



Justyna AUGUŚCIK\*, Jacek MUCHA\*\*

## **Wpływ wartości anomalnych i zmienności lokalnej na opis struktury zmienności i szacowanie parametrów złożowych**

**Streszczenie:** W artykule opisano wpływ wartości anomalnych i zmienności lokalnej na opis struktury zmienności i szacowanie parametrów złożowych. Badania przeprowadzono metodami statystycznymi i geostatystycznymi na przykładzie zasobności jednostkowej Pb w serii łupkowej we fragmencie wybranego złoża rud Cu-Ag LGOM. Stwierdzono, że wyznaczanie wartości anomalnych w zbiorze danych statystyczną metodą „ramka-wąsy” jest nieoptymalne i do tego celu autorzy rekomendują zastosowanie geostatystycznego narzędzia określanego jako „chmura punktów semiwariogramu”. Wyeliminowanie ze zbiorów danych wartości anomalnych wyznaczonych metodą geostatystyczną powoduje znaczące obniżenie względnego zróżnicowania danych, ale nadal jest ono ogromne w przypadku analizowanego parametru lub parametrów o podobnych cechach statystycznych takich jak skrajnie duża zmienność i silnie asymetryczny rozkład. Konsekwencją tego są wysokie błędy oszacowań zasobów Pb. Obliczenia zasobów tego pierwiastka mogą być traktowane jedynie jako szacunkowe i kwalifikowane formalnie do kategorii D. Hipotetyczne założenie braku błędów opróbowania skutkujące obniżeniem wielkości zmienności lokalnej (C0) prowadzi do pewnego obniżenia mediany błędów oszacowań zasobów, ale nadal są one wysokie (>35%). Jest to wynikiem dużej, naturalnej zmienności zasobności Pb w lokalnej skali obserwacji.

Przy aktualnym systemie opróbowania wyrobisk górniczych złóż Cu-Ag LGOM, prowadzonego pod kątem poprawnego oszacowania zasobów i zawartości Cu oraz prognozy jakości urobku, niemożliwe jest osiągnięcie dokładności oszacowań zasobów Pb zbliżonych do dokładności oszacowań zasobów głównego metalu. Teoretycznie efekt taki można by uzyskać przez silne zagęszczenie sieci opróbowań oraz wielokrotne zwiększenie mas pobieranych próbek, co jest w praktyce nierealistyczne ze względów ekonomicznych, jak i organizacyjno-technicznych. Należy się więc liczyć z tym, że prognoza wielkości zasobów Pb, jak i innych pierwiastków towarzyszących o podobnych cechach statystycznych (np. As) w partiach złoża przewidzianych do wydobycia i urobku będzie obciążona dużym błędem.

Słowa kluczowe: złoża rud Cu-Ag LGOM, semiwariogram, wartości anomalne, zmienność lokalna, ołów

\* Mgr inż., Instytut Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią PAN, Kraków; e-mail: jauguscik@geol.agh.edu.pl

\*\* Dr hab. inż., prof. AGH, Wydział Geologii, Geofizyki i Ochrony Środowiska, AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków; e-mail: mucha@geol.agh.edu.p

## **The influence of anomalous values and local variability on the structure of variability and the estimation of deposit parameters**

**Abstract:** The article describes the influence of anomalous values and local variability on the structure of variability and the estimation of deposit parameters. The research was carried out using statistical and geostatistical methods based on the Pb accumulation index in the shale series in part of the Cu-Ag ore deposit, LGCD (Lubin-Głogów Copper District). The authors recommend the use of a geostatistical tool, the so-called semivariogram cloud to determine the anomalous values. Anomalous values determined by the geostatistical method and removed from the dataset have resulted in a significant reduction of the relative variability of data, which is still very large in the case of the analyzed parameter or parameters with similar statistical features such as extreme variability and strongly asymmetric distribution. Calculations of the resources of this element can be treated only as estimates and formally classified to category D. The hypothetical assumption of the absence of sampling errors, resulting in a decrease in the magnitude of local variation, leads to a certain reduction of the median error of resource estimates. However, they are still high (> 35%). This is due to the large natural variability of the accumulation index of Pb on the local observation scale.

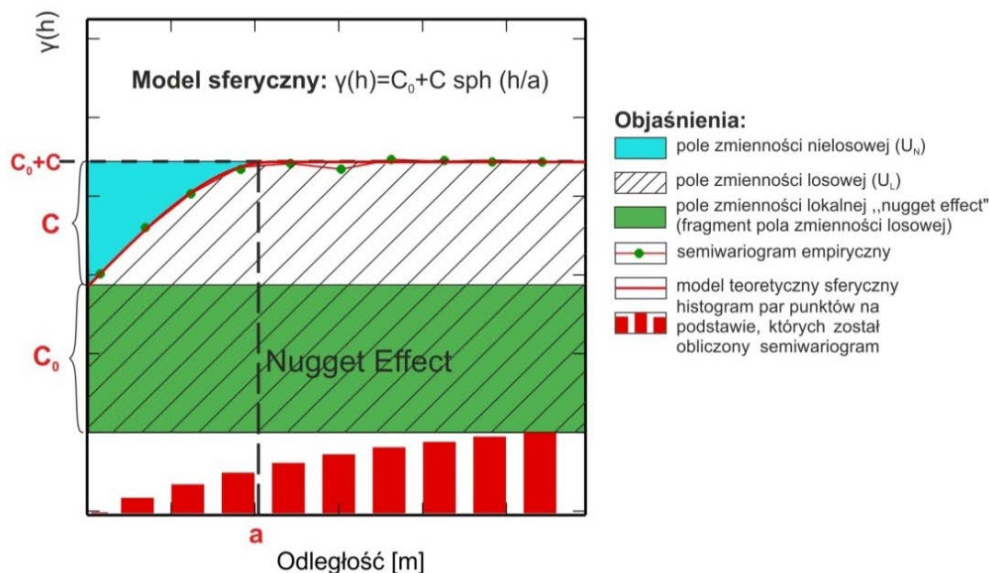
The current method for collecting samples from mine workings of the Cu-Ag deposits in the Lubin-Głogów Copper District (LGCD), aimed at the proper assessment of copper resources, the Cu content, and at estimating the quality of copper output, makes it impossible to achieve an accuracy of estimates of Pb resources similar to that obtained for the main metal. Theoretically, this effect can be achieved by a strong concentration of the sample collection points and thanks to a multiple increase in the samples weight; this, however, is unrealistic for both economic and organizational reasons. It is therefore to be expected that the assessment of Pb resources and other accompanying elements of similar statistical features (e.g. As), located in parts of the deposit where mining activities are to be carried out, will be subject to significant errors.

**Keywords:** Cu-Ag ore deposit LGCD, semivariogram, anomalous values, local variability, lead

## **Wprowadzenie**

Oszacowanie wartości dowolnego parametru złożowego metodami geostatystycznymi wymaga wcześniejszego opisu jego zmienności za pomocą semiwariogramu empirycznego oraz dopasowania do niego odpowiedniego modelu geostatystycznego. Semiwariogram jest podstawowym narzędziem matematycznym geostatystyki charakteryzującym wielkość zróżnicowania wartości analizowanego parametru w zależności od średniej odległości, między miejscami jego pomiarów (Mucha 1994). Głównymi parametrami najpopularniejszego modelu semiwariogramu zwanego modelem sferycznym są:  $C_0$  – wariancja zmienności lokalnej (minimalny losowy składnik zmienności),  $C$  – wariancja zmienności przestrzennej (maksymalny nielosowy składnik zmienności),  $a$  – zasięg semiwariogramu, który określa maksymalny zakres odległościowy autokorelacji (podobieństwa) wartości parametru (wartości parametru złożowego w punktach oddalonych o więcej niż „ $a$ ” nie wykazują żadnej korelacji). Parametry te zilustrowano na rysunku 1.

Analiza semiwariogramu pozwala rozstrzygnąć, czy zmienność ma charakter izotropowy czy też anizotropowy, jaki jest zasięg autokorelacji (podobieństwa) wartości parametru oraz jaki jest udział w obserwowanej zmienności jej składników: losowego i nielosowego dla dowolnej odległości między pomiarami (Jurek i in. 2013). Ponadto wnikliwa analiza semiwariogramu umożliwi wykrycie wartości anomalnych oraz pozwala określić poziom zmienności lokalnej. Bardzo ważnym zagadaniem z punktu widzenia szacowania zasobów jest występowanie wartości anomalnie wysokich, które bardzo często występują w zbiorach danych i nierzadko uwzględniane są automatycznie w procedurze szacowania wartości



Rys. 1. Przykładowy semiwariogram relatywny wraz z dopasowanym modelem sferycznym  
 $\gamma(h)$  – wartości semiwariogramu relatywnego,  $C_0$  – wariancja relatywna zmienności lokalnej,  
 $C$  – wariancja relatywna zmienności przestrzennej (maksymalny udział składnika nielosowego  
 zmienności),  $a$  – zasięg semiwariogramu,  $C_0+C$  – wartość relatywnej wariancji teoretycznej.

Fig. 1. For example relative semivariogram with spherical model  
 $\gamma(h)$  – the value of relative semivariogram,  $C_0$  – relative variance of the local variability,  $C$  – relative  
 variance of the spatial variability (non-random component of variability),  $a$  – range of semivariogram

parametru złożowego bez jakiegokolwiek refleksji i ingerencji geologa. Istnienie takich wartości przyczynia się często do maskowania prawdziwej struktury zmienności analizowanego parametru. Podstawową konsekwencją ignorowania wartości anomalnych jest zawyżenie zasobów składników użytecznych lub szkodliwych. Stosując metody geostatystyczne można stwierdzić, które wartości w zbiorze danych w znaczący sposób rzutują na przebieg semiwariogramu. Narzędziem umożliwiającym tę analizę jest „chmura punktów semiwariogramu” (Aguściak i in. 2016). Na ogół wartości anomalne powodują znaczny wzrost amplitudy semiwariogramu, maskują nielosowy składnik zmienności, co przyczynia się do niewiarygodnego odzwierciedlenia struktury zmienności analizowanego parametru.

Krytycznym elementem modelowania struktury zmienności parametru jest właściwe określenie wielkości jego zmienności lokalnej wyrażanej w modelu semiwariogramu symbolem  $C_0$ . Na ogół wyznaczenia  $C_0$  dokonuje się arbitralnie przez dopasowanie modelu do kilku pierwszych punktów semiwariogramu empirycznego. Opisywane podejście skutkuje nierzadko niewłaściwym doбором modelu zmienności i złym określeniem poziomu  $C_0$ , który wpływa na późniejszą ocenę dokładności szacowania zasobów (Aguściak 2017). Uzasadnia to w pełni konieczność pieczołowitego badania zmienności lokalnej i poprawnego wyznaczenia jej wielkości przed przystąpieniem do oszacowania wartości parametrów złożowych.

Zmienność lokalna jest pojęciem względnym związanym ze skalą obserwacji pomiarów prowadzonych w złożu (Mucha 1988; Kokesz 2006). W geostatystyce rozumie się przez nią średnie zróżnicowanie pomiarów wartości parametrów złożowych w odległościach zmierzających do zera, tzn. pomiarach dokonanych w bezpośrednim sąsiedztwie (np. oznaczenia zawartości składników chemicznych w próbach pobranych jedna obok drugiej). Zmienność lokalna składa się z dwóch głównych elementów wynikających z błędów opróbowania oraz naturalnej zmienności parametrów w małej skali obserwacji. Wariancja błędu opróbowania jest równa sumie trzech komponentów: wariancji błędów poboru prób, wariancji błędów przygotowania próbki do analizy chemicznej, wariancji błędów analiz laboratoryjnych (Ramsey i Argyraki 1997). Metodyka zaproponowana przez Abzalova (2011) pozwala na wyliczenie poziomu wielkości składowych wariancji zmienności lokalnej parametru złożowego dla danych (pomiarów) zdublowanych. Umożliwia to rozstrzygnięcie zagadnienia, czy wielkość zmienności lokalnej zależy w głównej mierze od naturalnej zmienności samej mineralizacji w małej skali obserwacji czy od szeroko rozumianych błędów opróbowania. Informacja ta pozwala stwierdzić, czy znaczące podwyższenie dokładności oszacowania zasobów danej kopaliny w blokach eksploatacyjnych jest możliwe poprzez obniżenie błędów szeroko rozumianego opróbowania złoża (Auguścik 2017).

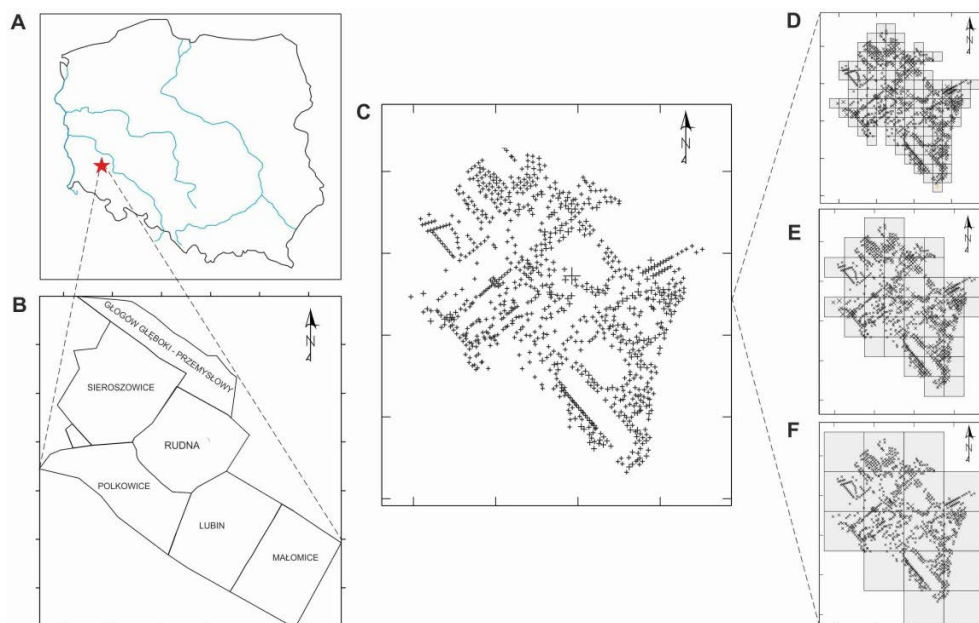
## 1. Cel badań

Zasadniczym celem prezentowanych badań było pokazanie wpływu wartości anomalnych i wielkości wariancji zmienności lokalnej ( $C_0$ ) na błąd względny geostatystycznego oszacowania średniej wartości badanego parametru za pomocą procedury krigingu zwyczajnego. Badania wykonano na przykładzie zasobności jednostkowej ołowiu w serii łupkowej, pierwiastka towarzyszącego złożom rud Cu-Ag LGOM i odzyskiwanego w trakcie przeróbki rudy wydobytej.

Rozmieszczenie Pb wśród utworów miedzionośnych ma charakter „wyspowy” o rozmiarach od kilkudziesięciu do kilkuset metrów (Banaś i in. 1985; Stala-Szlugaj 2000). Na nieregularność poziomego rozmieszczenia Pb w obrębie obszaru górniczego Rudna zwrócili uwagę Mayer i Piestrzyński (1985). Ołów występuje przede wszystkim w stropowej części serii miedzionośnej lub powyżej. Koncentracje tego pierwiastka są silnie zróżnicowane i zależą od wykształcenia facjalnego skał tworzących serię złożową. Dotyczy to głównie łupków, które występują w sąsiedztwie barier piaskowcowych i na peryferiach obszaru miedzionośnego, zdarza się także, że bywają wykształcone w facji ołowionośnej. Ołów z dolnośląskich złóż jest odzyskiwany, a jego zasoby są wykazywane i aktualizowane w corocznych operatach ewidencyjnych na podstawie wyników bieżącego opróbowania geologicznego.

## 2. Materiał podstawowy, zakres i metodyka badań

Materiał podstawowy badań stanowił zbiór 912 rutynowych pomiarów zasobności jednostkowej ołowiu (Pb) w serii łupkowej uzyskanych na podstawie opróbowania fragmentu

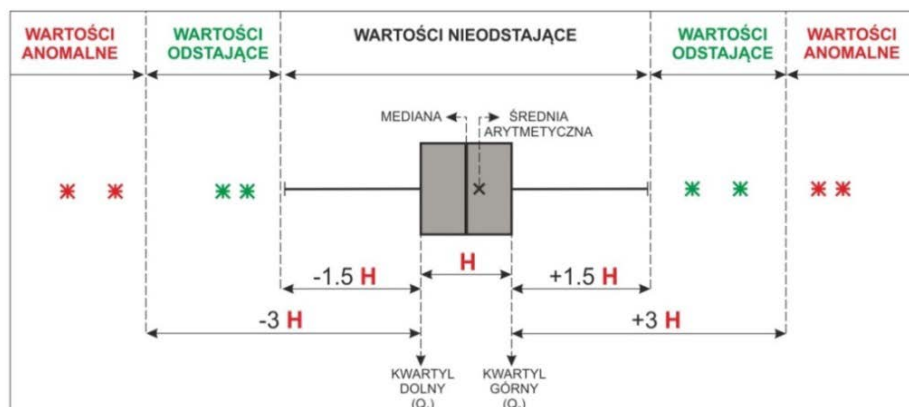


Rys. 2. Lokalizacja złóż rud Cu-Ag LGOM na tle Polski (A, B) oraz rozmieszczenie punktów próbowań w wybranym fragmencie złoża objętego analizą (C) wraz z pokazanym podziałem tego obszaru na bloki obliczeniowe:  $0,25 \times 0,25$  km (D),  $0,5 \times 0,5$  km (E) i  $1 \times 1$  km (F), w których wykonano oszacowania

Fig. 2. Localization of the Cu-Ag ore LGOM (Lubin–Głogów Copper District) deposit (A, B) on the map of Poland and the distribution of sample collection points in the selected part of the analyzed deposit (C) divided into calculation blocks:  $0.25 \times 0.25$  km (D),  $0.5 \times 0.5$  km (E), and  $1 \times 1$  km (F) where estimates have been made

jednego ze złóż rud Cu-Ag LGOM w wyrobiskach górniczych (rys. 2). Pozycje opróbowania rozmieszczone są w siatce zbliżonej do regularnej, determinowanej rozkładem wyrobisk górniczych (rys. 2). Średnia odległość między punktami opróbowania w tym fragmencie złoża wynosi około 125 m.

Badanie struktury zmienności zasobności jednostkowej Pb w ujęciu geostatystycznym poprzedzono statystyczną analizą danych, obliczając podstawowe parametry statystyczne, tworząc histogramy i wykresy „ramka-wąsy”. Istotnym elementem analizy statystycznej było wyznaczenie na podstawie wykresu „ramka-wąsy” wartości anomalnych, szczególnie ważnych w odniesieniu do szacowania zasobów w blokach eksploatacyjnych. Wartości anomalne zostały wyznaczone według schematu zamieszczonego na rysunku 3. Wyznaczono kolejno 25, 50, 75% najwyższych wartości anomalnie wysokich i pokazano ich wpływ na przebieg relatywnego semiwariogramu empirycznego i wielkość błędów oszacowania dla trzech rozmiarów bloków  $1 \times 1$  km,  $0,5 \times 0,5$  km,  $0,25 \times 0,25$  km. Kolejnym krokiem badań była analiza wpływu wielkości wariancji zmienności lokalnej ( $C_0$ ) na błąd oszacowania średniej zasobności w obrębie parceli obliczeniowej. Badania te przeprowadzono dla trzech poziomów  $C_0$ :  $C_0$  wyznaczonego z modelu semiwariogramu dla zgromadzonego zbioru



Rys. 3. Schemat wykresu pudełkowego „ramka-wąsy”

Fig. 3. The schema of box-and-whiskers plot

wyników opróbowań,  $C_0$  pomniejszonego o wartość wariancji błędów opróbowania i dla  $C_0$  równego zero, tzn. przy założeniu hipotetycznej ciągłości zmian zasobności jednostkowej Pb i braku błędów opróbowania. Wariancję błędów opróbowania przyjęto na podstawie wyników wcześniejszych i niepublikowanych badań prowadzonych w rozpatrywanym obszarze złoża, zgodnie z którymi stanowi ona 34%  $C_0$ .

Do geostatystycznego badania struktury przestrzennego zróżnicowania zasobności Pb wykorzystano izotropowy semiwariogram relatywny obliczony ze wzoru:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \frac{(z_{i+h} - z_i)^2}{(\bar{z}_h)^2} \quad (1)$$

gdzie:

- $n_h$  – liczba par próbek odległych o odcinek  $h$ ,
- $z_i, z_{i+h}$  – wartości badanego parametru (zasobności pierwiastków) w punktach odległych o odcinek  $h$ ,
- $\bar{z}_h$  – średnia wartość parametru we wszystkich parach punktów pomiarowych odległych o odcinek  $h$ .

Zbadano także występowanie w zbiorze danych wartości anomalnych, które w znaczący sposób wpływają na przebieg semiwariogramu wykorzystując narzędzie „chmury punktów semiwariogramu” (Auguścik i in. 2016).

Modele teoretyczne dopasowane do semiwariogramów empirycznych wykorzystano w geostatystycznej procedurze krigingu zwyczajnego (poligonowego) do oszacowania średnich zasobności Pb dla trzech wariantów rozmiarów bloków obliczeniowych:  $1000 \times 1000$  m,  $500 \times 500$  m,  $250 \times 250$  m oraz do oceny prognozowanych błędów krigingu.

### 3. Wyniki badań

Badanie struktury zmienności zasobności ołowiu klasyczną metodą statystyczną wykazały występowanie licznych wartości odstających i anomalnych powodujących silne zróżnicowanie średniej arytmetycznej i mediany (tab. 1, rys. 4A). Zapewne wpłynęły one także na obserwowaną skrajnie silną, prawostronną asymetrię empirycznego rozkładu prawdopodobieństwa. Zmienność relatywną zasobności Pb (mierzoną współczynnikiem zmienności –  $v$ ) według klasyfikacji Baryszewa należy uznać za skrajnie dużą ( $v > 150\%$ ). Do badań usunięto stopniowo 25, 50, 75% najwyższych wartości anomalnych, stwierdzonych na podstawie wykresu „ramka-wąsy” (rys. 4A, B). Miało to na celu zbadanie wpływu tych wartości na przebieg semiwariogramu i błędy względne krigingu. Największy spadek współczynnika zmienności odnotowano po usunięciu 25% ( $N = 6$ ) najwyższych wartości anomalnych. Wynosił on 25%, dla pozostałych przykładów odnotowano stosunkowo niskie dwu- i jednoprocenowe spadki współczynnika zmienności (rys. 4A, B).

TABELA 1. Zestawienie podstawowych parametrów statystycznych zasobności jednostkowej ołowiu dla serii łupkowej (W-Pb-I) w granicy złoża bilansowego

TABLE 1. Statistics of the accumulation indexes of lead accumulation (Pb) for shale within the limits deposit

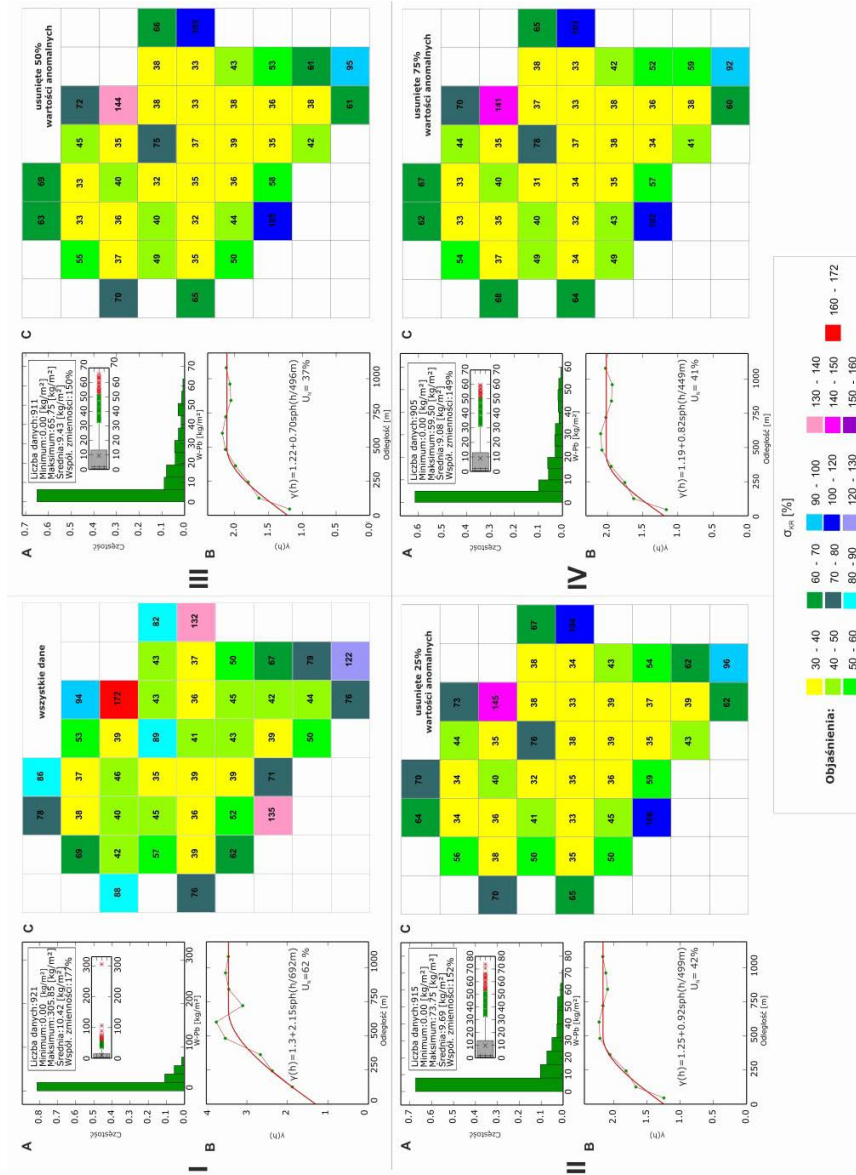
Parametr	Liczba danych	Średnia	Mediana	Min/Max	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności	Współczynnik asymetrii
W-Pb-I [kg/m <sup>2</sup> ]	921	10,41	2,10	0,00/305,85	18,43	177%	5,7
W-Pb-I [kg/m <sup>2</sup> ]*	913	10,51	2,10	0,01/305,85	18,49	177%	5,7
W-Pb-I [kg/m <sup>2</sup> ]**	919	9,99	2,08	0,0/87,9	15,33	153%	2,0

\* Bez uwzględnienia wartości zerowych.

\*\* Bez uwzględnienia wartości anomalnych, wyznaczonych na podstawie chmury punktów semiwariogramu.

Dla celów porównawczych za zasadne uznano zweryfikowanie wyznaczonych statystycznie wartości anomalnych opierając się na analizie geostatystycznej. W tym celu obliczono semiwariogram empiryczny i wykonano na jego podstawie „chmurę punktów semiwariogramu”, która pozwoliła stwierdzić, że tylko dwie wartości w zbiorze danych rzutują na przebieg tej funkcji, zawyżając amplitudę modelu semiwariogramu i nieznacznie na poziom wariancji zmienności lokalnej ( $C_0$ ) (rys. 5, tab. 1). Usunięcie tych wartości spowodowało prawie trzykrotne obniżenie współczynnika asymetrii, zmniejszenie współczynnika zmienności o 24% oraz spadek wartości amplitudy modelu semiwariogramu o 1,5 (tab. 1, rys. 5).

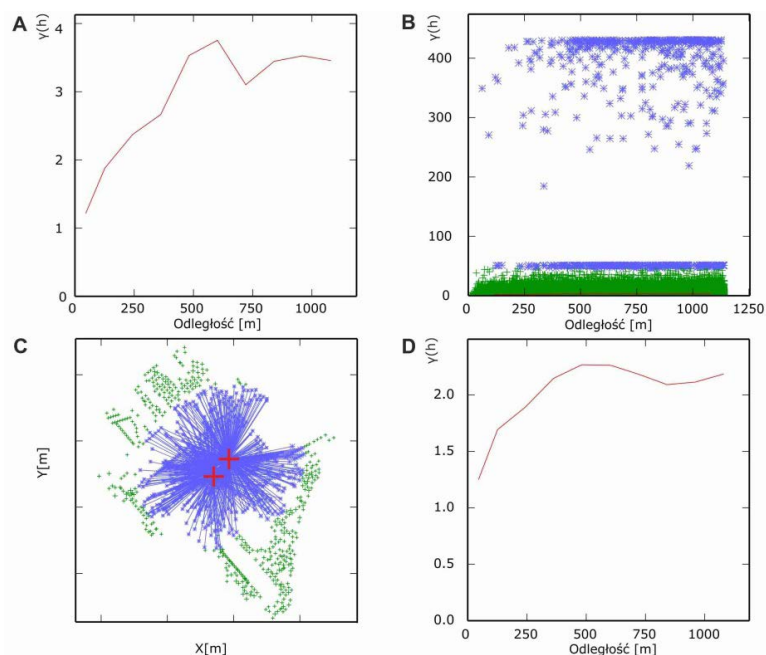
Uzyskane wyniki wskazują, że statystyczna metoda „ramka-wąsy” oparta na umownych kryteriach wydzielenia wartości anomalnych jest niewystarczająca dla właściwego wydzielenia najbardziej wpływowych wartości anomalnych. W szczególności nie daje podstaw do określenia liczby danych anomalnie wysokich lub anomalnie niskich, które powinny być przedmiotem zainteresowania i pewnych zabiegów prowadzących do ujednorodnienia



Rys. 4. Zestawienie histogramów, wykresów „ramka-wąsy” (A), semiwariogramów relatywnych wraz z dopasowanymi modelami geostatystycznymi (B) oraz błędów względnych krzygu (C) dla wszystkich danych – I, po usunięciu 25% najwyższych wartości anomalnych – II, po usunięciu 50% najwyższych wartości anomalnych – III i po usunięciu 75% najwyższych wartości anomalnych – IV wyznaczonych metodą „ramka-wąsy” dla bloków  $0,5 \times 0,5$  km

Fig. 4. A summary of histograms, box and whiskers plots (A), relative semivariograms with corresponding geostatistical models (B), and relative kriging errors (C) for all data; I, after the removal of 25% of the highest anomalous values; II, after the removal of 50% of the highest anomalous values; III, and after the removal of 75% of the highest anomalous values; IV, determined using box and whiskers plots for calculation blocks  $0,5 \times 0,5$  km

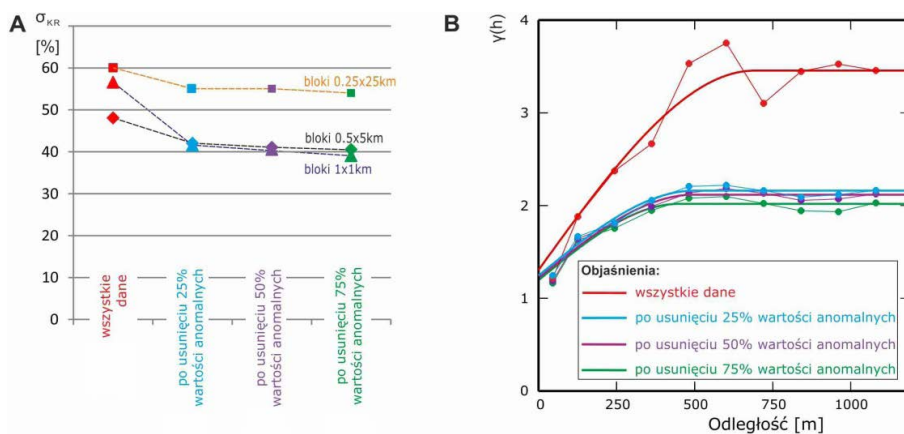




Rys. 5. Semiwariogram zasobności Pb przed usunięciem wartości anomalnych (A). Chmura semiwariogramu (B). Lokalizacja punktów opróbowań (C). Semiwariogram zasobności Pb po usunięciu wartości anomalnych (D)  
Objaśnienia: kolorem niebieskim oznaczono wartości semiwariogramu (B) i pary punktów opróbowań uwzględnione do ich obliczenia (C), kolor czerwony – punkty z anomalną zasobnością Pb

Fig. 5. Semivariogram of Pb accumulation index before removing the anomalous values (A). Semivariogram cloud (B). Localization of sampling (C). Semivariogram of Pb accumulation index after removing the anomalous values (D)

Explanation: blue – the semivariogram values (B) and pairs of sampling points included in their calculation (C), red – sampling with anomalous values of the Pb accumulation index



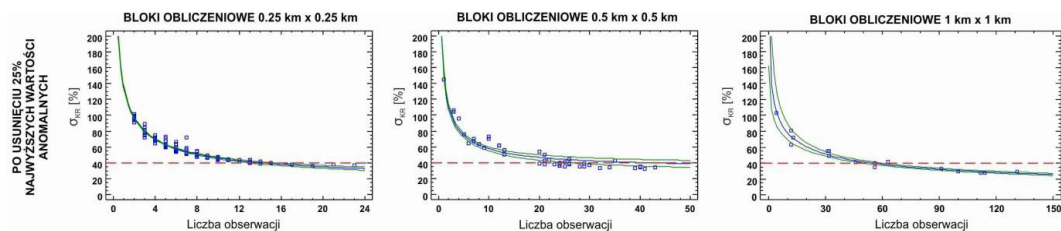
Rys. 6. Zestawienie median błędów względnych krigingu ( $\sigma_{KR}$ ) dla kwadratowych bloków obliczeniowych o boku 1 km, 0,5 km i 0,25 km określonych dla semiwariogramów relatywnych (A) oraz zestawienie relatywnych semiwariogramów zasobności jednostkowej Pb wraz z dopasowanymi do nich modelami geostatystycznymi (B)

Fig. 6. Medians of relative kriging errors ( $\sigma_{KR}$ ) for calculation blocks (size  $1 \times 1$  km,  $0.5 \times 0.5$  km, and  $0.25 \times 0.25$  km) for relative semivariograms (A) and the summary of relative semivariograms of accumulation index Pb and corresponding geostatistical models (B)

zbioru danych (pominięcia ich w analizie, zastąpienia ich wartościami odpowiednio uśrednionymi z otoczenia itp.). Może to mieć duże znaczenie w przypadku mało licznych zbiorów danych, gdy wyeliminowanie nawet pojedynczych obserwacji prowadzi do drastycznych zmian wartości parametrów statystycznych opisujących zmienność analizowanego parametru złożowego. Oddzielnym problemem jest lokalizacja występowania wartości anomalnych. Gdy tworzą one zwarte skupienia, obszary ich występowania powinny być wyodrębnione a ich wartości szacowane oddzielnie w granicach tych obszarów. W przypadku rozproszonego występowania wartości anomalnych należy odwołać się do jednej z wielu zaproponowanych metod redukcji tych wartości dla uniknięcia przeszacowania lub niedoszacowania ich średnich wartości.

W kolejnym etapie badań wykorzystano informację o geostatystycznej strukturze zmienności zasobności Pb do szacowania średniej wartości tego parametru oraz oceny błędów tych oszacowań metodą kriginu zwyczajnego (poligonowego) dla trzech wariantów wielkości umownych bloków obliczeniowych (rys. 6) o rozmiarach w planie:  $0,25 \times 0,25$  km,  $0,5 \times 0,5$  km,  $1 \times 1$  km (rys. 2D, E, F), wyznaczając tym samym na obszarze badań kolejno: 125, 43, 16 bloków obliczeniowych. Wyniki obliczeń pozwalają stwierdzić, że uwzględnienie wszystkich wartości anomalnych przyczynia się do znacznego zawyżenia błędów oszacowania, szczególnie dla bloków  $1 \times 1$  km (rys. 6). Usunięcie 25% najwyższych wartości anomalnych skutkowało kilku- lub kilkunastoprocentowym obniżeniem wartości błędu. Kolejne usuwanie ze zbioru najwyższych wartości anomalnych 50 czy 75% nie skutkuje znacznym obniżeniem błędów oszacowania. Stwierdzono również, że zwiększenie wielkości parceli obliczeniowej od  $0,5 \times 0,5$  km do  $1 \times 1$  km nie skutkuje zauważalnym obniżeniem błędów oszacowania średniej wartości zasobności jednostkowej Pb (rys. 6). Mediany średnich błędów oszacowania zasobności Pb przed usunięciem wartości anomalnych wynosiły: dla bloków  $0,25 \times 0,25$  km – 60%, dla bloków  $0,5 \times 0,5$  km – 48%, dla bloków  $1 \times 1$  km – 56,5%. Usunięcie 25% najwyższych wartości anomalnych obniżyło mediany błędów oszacowania zasobności Pb dla bloków  $0,25 \times 0,25$  km o 5%, dla bloków  $0,5 \times 0,5$  km o 6%, dla bloków  $1 \times 1$  km o 15%, usunięcie kolejnej partii wartości anomalnych (50%) dla trzech rozmiarów bloków obniżyło medianę błędu maksymalnie o 1% (rys. 6).

Następnie pokazano wpływ ilości punktów uwzględnionych w szacowaniu na błąd względny kriginu dla bloków  $0,25 \times 0,25$  km,  $0,5 \times 0,5$  km i  $1 \times 1$  km dla danych po usunięciu najwyższych 25% wartości anomalnych wyznaczonych na podstawie metody statystycznej – „ramka-wąsy”. Przedstawione wykresy na rysunku 7 wskazują, że zwiększenie liczby prób ponad pewną wartość tylko w niewielkim stopniu wpływa na wzrost dokładności oszacowania parametru. Powodem małej wiarygodności oszacowania jest duża zmienność badanego parametru, w tym znaczna jego zmienność lokalna. Liczebność obserwacji niezbędna do oceny średniej wartości parametru w kat.  $C_2$  uzależniona jest także od wielkości bloku obliczeniowego, co wynika z wyraźnie zaznaczonego składnika nielosowego zmienności zasobności Pb. Stwierdzono, że błędy oszacowań średniej zasobności Pb dopiero przy dużej liczbie prób osiągają wartości poniżej 40%. Oszacowania zasobów tego metalu w blokach obliczeniowych mogą być zasadniczo traktowane jedynie jako szacunkowe uwagi na rzadką sieć opróbowań i związaną z tym skromną liczbę pobieranych prób, w których dokonuje się oznaczeń zawartości Pb.



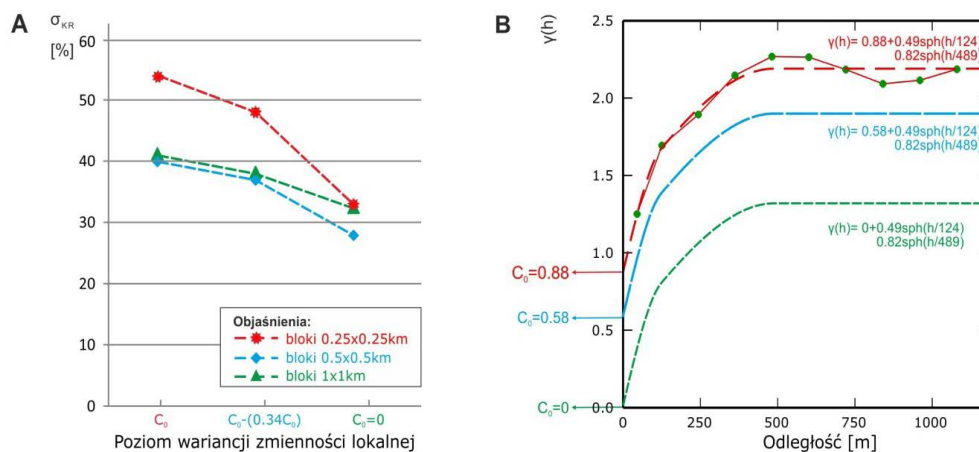
Rys. 7. Modele nieliniowe zależności empirycznych błędów względnych krigingu ( $\sigma_{KR}$ ) od liczby obserwacji, na podstawie których odbyło się szacowanie średniej zasobności ołowiu dla kwadratowych bloków o boku 1 km, 0,5 km i 0,25 km  
Objaśnienia: linia przerywana – poziome błędu względnego krigingu na poziomie 40%

Fig. 7. Non-linear models of empirical dependences relationship between relative kriging errors ( $\sigma_{KR}$ ) and the number of observations served as a basis for the estimation of mean accumulation index of Pb for calculation blocks (size 1 × 1 km, 0.5 × 0.5 km, 0.25 × 0.25 km)  
Explanation: dotted line – the relative kriging error at the level of 40%

TABELA 2. Zestawienie błędów względnych oszacowania średnich zasobności Pb dla różnych wielkości bloku obliczeniowego i zmienności lokalnej ( $C_0$ )

TABLE 2. The summary of relative errors of estimation of mean accumulation index of Pb for different values of the calculation block and local variability ( $C_0$ )

Błędy względne oszacowania średnich zasobności Pb dla różnych wielkości bloku obliczeniowego i zmienności lokalnej ( $C_0$ )						
Rozmiar bloku obliczeniowego [m]	Relatywna zmienność lokalna	Liczba bloków	Średnia arytmetyczna [%]	Mediana [%]	Minimum [%]	Maximum [%]
250 × 250	$C_0 = 0,88$	125	57,7	54,0	33,0	105,0
	$C_0 = 0,58$	125	51,9	48,0	28,0	97,0
	$C_0 = 0$	125	36,7	33,0	15,0	79,0
500 × 500	$C_0 = 0,88$	43	49,6	40,0	31,0	107,0
	$C_0 = 0,58$	43	45,9	37,0	27,0	101,0
	$C_0 = 0$	43	36,7	28,0	18,0	89,0
1000 × 100	$C_0 = 0,88$	16	48,4	41,0	27,0	104,0
	$C_0 = 0,58$	16	45,4	38,0	24,0	99,0
	$C_0 = 0$	16	38,7	32,5	16,0	90,0



Rys. 8. Zestawienie median błędów względnych krigingu ( $\sigma_{KR}$ ) (A) dla bloków obliczeniowych o boku 1 km, 0,5 km i 0,25 km określonych dla semiwariogramów relatywnych (B) dla różnych poziomów zmienności lokalnej ( $C_0$ ) po wyeliminowaniu wartości anomalnych metodą geostatystyczną

Fig. 8. The summary of medians of relative kriging errors ( $\sigma_{KR}$ ) (A) for calculation blocks (size  $1 \times 1$  km,  $0.5 \times 0.5$  km) for relative semivariograms (B) for different levels of local variability ( $C_0$ ) after the removal of anomalous values using the geostatistical method

W ostatnim etapie badań wykonano analizę wpływu poziomu variancji zmienności lokalnej ( $C_0$ ) na wielkość prognozowanych błędów oszacowania dla trzech wariantów. Przyjmując: obliczony poziom  $C_0$ , teoretyczne założenie, że przeprowadzone opróbowanie jest pozbawione błędów, poziom zmienności lokalnej związany z naturalną zmiennością ustalono na podstawie wcześniejszych badań na 66% pierwotnego  $C_0$  oraz  $C_0$  równe zero. Do tego celu wykorzystano izotropowy semiwariogram relatywny wraz z dopasowanym modelem geostatystycznym utworzonym po usunięciu wartości anomalnie wysokich wyznaczonych na podstawie „chmury punktów semiwariogramu” (rys. 8). W efekcie zaobserwowano obniżenie mediany błędu względnego krigingu maksymalnie o 6 % dla bloków  $0,25 \times 0,25$  km a dla pozostałych bloków dwukrotnie niższe (tab. 2, rys. 8). Zakładając zmienność lokalną na poziomie zero, uzyskano obniżenie mediany błędu oszacowania: dla bloków  $0,25 \times 0,25$  km o 21%, dla bloków  $0,5 \times 0,5$  km o 12% i dla bloków  $1 \times 1$  km o 8,5%.

## Wnioski

Wpływ wartości anomalnych i zmienności lokalnej na opis struktury zmienności i szacowanie parametrów złożowych przeanalizowano na przykładzie zasobności jednostkowej Pb w serii łupkowej we fragmencie jednego ze złóż rud Cu-Ag LGOM. Wytypowany do badań parametr złożowy posiada właściwe cechy statystyczne dla przeanalizowania i zilustrowania podjętego zagadnienia. Należą do nich: skrajnie duża zmienność, silnie prawoasymetryczny rozkład prawdopodobieństwa i występowanie licznych wartości anomalnych.

Przeprowadzone badania pozwoliły na sformułowanie następujących wniosków:

- Wyznaczanie wartości anomalnych w zbiorze danych statystyczną metodą „ramka-wąsy” jest nieoptymalne, gdyż zawyża ich liczbę obejmując wartości, które nie wpływają w sposób znaczący na ilościowe miary zmienności i opis struktury zmienności parametru złożowego. Do tego celu autorzy rekomendują zastosowanie geostatystycznego narzędzia określanego jako „chmura punktów semiwariogramu” do wykrywania i eliminowania tylko tych wartości anomalnych, które rzutują na przebieg semiwariogramu, pokazując jednocześnie ich lokalizację w zbiorze opróbowania.
- Wylimitowanie ze zbiorów danych wartości anomalnych wyznaczonych metodą geostatystyczną powoduje znaczące obniżenie względnego zróżnicowania danych (wyrażone spadkiem amplitudy semiwariogramu), ale nadal jest ono bardzo wysokie w przypadku analizowanego parametru lub parametrów o podobnych cechach statystycznych. Konsekwencją tego są wysokie mediany błędów oszacowań zasobów Pb w blokach obliczeniowych rzędu 40% lub większe. Oznacza to, że przy aktualnym opróbowaniu złoża pod kątem oznaczeń zawartości Pb obliczenia zasobów tego pierwiastka mogą być traktowane jedynie jako szacunkowe i kwalifikowane formalnie do kategorii D.
- Hipotetyczne założenie braku błędów opróbowania skutkujące obniżeniem wielkości zmienności lokalnej ( $C_0$ ) o około 1/3 prowadzi do pewnego obniżenia mediany błędów oszacowań zasobów, ale nadal są one wysokie (>35%), co jest wynikiem dużej, naturalnej zmienności zasobności Pb w lokalnej skali obserwacji. Znaczące podwyższenie dokładności oszacowań zasobów byłoby możliwe po większym zagęszczeniu opróbowania złoża w wyrobiskach górniczych oraz wielokrotnym zwiększeniu mas pobieranych próbek, co jest nierealistyczne zarówno ze względów organizacyjno-technicznych, jak i ekonomicznych.

Praca zrealizowana została częściowo w ramach badań statutowych Katedry Geologii Złożowej i Górniczej AGH (nr 11.11.140.320) w 2017 roku.

## Literatura

- Abzalov, M., 2011. Geostatistical approach to the estimation of sampling precision. *The 5th World Conference on Sampling and Blending*, Chile (materiały konferencyjne).
- Auguścik, J. 2017. Zmienność lokalna zasobności jednostkowej niklu i wanadu w złożu „Rudna” w świetle badań eksperymentalnych. *Górnictwo Odkrywkowe* R. 58, nr 2, s. 41–49.
- Auguścik, J. i in. 2016 – Auguścik, J., Mucha, J. i Wasilewska-Błaszczuk, M. 2016. Badanie struktury zmienności zasobności pierwiastków towarzyszących (As, Co, Pb) w złożu Cu-Ag LGOM (Kopalnia Rudna): konieczne, przydatne czy zbędne? *Górnictwo Odkrywkowe* R. 57 nr 3, s. 36–43.
- Banaś i in. 1985 – Banaś, M., Kucha, H., Mayer, W., Piestrzyński, A. i Salomon, W. 1985. Okruszcowanie ołowiem i cynkiem rud miedzi na monoklinie przedsudeckiej. *Rocznik PTMin*. 53, s. 13–42.
- Kokesz, Z., 2006. Trudności i ograniczenia w geostatystycznym modelowaniu zmienności złóż i szacowaniu zasobów metodą krigingu. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi – Mineral Resources Management* t. 22, z. 3, s. 5–20.
- Mayer, W. i Piestrzyński, A. 1985. Ore minerals from Lower Zechstein sediments at Rudna mine, Fore-Sudetic Monocline, SW Poland. *Mineralogical Transaction* 75, s. 7–72.

- Mucha, J. 1988. Zmienność lokalna rud Zn-Pb w złożu „Pomorzany”. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi – Mineral Resources Management* t. 4, z. 4, s. 877–891.
- Mucha, J. 1994. *Metody geostatystyczne w dokumentowaniu złóż*. Kraków: Wyd. AGH, s. 49.
- Jurek i in. 2013 – Jurek J., Mucha J., Wasilewska-Błaszczuk M., 2013. Przegląd zastosowań geostatystyki do szacowania parametrów polskich złóż węgla brunatnego. *Zeszyty Naukowe Instytutu Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią PAN* nr 85, s. 143–153.
- Stala-Szlugaj, K., 2000. *Występowanie Zn, Pb i As w złoża rud miedzi na monoklinie przedsudeckiej*. Praca doktorska, Biblioteka Główna AGH, s. 1–142.
- Ramsey, M.H. i Argyraki, A. 1997. Estimation of measurement uncertainty from field sampling: implications for the classification of contaminated land. *The Science of the Total Environment* 198, s. 243–257.