

# Estymacja parametrów asymetrycznych procesów niegaussowskich o średniej kroczącej metodą maksymalizacji wielomianu stochastycznego PMM

Serhii Zabolotnii

Państwowa Wyższa Szkoła Biznesu w Czerkasach, Ukraina

Zygmunt L. Warsza

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP-sieć badawcza Łukasiewicz, Al. Jerozolimskie 202, 02-486 Warszawa, Polska

Oleksandr Tkachenko

Uniwersytet Narodowy w Użhorodzie, Ukraina

**Streszczenie:** W artykule rozważa się zastosowanie metody maksymalizacji wielomianów stochastycznych PMM do oszacowania parametrów niegaussowskiego modelu procesów o średniej ruchomej. Jest to podejście adaptacyjne oparte na analizie statystyk wyższego rzędu. Rozpatrywane są procesy o rozkładzie asymetrycznym ze średnią ruchomą. Wykazano, że Metodą Maksymalizacji Wielomianu (II rzędu) uzyskuje się asymptotyczne wariancje oszacowań wyrażeń analitycznych, które pozwalają na znalezienie oszacowań i analizę ich niepewności. Otrzymuje się znacznie mniejsze wariancje niż w oszacowaniu klasycznym opartym na minimalizacji warunku sumy kwadratów lub maksymalizacji funkcji największej wiarygodności w przypadku rozkładu Gaussa. Wzrost dokładności zależy od wartości współczynnika asymetrii i kurtozy reszt. Wyniki modelowania statystycznego metodą Monte Carlo potwierdzają skuteczność proponowanego podejścia.

**Słowa kluczowe:** estymatory, średnia krocząca, maksymalizacja wielomianu stochastycznego PMM, statystyki wyższego rzędu, procesy niegaussowskie

## 1. Wstęp

Procesy o akronimie MA (o ruchomej średniej) są szczególnym przypadkiem szerszej klasy modeli szeregów czasowych ARMA (autoregresyjne o średnich kroczących). Początkowo opracowano je do rozwiązywania problemów występujących przy przewidywaniu zachowywania się obiektów dynamicznych. Później znalazły one szersze zastosowanie do prognozowania procesów geofizycznych, finansowych, biomedycznych i innych. Teoria szeregów czasowych rozwinęła się w powiązaniu z teorią filtracji liniowej.

Zastosowanie modeli ARMA (ang. *AutoRegressive Moving Average*) w przewidywaniu i kontroli dynamiki systemów, zwłaszcza w dziedzinie robotyki i automatyki, dostarcza narzędzi umożliwiających skuteczne zarządzanie procesami przy jednoczesnym uwzględnieniu ich zmienności i potencjalnej nieliniowości. W wielu zastosowaniach praktycznych,

takich jak regulacja procesów dynamicznych, czy też prognozowanie parametrów w systemach pomiarowych, często występują skomplikowane i niejednorodne struktury danych. Mogą one odbiegać istotnie od założeń przyjmowanych dla idealizowanych modeli, w tym od normalności rozkładów prawdopodobieństwa. Podejście ARMA dostarcza cennych informacji i jest szeroko stosowane w różnych dziedzinach. Uwzględni ono ograniczenia wynikające z zastosowania tych metod w systemach rzeczywistych, w tym przemysłowych.

Z matematycznego punktu widzenia, metoda najmniejszych kwadratów jest optymalna, jeśli rozkład wartości zmiennej objaśnianej jest normalny. Jednak w wielu zastosowaniach zwraca się uwagę na idealizację takiego założenia, które chociaż upraszcza rozwiązanie, często nie odpowiada realiom wielu zadań występujących w praktyce [3–8]. Ze statystycznego punktu widzenia istotna różnica między rzeczywistymi resztami (błędami dopasowania modelu), a ich idealizacją o rozkładzie Gaussa prowadzi do wzrostu niepewności otrzymywanych oszacowań parametrów takich modeli. Istnieje kilka sposobów na poprawę dokładności oszacowania. Jednym z nich jest podejście parametryczne oparte na wykorzystaniu estymatorów typu M uzyskiwanych w metodzie największej wiarygodności ML (ang. *Maximum Likelihood*).

Istnieje wiele rodzajów rozkładów używanych do opisu składnika losowego modeli AR i MR. Na przykład badane są procesy z rozkładami gamma i logarytmiczno-normalnym [1], o rozkładzie Studenta [2], mieszaniny rozkładu

### Autor korespondujący:

Zygmunt Lech Warsza, zlw1936@gmail.com

### Artykuł recenzowany

nadesłany 14.07.2023 r., przyjęty do druku 04.09.2023 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

normalnego i Poissona [3], rodzina wykładniczych rozkładów [4], polimieszaniny oparte na rozkładach Laplace'a [5], Cauchy'ego [6] itp.

Przy podejściu parametrycznym konieczna jest identyfikacja typu i znalezienie oszacowań parametrów rozkładu probabilistycznego opisujących składowe losowe szeregu czasowego. Opracowano też szereg metod szacowania łącznego [1] oraz adaptacyjnego i iteracyjnego [7, 8].

Alternatywnym podejściem w uwzględnianiu niegaussowskiej natury procesów jest wykorzystanie statystyk wyższego rzędu (momenty, kumulanty i ich funkcje). Sposób ten charakteryzuje się znacznym obniżeniem poziomu wymaganej a priori informacji i uproszczeniem algorytmicznym w realizacji praktycznej. Wskutek tego uproszczenia niższa jest efektywność otrzymanych rozwiązań, gdyż opis ten jest częściowy w porównaniu z gęstością rozkładu prawdopodobieństwa. Przykłady wykorzystania tego sposobu w identyfikacji różnych modeli predykcyjnych i szacowania ich parametrów informacyjnych podano w [9–13].

W niniejszej pracy, do znalezienia oszacowań parametrów modeli MA, proponuje się zastosowanie metody maksymalizacji wielomianu stochastycznego o akronimie PMM (ang. *Polynomial Maximization Method*) [14]. Metoda ta, podobnie jak metoda ML, wykorzystuje zasadę maksymalizacji funkcjonału dla pobranych danych, zbliżonych do wartości rzeczywistej estymowanych parametrów. Do utworzenia takiego funkcjonału nie używa się rozkładu gęstości prawdopodobieństwa, ale opis w postaci statystyk wyższego rzędu. Opracowanie to kontynuuje prace [15–17], w których rozważa się zastosowanie metody maksymalizacji wielomianu (PMM) do estymacji parametrów regresji liniowej i wielomianowej oraz autoregresyjnego modelu z niegaussowskimi, asymetrycznie rozłożonymi danymi statystycznymi.

## 2. Podstawy teoretyczne metody PMM

### 2.1. Matematyczne sformułowanie problemu

Wektor  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  opisujący model o średniej ruchomej zawiera kolejne składniki szeregu czasowego o następujących wartościach

$$x_v = \sum_{q=1}^Q b_q \xi_{v-q} + \xi_v, \quad v = \overline{1, N}, \quad (1)$$

gdzie obserwacje  $\xi_v$  są szeregiem identycznie rozłożonych niezależnych zmiennych losowych o zerowej wartości oczekiwanej ( $E\{\xi\} = 0$ ).

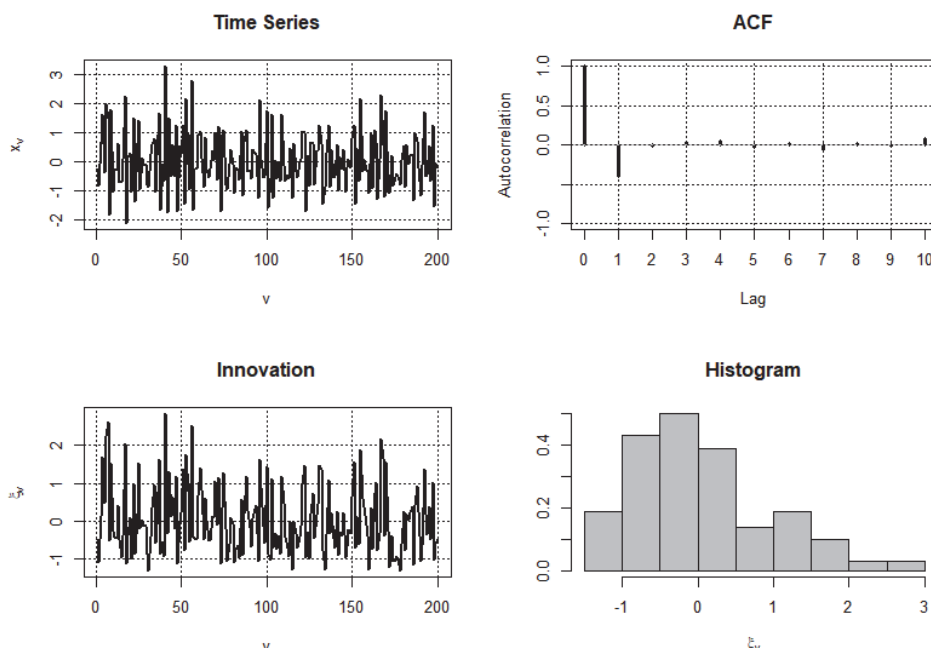
Ich rozkład różni się od rozkładu normalnego (Gaussa) i ma znaczną asymetrię. Dodatkowym ograniczeniem jest to, że zmienna losowa  $\xi_v$  ma momenty  $\mu_r$  skończone do czwartego rzędu. Ogólnie zadanie to polega na oszacowaniu parametrów wektora  $\theta = \{b_1, \dots, b_Q\}$  na podstawie analizy statystycznej zbioru próbek  $\mathbf{X}$ . Funkcja opisująca rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $\xi_v$  jest nieznaną a priori.

Jako przykład takiego modelu na rysunku 1 przedstawiono wizualizację symulacji najprostszego szeregu czasowego o ruchomej średniej MA opisanego wzorem (1):  $x_v = -0,5\xi_{v-1} + \xi_v$ . Występują w nim składniki losowe  $\xi_{v-1}$  z poprzednich iteracji i składnik ostatni  $\xi$  jako próbki składnika losowego o rozkładzie gamma, nazwane innowacjami (ang. *innovation*) jako nowo wylosowane liczby losowe.

Rozkład gamma opisany jest wzorem:  $g(x, \theta, k) = \Gamma(k) \theta^k x^{k-1} \exp(-x/\theta)$ , w którym dla  $x > 0$ ,  $\theta$ ,  $k$  są parametrami rozkładu o wartościach, które powinny być znane przy symulacji. Parametr  $k$  określa amplitudę asymetrii. Rozkład ten ma niezerową wartość oczekiwaną  $\mu = k\theta$ . Histogram rozkładu (rys. 1d) występuje dla wartości ujemnych. Oznacza to, że jest on przesunięty w lewo o wartość  $k\theta$ , aby wyzerować wartość oczekiwaną. Na rysunku 1 przedstawiono również funkcję autokorelacji (ACF) szeregu czasowego  $x_v$  oraz empiryczny rozkład innowacji  $\xi_v$  w postaci znormalizowanego histogramu.

### 2.2. Wyniki teoretyczne

Idea wykorzystania metody PMM do estymacji parametrów modeli MA (średniej ruchomej) opiera się na matematycznej analogii między modelem (1), a regresją liniową (względem parametrów). Ponieważ odczyty zmiennej losowej  $\xi$  są statystycznie od siebie niezależne, to zbiór wartości  $\xi_{v-q}$  można formalnie traktować jako predykatory wielowymiarowej regresji liniowej dla bieżących wartości szeregu  $x_v$ .



Rys. 1. Najprostsza symulacja szeregu czasowego: jego funkcja autokorelacji ACF i histogram składnika  $\xi_v$   
Fig. 1. The simplest simulation of time series: its autocorrelation function ACF and histogram of  $\xi_v$

Do rozwiązania problemu wykorzystamy wyniki pracy [15], w której rozważa się zastosowanie PMM do oszacowania wektora parametrów regresji liniowej. Taka metoda estymacji opiera się na wykorzystaniu właściwości maksymalizacji funkcjonalu w postaci wielomianu stochastycznego

$$L_{SN} = \sum_{v=1}^N \sum_{i=1}^S \phi_i(x_v) \int^b k_{i,v}(z) dz - \sum_{i=1}^S \sum_{v=1}^N \int^b \Psi_{i,v} k_{i,v}(z) dz \quad (2)$$

gdzie

$$\Psi_{i,v} = E\left\{\phi_i(x_v)\right\}, \quad i = \overline{1, S}, \quad v = \overline{1, N}, \quad (3)$$

i ma wartość zbliżoną do prawdziwej wartości szacowanego parametru  $b$ .

Jeżeli jako funkcje podstawowe stosuje się funkcje potęgowe  $\phi_i(x_v) = (x_v)^i$ , to ciąg wartości oczekiwanych (3) jest zbiorem momentów początkowych  $m_{i,v}$  odpowiedniego rzędu. Podobnie jak w metodzie największej wiarygodności, oszacowanie parametru  $b$  znajduje się z rozwiązania równania o postaci

$$\frac{d}{db} L_{SN} \Big|_{b=\hat{b}} = \sum_{i=1}^S \sum_{v=0}^N k_{i,v} \left[ (x_v)^i - m_{i,v} \right] \Big|_{b=\hat{b}} = 0 \quad (4)$$

Optymalne współczynniki  $k_{i,v}$  maksymalizujące funkcjonal (2) są rozwiązaniami układu liniowych równań algebraicznych:

$$\sum_{j=1}^S k_{j,v} F_{(i,j)v} = \frac{d}{db} m_{i,v}, \quad i = \overline{1, S}, \quad v = \overline{1, N}, \quad (5)$$

gdzie:  $F_{(i,j)v} = m_{(i+j)v} - m_{i,v} m_{j,v}$ ,  $i, j = \overline{1, S}$ .

Podejście to można rozszerzyć na przypadek oszacowania parametrów wektora  $\theta = \{b_1, \dots, b_Q\}$ . W tym celu konieczne jest utworzenie  $Q$  ogólnych wielomianów (2) dla każdego elementu tego wektora. Požadane szacunki znajduje się rozwiązując układ równań o postaci:

$$\sum_{i=1}^S \sum_{v=1}^N k_{i,v}^{(q)} \left[ (x_v)^i - m_{i,v} \right] \Big|_{b_Q=\hat{b}_Q} = 0, \quad q = \overline{1, Q}. \quad (6)$$

Z analizy zależności (6) wynika, że oszacowania wektora parametrów  $Q$  wyznacza się z warunków równej zeru sumy różnic między teoretycznymi a empirycznymi wartościami momentów obserwowanych danych statystycznych. Są one ważone optymalnymi współczynnikami, które minimalizują wariancję oszacowań dla zastosowanego stopnia  $S$  wielomianu stochastycznego. Główną trudnością jest brak *a priori* informacji o teoretycznych wartościach pierwszych  $2S$  momentów początkowych  $m_{i,v}$ , które zależą zarówno od szacowanych parametrów  $\theta = \{b_1, \dots, b_Q\}$ , jak i od momentów  $\mu_r$  zmiennej losowej  $\xi$ .

Podobnie jak w pracy [15], do rozwiązania można zastosować podejście adaptacyjne. Polega ono na zastąpieniu wartości *a priori*  $\mu_r$  ich szacunkami *a posteriori*  $\hat{\mu}_r$ . Można je obliczyć na podstawie analizy reszt  $\varepsilon$  uzyskanych po oszacowaniu parametrów modelu MA, metodą największej wiarygodności (dla założenia, że rozkład jest normalny) lub iteracyjnej modyfikacji metody najmniejszych kwadra-

tów (minimalizacja warunkowych sum kwadratów). Jeśli typ modelu MA i jego kolejność zostanie zidentyfikowany poprawnie, to ciąg reszt będzie procesem losowym typu „biały szum” o własnościach bliskich rozkładowi zmiennej losowej  $\xi$ . Wartości nieskorelowanych obserwacji  $\varepsilon_{v-q}$  używa się jako niezależne w modelu (1).

W pracy [15] wykazano też, że dla liniowej wersji PMM (przy zastosowaniu wielomianu stochastycznego stopnia  $S = 1$ ) układ równań (6), który uzyskano do znajdowania oszacowań parametrów modeli regresji, jest równoważny układowi równań dla metody najmniejszych kwadratów (LS). Wiadomo też, że skuteczność takich estymacji metodą najmniejszych kwadratów znacznie spada, gdy rozkład składnika losowego modelu regresji różni się od normalnego. Dlatego poniżej rozważy się nowe podejście do nieliniowej estymacji parametrów modelu MA. Jest ono oparte na wykorzystaniu wielomianów stochastycznych drugiego stopnia.

Przy użyciu wielomianów stochastycznych rzędu  $S = 2$  oszacowania modelu MA (1) metodą PMM można znaleźć z rozwiązania układu równań

$$\sum_{v=1}^N \left\{ k_{1,v}^{(q)} \left[ x_v - \sum_{q=1}^Q b_q \varepsilon_{v-q} \right] + k_{2,v}^{(q)} \left[ (x_v)^2 - \left( \sum_{q=1}^Q b_q \varepsilon_{v-q} \right)^2 - \mu_2 \right] \right\} = 0, \quad q = \overline{1, Q} \quad (7)$$

gdzie optymalne współczynniki  $k_{i,v}^{(q)}$ ,  $i = \overline{1, 2}$  zapewniają minimalizację wariancji oszacowań składowych požadanego parametru przy wykorzystaniu stopnia wielomianu  $S = 2$ .

Współczynniki te znajduje się jako rozwiązanie odpowiedniego układu o postaci (5). Mają one następujące postacie:

$$k_{1,v}^{(q)} = \frac{\mu_4 - \mu_2^2 + 2\mu_3 \sum_{q=1}^Q b_q \varepsilon_{v-q}}{\mu_2 (\mu_4 - \mu_2^2) - \mu_3^2} \varepsilon_{v-q}, \quad (8)$$

$$k_{2,v}^{(q)} = - \frac{\mu_3^2}{\mu_2 (\mu_4 - \mu_2^2) - \mu_3^2} \varepsilon_{v-q}.$$

Po podstawieniu współczynników (8) do (7) i prostych przekształceniach, układ równań do oszacowań można zapisać jako

$$\sum_{v=1}^N \left\{ \varepsilon_{v-p} \left[ A \left( \sum_{q=1}^Q b_q \varepsilon_{v-q} \right)^2 + B_v \sum_{q=1}^Q b_q \varepsilon_{v-q} + C_v \right] \right\} = 0, \quad p = \overline{0, Q-1}, \quad (9)$$

gdzie:

$$A = \mu_3, \quad B_v = \mu_4 - \mu_2^2 - x_v \mu_3, \quad (10)$$

$$C_v = x_v^2 \mu_3 - x_v (\mu_4 - \mu_2^2) - \mu_2 \mu_3$$

Występują tu zależności od wartości próbek  $x_v$  i od momentów  $\mu_2 - \mu_4$  składowej losowej modelu (1). Dla stopnia wielomianu  $S = 2$  oszacowania PMM można znaleźć tylko numerycznie, na przykład przy użyciu różnych procedur iteracyjnych.

W [14] wykazano, że nieliniowe oszacowania parametrów PMM są zgodne (ang. *consistent*) i asymptotycznie

Tabela 1. Względna skuteczność oszacowań PMM (S=2) parametrów modelu MA(1) w porównaniu z oszacowaniami CSS

Table 1. Relative efficiency of the PMM estimates (S=2) of parameters MA(1) model compared to CSS estimates

Parametr rozkładu gamma (kształt)	Wartości teoretyczne			Wyniki statystycznej symulacji Monte Carlo								
	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$g_2$	N = 50			N = 100			N = 200		
				$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$	$\hat{g}_2(b_1)$	$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$	$\hat{g}_2(b_1)$	$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$	$\hat{g}_2(b_1)$
$\alpha = 1$	2	6	<b>0,5</b>	1,6	3,1	<b>0,95</b>	1,8	4,1	<b>0,59</b>	1,9	4,9	<b>0,57</b>
$\alpha = 2$	1,4	3	<b>0,6</b>	1,2	1,6	<b>0,79</b>	1,3	2,2	<b>0,7</b>	1,3	2,5	<b>0,69</b>
$\alpha = 4$	1	1,5	<b>0,71</b>	0,8	0,8	<b>0,81</b>	0,9	1,1	<b>0,82</b>	1	1,3	<b>0,83</b>

Tabela 2. Względna skuteczność oszacowań PMM (S = 2) parametrów modelu MA(1) w porównaniu do szacunków MML (model Gaussa)

Table 2. Relative efficiency of PMM-estimates (S = 2) of parameters MA(1) model compared to MML estimates (Gaussian model)

Parametr rozkładu gamma (kształt)	Wartości teoretyczne			Wyniki statystycznej symulacji Monte Carlo								
	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$g_2$	N = 50			N = 100			N = 200		
				$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$	$\hat{g}_2(b_1)$	$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$	$\hat{g}_2(b_1)$	$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$	$\hat{g}_2(b_1)$
$\alpha = 1$	2	6	<b>0,5</b>	1,6	3,1	<b>0,7</b>	1,8	4,1	<b>0,57</b>	1,9	4,8	<b>0,56</b>
$\alpha = 2$	1,4	3	<b>0,6</b>	1,1	1,6	<b>0,74</b>	1,3	2,1	<b>0,69</b>	1,3	2,5	<b>0,68</b>
$\alpha = 4$	1	1,5	<b>0,71</b>	0,8	0,8	<b>0,78</b>	0,9	1,1	<b>0,79</b>	0,9	1,3	<b>0,83</b>

Tabela 3. Względna skuteczność oszacowań PMM (S = 2) parametrów modelu MA(2) w porównaniu do szacunków CSS (model Gaussa)

Table 3. Relative efficiency of the PMM estimates (S = 2) of parameters MA(2) model compared to CSS estimates (Gauss model)

Parametr rozkładu gamma (kształt)	Wartości teoretyczne			Wyniki statystycznej symulacji Monte Carlo								
	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$g_2$	N = 50			N = 100			N = 200		
				$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$	$\hat{g}_2(b_1)$	$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$	$\hat{g}_2(b_1)$	$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$	$\hat{g}_2(b_1)$
$\hat{g}_2(b_2)$						$\hat{g}_2(b_2)$			$\hat{g}_2(b_2)$			
$\alpha = 1$	2	6	<b>0,5</b>	1,5	2,8	<b>0,98</b>	1,7	4,1	<b>0,55</b>	1,9	4,9	<b>0,49</b>
						<b>0,66</b>			<b>0,68</b>			<b>0,67</b>
$\alpha = 2$	1,4	3	<b>0,6</b>	1,1	1,5	<b>0,57</b>	1,2	2,1	<b>0,59</b>	1,3	2,5	<b>0,61</b>
						<b>0,75</b>			<b>0,75</b>			<b>0,79</b>
$\alpha = 4$	1	1,5	<b>0,71</b>	0,8	0,8	<b>0,69</b>	0,9	1	<b>0,74</b>	0,9	1,2	<b>0,73</b>
						<b>0,81</b>			<b>0,87</b>			<b>0,91</b>

Tabela 4. Względna skuteczność oszacowań PMM (S = 2) parametrów modelu MA(2) w porównaniu z oszacowaniami MML (model Gaussa)

Table 4. Relative efficiency of the PMM estimates (S = 2) of parameters MA(2) model compared to MML estimates (Gauss model)

Parametr rozkładu gamma (kształt)	Wartości teoretyczne			Wyniki statystycznej symulacji Monte Carlo								
	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$g_2$	N = 50			N = 100			N = 200		
				$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$	$\hat{g}_2(b_1)$	$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$	$\hat{g}_2(b_1)$	$\hat{\gamma}_3$	$\hat{\gamma}_4$	$\hat{g}_2(b_1)$
$\hat{g}_2(b_2)$						$\hat{g}_2(b_2)$			$\hat{g}_2(b_2)$			
$\alpha = 1$	2	6	<b>0,5</b>	1,5	2,9	<b>0,90</b>	1,7	4	<b>0,48</b>	1,9	4,9	<b>0,51</b>
						<b>0,69</b>			<b>0,64</b>			<b>0,67</b>
$\alpha = 2$	1,4	3	<b>0,6</b>	1,1	1,5	<b>0,62</b>	1,2	2,1	<b>0,63</b>	1,3	2,5	<b>0,61</b>
						<b>0,76</b>			<b>0,78</b>			<b>0,80</b>
$\alpha = 4$	1	1,5	<b>0,71</b>	0,7	0,8	<b>0,7</b>	0,9	1,1	<b>0,71</b>	0,9	1,3	<b>0,73</b>
						<b>0,82</b>			<b>0,88</b>			<b>0,92</b>

nieobciążone. Wyrażenia opisujące wariancje oszacowań PMM dla przypadku asymptotycznego (tj. dla  $N \rightarrow \infty$ ) można otrzymać jako elementy głównej przekątnej macierzy zmienności, jako odwrotności macierzy złożonej z elementów

$$J_{SN}^{(q,p)} = \sum_{v=1}^N \sum_{i=1}^S k_{i,v}^{(q)} \frac{\partial}{\partial b_p} m_{i,v}, \quad q, p = \overline{1, Q}. \quad (11)$$

W sensie statystycznym, ilość uzyskanych informacji jest zbliżona do informacji Fishera i dąży do wartości granicznej dla stopnia wielomianu  $S \rightarrow \infty$  [14].

W pracy [15] wykazano, że asymptotyczne wartości wariancji estymat PMM parametru wektora, uzyskane z wykorzystaniem stopnia wielomianu  $S = 1$  pokrywają się z estymatami metody LS, a także estymatami MML (dla danych o rozkładzie normalnym). Dlatego też jako kryterium skuteczności oszacowań PMM uzyskanych za pomocą wielomianów stopnia  $S$  można zastosować bezwymiarowy współczynnik

$$g_s^{(b_i)} = \frac{\sigma_{(b_i)S}^2}{\sigma_{(b_i)1}^2} \quad (12)$$

Współczynnik ten jest taki sam dla wszystkich szacowanych parametrów jako składowych wektora  $Q$  i dla  $S = 2$  można go przedstawić jako

$$g_2^{(b_i)} = 1 - \frac{\mu_3^2}{\mu_2(\mu_1 - \mu_2^2)} = 1 - \frac{\gamma_3^2}{2 + \gamma_4}. \quad (13)$$

Przejście w wyrażeniu (13) od opisu przez momenty  $\mu_i$  do opisu przez kumulanty  $\gamma_i$  uzasadnia się tym, że odchylenia wartości współczynników kumulantów wyższego rzędu  $\gamma_r = \kappa_r / \kappa_2^{r/2}$  od zera wskazują stopień odstępstwa od rozkładu Gaussa. Na podstawie nierówności  $\gamma_4 + 2 \geq \gamma_3$  można stwierdza się, że współczynnik redukcji dyspersji  $g_2$  jest bezwymiarowy i należy do przedziału  $(0; 1]$ . Zatem wraz ze wzrostem asymetrii rozkładu zmiennej losowej  $\xi$ , względny spadek wariancji może być znaczący.

### 3. Modelowanie statystyczne

W celu weryfikacji wyników teoretycznych zmodyfikowano zbiór funkcji napisanych w języku R. Wprowadzono procedurę wielokrotnych testów Monte Carlo do znajdowania wielomianowych oszacowań modeli regresji i autoregresji [11–13]. Dzięki temu stała się możliwa dodatkowo analiza porównawcza dokładności różnych metod szacowania parametrów modeli ze średnią ruchomą i składnikiem losowym o rozkładzie niegaussowskim. Przy wdrażaniu tego modelowania statystycznego, jako obiekt badań wykorzystano dwa modele: MA(1) z parametrem  $b_1 = 0,4$  i MA(2) z parametrami  $b_1 = 0,4$ ,  $b_2 = -0,2$ . Wartości parametrów informacyjnych szacowano za pomocą wbudowanej funkcji R ARIMA przy użyciu dwóch klasycznych metod: CSS – minimalizacja warunkowej sumy kwadratów i największej wiarygodności ML, a także niestandardowej kwadratowej modyfikacji wielomianowej metody maksymalizacji. Jako asymetryczny składnik losowy modelu MA zastosowano szeregi niezależnych i identycznie rozłożonych zmiennych

losowych o rozkładzie gamma  $p(\xi) = \frac{\exp(-\xi)}{\Gamma(\alpha)} \xi^{\alpha-1}$  o różnych

wartościach parametru kształtu (ang. *shape*)  $\alpha$ , które określają stopień asymetrii i o parametrze  $\theta = 1$ . Jednocześnie parametry (momenty do czwartego rzędu) składnika losowego, niezbędne do znalezienia adaptacyjnych estymatorów PMM, uznano za nieznanne *a priori* i zamiast tego zastosowano ich oszacowania *a posteriori*

$$\hat{\mu}_r = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N (\varepsilon_v)^r \quad (14)$$

Obliczone je dla reszt z zastosowania metod klasycznych.

Zestaw wartości współczynników efektywności uzyskanych dla serii  $M = 10^4$  wielokrotnych eksperymentów przedstawiono w tabelach 1–4.

Analiza empirycznych wartości współczynników efektywności przedstawionych w tabelach pokazuje, że wielomianowe oszacowania parametrów informacyjnych badanych za pomocą modeli MA są dokładniejsze w porównaniu z oszacowaniami klasycznymi. Zakres redukcji dyspersji jest dość szeroki: od kilku procent do wartości dwukrotnie większej. W tym przypadku trendy zmiany dokładności w zależności od stopnia odstępstwa od gaussowości (wyrażonej liczbowo wartościami współczynników skośności i kurtozy) korelują z zależnością teoretyczną (13). Istotne różnice obserwuje się tylko dla małych wartości wielkości próby danych statystycznych  $N$ . Wynika to stąd, że przy niewielkiej ilości danych statystycznych oszacowania *a posteriori* parametrów  $\hat{\gamma}_3$  i  $\hat{\gamma}_4$  mają dość dużą wariancję, a także istotne przesunięcie (wyrażone przez dane tabelaryczne). Ze wzrostem liczby danych  $N$  różnice niwelują się i wartości eksperymentalne asymptotycznie zbliżają się do teoretycznych.

### 4. Podsumowanie i wnioski

Uzyskane wyniki potwierdzają możliwość zastosowania metody maksymalizacji wielomianowej do oszacowania parametrów informacyjnych modeli MR (ze średnią ruchomą) dla składowej losowej podlegającej asymetrycznemu rozkładowi gamma.

Zaproponowaną metodę można interpretować jako adaptacyjną i kompromisową dla realizacji w praktyce. Algorytm uzyskiwania oszacowań wielomianowych nie wymaga znajomości *a priori* prawa rozkładu prawdopodobieństwa. Do jej realizacji wystarczy uzyskać informację o wartościach ograniczonego zestawu statystyk wyższego rzędu. Istotne znacznie ma mniejsza złożoność w porównaniu z podejściem maksymalnego prawdopodobieństwa. Jednocześnie oszacowania wielomianowe charakteryzują się większą dokładnością (według kryterium ilorazu wariancji) w porównaniu z oszacowaniami klasycznymi optymalizowanymi dla modelu Gaussa.

Kolejne, warte rozważenia cele przedstawione w pracy kierunku badań to:

- estymacja parametrów modeli MA dla symetrycznych rozkładów niegaussowskich;
- porównanie efektywności estymatorów adaptacyjnych metod maksymalizacji wielomianowej i maksymalnej wiarygodności, odpowiednio zoptymalizowanych dla rozkładów niegaussowskich;
- wielomianowa estymacja parametrów złożonych niegaussowskich modeli szeregów czasowych (ARMA, GARH itp.).

### Bibliografia

1. Li W.K., McLeod A.I., *ARMA modelling with non-Gaussian innovations*. „Journal of Time Series Analysis”, Vol. 9, No. 2, 1988, 155–168, DOI: 10.1111/j.1467-9892.1988.tb00461.x.



2. Tiku M.L., Wong W.-K., Vaughan D.C., Bian G., *Time Series Models in Non-Normal Situations: Symmetric Innovations*. „Journal of Time Series Analysis”, Vol. 21, No. 5, 2000, 571–596. DOI: 10.1111/1467-9892.00199.
3. Ozaki T., Iino M., *An innovation approach to non-Gaussian time series analysis*. „Journal of Applied Probability”, Vol. 38(A), 2001, 78–92.
4. Barnard R.W., Trindade A.A., Indika R., Wickramasinghe P., *Autoregressive Moving Average Models Under Exponential Power Distributions*. ProbStat Forum, Vol. 07, 2014, 65–77. www.probstat.org.in.
5. Nguyen H.D., McLachlan G.J., Ullmann J.F., Janke A.L., *Laplace mixture autoregressive models*. „Statistics & Probability Letters”, Vol. 110, 2016, 18–24, DOI: 10.1016/j.spl.2015.11.006.
6. Rojas I., Pomares H., Valenzuela O., Rojas F., Herrera L.J., Dhull M.S., Kumar A., *Expectation-Maximization Algorithm for Autoregressive Models with Cauchy Innovations*. „Engineering Proceedings”, Vol. 18, No. 1, 2022, DOI: 10.3390/engproc2022018021.
7. Beran R., *Adaptive estimates for autoregressive processes*. „Annals of the Institute of Statistical Mathematics”, Vol. 28, No. 1, 1976, 77–89, DOI: 10.1007/BF02504731.
8. Phillips R.F., *Partially adaptive estimation via a normal mixture*. „Journal of Econometrics”, Vol. 64, No. 1–2, 1994, 123–144, DOI: 10.1016/0304-4076(94)90060-4.
9. Swami A., Mendel J.M., *ARMA Parameter Estimation Using Only Output Cumulants*. „IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing”, Vol. 38, No. 7, 1990, 1257–1265, DOI: 10.1109/29.57554.
10. Giannakis G.B., *On Estimating Noncausal Nonminimum Phase ARMA Models of Non-Gaussian Processes*. „IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing”, Vol. 38, No. 3, 1990, 478–495, DOI: 10.1109/78.127981.
11. Al-Smadi A., Alshamali A., *Fitting ARMA models to linear non-Gaussian processes using higher order statistics*. „Signal Processing”, Vol. 82, No. 11, 2002, 1789–1793, DOI: 10.1016/S0165-1684(02)00340-7.
12. Al-Smadi A., *Cumulant-based approach to FIR system identification*. „International Journal of Circuit Theory and Applications”, Vol. 31, No. 6, 2003, 625–636, DOI: 10.1002/cta.254.
13. Rosadi D., Filzmoser P., *Robust second-order least-squares estimation for regression models with autoregressive errors*. „Statistical Papers”, Vol. 60, 2019, 105–122, DOI: 10.1007/s00362-016-0829-9.
14. Kunchenko Y., *Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random variables*. Germany, Aachen: Shaker Verlag, 2002.
15. Zabolotnii S., Warsza Z.L., Tkachenko O., *Polynomial Estimation of Linear Regression Parameters for the Asymmetric PDF of Errors*. [In:] Szewczyk R., Zieliński C., Kaliczyńska M. (eds) „Automation 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing”, Vol. 743, 2018, Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-319-77179-3\_75.
16. Zabolotnii S., Tkachenko O., Warsza Z.L., *Application of the Polynomial Maximization Method for Estimation Parameters in the Polynomial Regression with Non-Gaussian Residuals*. [In:] Szewczyk R., et al (eds) „Automation 2021: Recent Achievements in Automation, Robotics and Measurement Techniques. Advances in Intelligent Systems and Computing”, Vol. 1390. 2021, Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-74893-7\_36.
17. Zabolotnii S., Tkachenko O., Warsza Z.L., *Application of the Polynomial Maximization Method for Estimation Parameters of Autoregressive Models with Asymmetric Innovations*. [In:] Szewczyk R., et al. (eds) „Automation 2022: New Solutions and Technologies for Automation, Robotics and Measurement Techniques. Advances in Intelligent Systems and Computing”, Vol. 1427. 2022, Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-03502-9\_37.

## Estimation of Parameters of Non-Gaussian Asymmetric Processes with a Moving Average Using the Polynomial Maximization Method PMM

**Abstract:** In this paper consider is the application of the Polynomial Maximization Method PMM to find estimates of the parameters of non-Gaussian Moving Average model. This approach is adaptive and is based on the analysis of higher-order statistics. The case of asymmetry of distributions of Moving Average of the stochastic processes is also considered. It is shown that the asymptotic variance of estimates of the Polynomial Maximization Method (2nd order) have such analytical expressions, whose allow to finding estimates and analyzing their uncertainties. Above approach can be significantly less than the variance of the classic estimates based on minimizing the Conditional Sum of Squares or Maximum Likelihood (in the Gaussian case). The increase of accuracy depends on the values of the coefficient's asymmetry and the kurtosis of residuals. The results of statistical modeling by the Monte Carlo Method confirm the effectiveness of the proposed approach.

**Keywords:** estimators, moving average, stochastic polynomial maximization PMM, higher order statistics, non-Gaussian processes

**prof. dr hab. inż., Serhii V. Zabolotnii**

zabolotnua@gmail.com

ORCID: 0000-0003-0242-2234

Urodzony w 1973 r., Czerkasy, Ukraina. Absolwent Wydziału Technologii Informatycznych i Systemów Czerkaskiego Instytutu Inżynierii i Technologii: Radio Engineering (1995). Doktorat z systemów informacyjno-pomiarowych (2000) (Nieliniowe algorytmy definiowania parametrów niegaussowskich ciągów losowych w kanałach systemów informacyjno-pomiarowych). Habilitacja (DSc) 2015 w dziedzinie: technologia informatyczna z diagnostyki prawdopodobieństwa zaburzeń parametrów ciągów niegaussowskich. Praca: Wydział Inżynierii Komputerowej i Technologii Informatycznych, Państwowa Wyższa Szkoła Biznesu w Czerkasach: Czerkasy, UA. Autor lub współautor ponad 150 publikacji naukowych, w tym 1 monografii i 7 patentów.

**doc. dr inż. Zygmunt Lech Warszawa**

zlw1936@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3537-6134

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej 1959, doktorat 1967, docent od 1970. Praca: Instytut Elektrotechniki 1958–1963 i 1994–1995, Politechnika Warszawska 1960–1970, Politechnika Świętokrzyska 1970–1978 (organizator i dziekan Wydziału Transportu w Radomiu), Organizator i kierownik: Ośrodka Aparatury Pomiarowej w Instytucie Meteorologii i Gospodarki Wodnej 1978–1982 oraz Zakładu Automatykacji i Pomiarów w Instytucie Chemii Przemysłowej 1983–1992. Doradca Ministra Edukacji Narodowej 1992–1995, Politechnika Radomska 1983–2002. Obecnie główny specjalista w Przemysłowym Instytucie Automatyki i Pomiarów PIAP. Autor ponad 340 publikacji, 6 monografii, kilkudziesięciu prac badawczych i konstrukcyjnych, 11 patentów oraz promotor 2 doktorów. Prezes Polskiego Towarzystwa Metrologicznego. Członek stowarzyszenia PolSPAR oraz Akademii Metrologii Ukrainy.

**dr inż. Oleksandr M. Tkachenko**

tkachenko.ck@gmail.com

ORCID: 0000-0003-4726-628X

Urodzony w 1991 r. w Zvenyhorodce na Ukrainie. Absolwent Wydziału Systemów i Technologii Informatycznych Czerkaskiego Państwowego Uniwersytetu Technologicznego: tytuł magistra o specjalizacji Systemy i Sieci Komputerowe (2014). Doktorat w dziedzinie informatyki (2021) (Metody i narzędzia wielomianowe do estymacji parametrów regresji z wykorzystaniem modeli błędów niegaussowskich). Pracuje jako profesor nadzwyczajny w Katedrze Cybernetyki i Matematyki Stosowanej, Wydział Matematyki i Technologii Cyfrowych, Użhorodski Uniwersytet Narodowy: Użhorod, Ukraina. Autor lub współautor ponad 10 publikacji naukowych..

