyników numerycznych z wynikami doświadczalnymi i teoretycznymi



Rys. 8. Wykres obciążenia słupa IC w funkcji przemieszczenia poprzecznego w węźle 13 — porównanie wyników numerycznych z wynikami doświadczalnymi i teoretycznymi

Wartość nośności granicznej $P_{0,IA}^{MRD} = 1287$ kN oraz przemieszczenia poprzecznego odpowiadającego jej osiągnięciu $w_{0,IA}^{MRD} = 0,826$ cm, odnotowana w badaniu numerycznym przy zastosowaniu Metody Relaksacji Dynamicznej (MRD), jest najbardziej zbliżona do wyniku badań doświadczalnych spośród wszystkich porównywanych metod analizy zaczerpniętych z literatury. Nośność o wartości $P_{0,IA}^{GC-K} = 1207$ kN wyznaczona przy pomocy metody Godyckiego-Ćwirko i Korzeniowskiego odpowiada nośności ustalonej teoretycznie $P_{0,IA}^{L-R} = 1171$ kN przez Lloyd i Rangana. Nośność

wyznaczona przy pomocy MRD odpowiada nośności wyznaczonej doświadczalnie $P_{0,IA}^{Exp.} = 1476$ kN ze zgodnością wynoszącą 87%, natomiast przemieszczenie ustalone zostało z niemal 100% zgodnością. W odniesieniu do analizy teoretycznej Lloyd i Rangana nośność wyznaczona numerycznie ma wartość o 10% większą, natomiast przemieszczenie jest ponad dwukrotnie większe.

Na rysunku 7 przedstawiono wyniki uzyskane podczas badania słupa IB obciążonego siłami działającymi na mimośrodzie $e = 50$ mm. Nośność graniczna ustalona na podstawie analizy numerycznej wynosi $P_{0,IB}^{MRD} = 797,1$ kN, a przemieszczenie poprzeczne towarzyszące jej osiągnięciu $w_{0,IB}^{MRD} = 0,75$ cm. Wyniki doświadczalne wskazywały na wartość granicznego obciążenia równą $P_{0,IB}^{Exp} = 830$ kN, przy przemieszczeniu o wartości $w_{0,IB}^{Exp} = 1,25$ cm. Nośność wyznaczona analitycznie przez Lloyd i Rangana wyniosła $P_{0,IB}^{L-R} = 667$ kN, a przemieszczenie $w_{0,IB}^{L-R} = 0,67$ cm. Natomiast graniczna wartość obciążenia wyznaczona przez Godyckiego-Ćwirko i Korzeniowskiego wyniosła $P_{0,IB}^{GC-K} = 707$ kN.

Największą zgodność z wynikami badań doświadczalnych odnotowano na podstawie badań numerycznych z zastosowaniem MRD. Nośność graniczna ustalona została ze zgodnością wynoszącą 95%, natomiast przemieszczenie poprzeczne ze zgodnością równą 59%. Nośności ustalonej teoretycznie przez L-R najbliższy jest wynik teoretyczny GC-K. Wyniki ustalone przy zastosowaniu MRD odpowiadają analizie teoretycznej L-R w odniesieniu do nośności ze zgodnością wynoszącą ponad 84%, natomiast w zakresie przemieszczenia zgodność wynosi ponad 90%.

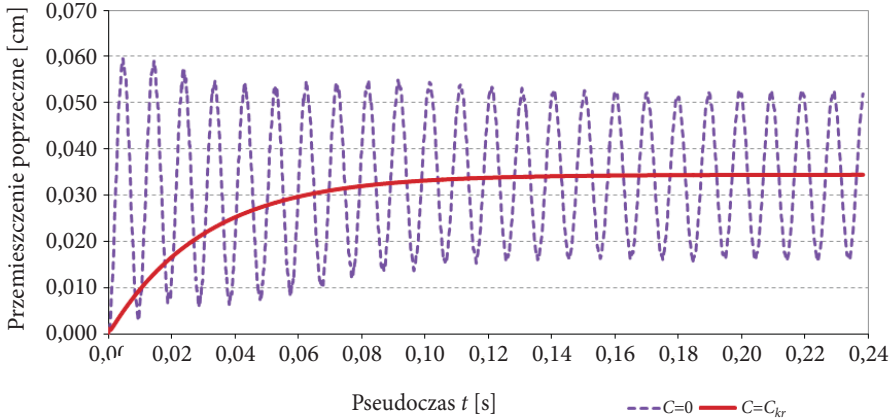
Na rysunku 8 przedstawione zostały wyniki uzyskane podczas analizy słupa IC. Wyniki badań doświadczalnych przeprowadzonych przez Lloyd i Rangana oznaczone zostały czerwoną linią przerywaną i wskazały na nośność graniczną o wartości $P_{0,IC}^{Exp} = 660$ kN, przy wartości przemieszczenia $w_{0,IC}^{Exp} = 1,32$ cm. Wyniki analizy teoretycznej L-R zaznaczone zostały zieloną linią przerywaną i wskazały na nośność o wartości $P_{0,IC}^{L-R} = 537$ kN, przy wartości przemieszczenia $w_{0,IC}^{L-R} = 0,81$ cm. Wartość nośności granicznej ustalonej przez Godyckiego-Ćwirko i Korzeniowskiego wyniosła $P_{0,IC}^{GC-K} = 580$ kN, oznaczona została przerywaną linią fioletową. Wyniki badań numerycznych oznaczono linią niebieską i wskazały na wartość granicznego obciążenia $P_{0,IC}^{MRD} = 661,4$ kN, przy wartości przemieszczenia towarzyszącej jej osiągnięciu $w_{0,IC}^{MRD} = 0,85$ cm.

8. Analiza tłumienia

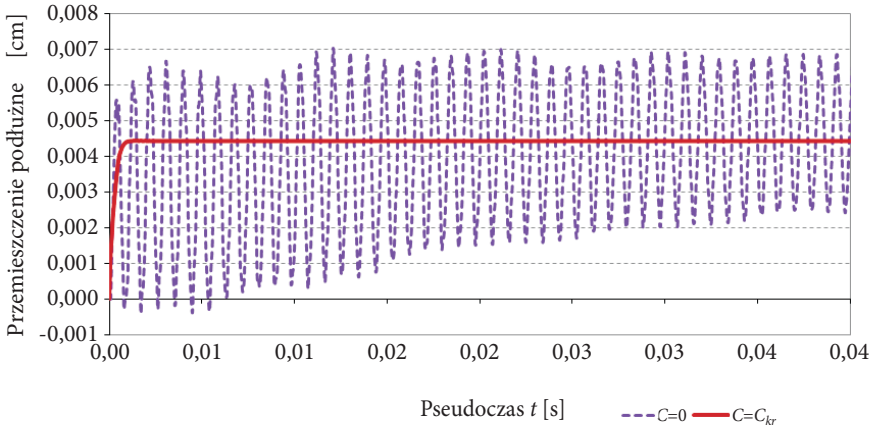
Analizę wyężenia słupów przeprowadzono przy pomocy metody relaksacji dynamicznej z zastosowaniem krytycznej wartości współczynnika tłumienia według (14).

Na następujących rysunkach zilustrowany został wpływ tłumienia na drgania słupa IB w sprężystym stanie wyężenia, przy wartości obciążenia $P = 58,0$ kN odpowiadającej około 7,3% nośności granicznej słupa.

Na rysunku 9 zaprezentowane zostały wyniki uzyskane dla przemieszczeń poprzecznych w przekroju zlokalizowanym w środku rozpiętości słupa. Wprowadzenie tłumienia krytycznego pozwoliło na osiągnięcie stanu równowagi ruchu aperiodycznego, przy wartości przemieszczeń poprzecznych w węźle 13 odpowiadających położeniu równowagi sprężystych drgań nietłumionych elementu konstrukcyjnego.



Rys. 9. Wykres przemieszczenia poprzecznego w węźle 13 w funkcji pseudoczasu



Rys. 10. Wykres przemieszczenia podłużnego w węźle 3 w funkcji pseudoczasu

Z kolei na rysunku 10 zobrazowany został wpływ tłumienia krytycznego na przebieg funkcji przemieszczenia podłużnego w węźle 3. Badania przeprowadzone zostały w węźle 3, z uwagi na występowanie w nim największych przemieszczeń podłużnych. Linią przerywaną zaznaczono przebieg drgań nietłumionych, natomiast

linią ciągłą wykres przemieszczeń po uwzględnieniu tłumienia krytycznego. Przebieg wykresu przemieszczenia podłużnego w pseudoczasie, po uwzględnieniu tłumienia krytycznego, odpowiada położeniu równowagi sprężystych drgań nietłumionych.

9. Wnioski

W artykule przedstawiono sformułowanie teoretyczne i weryfikację metody analizy zachowania mimośrodowo ściskanych elementów żelbetowych poddanych działaniu krótkotrwałych obciążeń statycznych.

Modelowanie właściwości materiałów konstrukcyjnych przeprowadzono przy założeniu sprężysto-plastycznych modeli fizycznych materiałów konstrukcyjnych z uwzględnieniem wzmocnienia dla stali zbrojeniowej i osłabienia dla betonu, przyjęto zbliżony rząd aproksymacji zachowania betonu i stali. Model betonu przyjęty do analizy jest trójodcinkowy i pozwala na śledzenie pełnego zjawiska osłabienia materiału oraz procesu odciążenia przy ściskaniu, co stanowi odzwierciedlenie wyników badań doświadczalnych. W modelu nie uwzględniono wytrzymałości betonu na rozciąganie — rozważania przeprowadzone zostały dla przekroju zarysowanego. Zastosowany model betonu stanowi aproksymację modelu proponowanego do nieliniowej analizy konstrukcji betonowych w Eurokodzie 2 (EC2). Jednak nieliniowy model zaproponowany w EC2 pozwala na śledzenie zjawiska osłabienia materiału w zakresie ograniczonym tylko do 85% wytrzymałości betonu, a model paraboliczno-prostokątny w ogóle nie uwzględnia tego zjawiska.

Analiza elementu konstrukcyjnego przeprowadzona została przy zastosowaniu Metody Różnic Skończonych. Do rozwiązania układu nieliniowych równań równowagi zastosowana została Metoda Relaksacji Dynamicznej, której istotą jest potraktowanie procesu statycznego jako granicznego przypadku procesu dynamicznego z uwzględnieniem tłumienia krytycznego.

W celu weryfikacji poprawności zastosowanej metody i opracowanych procedur numerycznych przeprowadzona została analiza wyężenia słupów żelbetowych, a otrzymane wyniki porównano z wynikami doświadczalnymi i teoretycznymi dostępnymi w literaturze. Wyniki otrzymane na podstawie badania wyężenia słupów żelbetowych wskazują na efektywność obliczeniową zastosowanej procedury numerycznej w zakresie analizy nieliniowej do osiągnięcia nośności słupa.

Zaproponowana metoda obliczeniowa pozwala na wstępne oszacowanie nośności słupa bez możliwości śledzenia jego zachowania w zakresie pokrytycznym, który obserwowany jest podczas badań doświadczalnych. Analiza globalnego osłabienia przekroju w zakresie pokrytycznym wymaga włączenia do procedury obliczeniowej parametru długości łuku.

Artykuł wpłynął do redakcji 17.02.2014 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 18.04.2014 r.

LITERATURA

- [1] BĄK G., STOLARSKI A., *Analiza nieliniowa prętowych ustrojów żelbetowych obciążonych impulsowo*, Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Studia z Zakresu Inżynierii, 30, Warszawa, 1990.
- [2] COLLINS M.P., MITCHELL D., MACGREGOR J.G., *Structural Design Considerations for High-Strength Concrete*, Concrete International: Design and Construction, 15, 5, May 1993, 27-34.
- [3] GODYCKI-ĆWIRKO T., KORZENIOWSKI P., *Load-bearing capacity of HSC columns, estimated with use of simplified methods in the light of experimental results*, Archives of Civil Engineering, 46, 1, Gdańsk 2000, 39-49.
- [4] LLOYD N.A., RANGAN B.V., *Studies on High-Strength Concrete Columns under Eccentric Compression*, ACI Structural Journal, Technical Paper, 93-S59, November-December 1996, 631-638.
- [5] STOLARSKI A., *Model dynamicznego odkształcenia betonu*, AIL, 37, 3-4, 1991, 405-447.

A. SZCZEŚNIAK, A. STOLARSKI

Effort analysis of reinforced concrete columns using dynamic relaxation method

Abstract. The method of the analysis of static deformation of reinforced concrete columns with regard to geometrical nonlinearity of the columns and physical nonlinearity of structural materials was presented in the paper. For reinforcing steel, the elastic-plastic model of material with material hardening was applied. The elastic-plastic model of material with material softening was used for concrete. The method of effort analysis of the structural system was developed using the finite difference method. The effective dynamic relaxation method for solution of the systems of the equilibrium equations of reinforced concrete columns was developed. It was the basis for preparation of the own numerical procedures and numerical program. The reinforced concrete simple supported columns, under eccentric compression, were numerically analysed. The numerical results were compared with experimental results, taken from literature, and with theoretical solutions.

Keywords: mechanics of structures, reinforced concrete columns, physical nonlinearity, geometrical nonlinearity