Tadeusz J. Sobczyk, Adam Warzecha, Witold Mazgaj
Politechnika Krakowska

APROKSYMACJA NIELINIOWYCH CHARAKTERYSTYK MASZYN ELEKTRYCZNYCH PRĄDU PRZEMIENNEGO WIELOMIANAMI POTĘGOWYMI WIELU ZMIENNYCH

APPROXIMATION OF NONLINEAR CHARACTERISTICS OF AC MACHINES BY MULTIVARIABLE POWER POLYNOMIALS

Streszczenie: W celu uwzględnienia nieliniowości obwodu magnetycznego maszyny elektrycznej w modelach obwodowych należy wyznaczyć tzw. charakterystyki uzwojeń maszyny określające strumienie skojarzone każdego z uzwojeń jako funkcje prądów wszystkich uzwojeń. Ich aproksymacja jest - w zasadzie - możliwa tylko za pomocą wielomianów potęgowych wielu zmiennych. Prowadzi to do bardzo złożonych relacji między funkcjami aproksymującymi. W pracy zaproponowano modyfikację metodyki określania współczynników występujących w tych wielomianach na podstawie zbioru wartości ko-energii magnetycznej oraz strumieni skojarzonych lub dodatkowo indukcyjności dynamicznych przy wykorzystaniu metody regresji liniowej. Jednoczesne wykorzystanie wartości ko-energii magnetycznej oraz strumieni skojarzonych ma na celu ograniczenie czasu i kosztów obliczeń numerycznych potrzebnych dla ich obliczania.

Abstract: To model non-linearity of magnetic circuit of alternating current machines at circuit approach it is necessary to know, so called, characteristic of windings determining leakage fluxes as of each winding as a function of currents of all machine windings. Such functions can be approximated by multivariable power series of currents. However, it leads to rather complicated relationships between a set of such functions. The paper presents a methodology for computation of the coefficients of those multivariable power series bases on values of the co-energy and the winding leakage fluxes, or eventually dynamic inductances, using the linear regression method. Combining those values reduces time and costs of numerical computations necessary for its calculations.

Słowa kluczowe: *maszyny elektryczne, nieliniowość magnetyczna, nieliniowe charakterystyki uzwojeń, aproksymacja funkcji ko-energii magnetycznej*
Keywords: *Electrical machines, magnetic nonlinearity, nonlinear winding characteristics , approximation of magnetic co-energy function*

1. Wstęp

Modele obwodowe maszyn prądu uwzględniające nieliniowość obwodu magnetycznego są wciąż przedmiotem zainteresowania w wielu ośrodkach [2][3][5]. Zasadniczą trudnością przy ich tworzeniu jest opis funkcji wiążących strumienie skojarzone każdego z uzwojeń z prądami wszystkich uzwojeń oraz kątem obrotu. Takie modele tworzone w oparciu o formalizm Lagrange'a mają pewne ograniczenia, gdyż – teoretycznie – nie pozwalają na reprezentację przewodzących elementów oraz histerezy obwodu magnetycznego. Ich zaletą jest znacznie wygodniejsze modelowanie zagadnień eksploatacyjnych bardziej złożonych układów, w których maszyny elektryczne są elementem kluczowym. Ogólna postać równań Lagrange'a maszyn prądu przemiennego o N niezależnych uzwojeniach

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{mo}}(\mathbf{i},\varphi)(\mathbf{i},\varphi)}{\partial i_n}\right)+\mathrm{R}_n\cdot i_n=u_n\,,\quad n\in\{1,2,\ldots,\mathrm{N}\}$$

$$\mathrm{J}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\mathrm{D}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial E_{\mathrm{mo}}(\mathbf{i},\varphi)(\mathbf{i},\varphi)}{\partial\varphi}+T_{\mathrm{m}}\quad(1)$$

wskazuje, że funkcja ko-energii $E_{\mathrm{mo}}(\mathbf{i},\varphi)$, gdzie $\mathbf{i}=\{i_1\ \cdots\ i_{\mathrm{N}}\}$ jest zbiorem liniowo niezależnych prądów, jest całkowicie wystarczająca do opisu maszyny. Jest to jednak nieliniowa funkcja wielu zmiennych, której postać nie jest znana, jak to ma miejsce w przypadku założenia liniowości obwodu magnetycznego. Aproksymacja funkcji ko-energii jest przedmiotem wielu prac [1][4][7], lecz w najogólniejszym przypadku pozostaje jedynie zastosowanie szeregu Taylora w postaci

$$E_{\mathrm{mo}}(\mathbf{i},\varphi)=\frac{1}{(2)!}\mathrm{d}^2E_{\mathrm{mo}}(\mathbf{0},\varphi)+\frac{1}{(4)!}\mathrm{d}^4E_{\mathrm{mo}}(\mathbf{0},\varphi)+ +\frac{1}{(4)!}\mathrm{d}^4E_{\mathrm{mo}}(\mathbf{0},\varphi)+\cdots \quad (2)$$

gdzie $\mathrm{d}^nE_{\mathrm{mo}}(\mathbf{0},\varphi)$ oznacza różniczkę rzędu n obliczaną dla zerowych wartości wszystkich prądów.

Równania elektryczne maszyny z nieliniowym obwodem magnetycznym są najczęściej zapisywane w postaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi_n(\mathbf{i},\varphi)\right)+\mathrm{R}_n\cdot i_n=u_n \quad (2)$$

dla $n\in\{1,2,...,\mathrm{N}\}$, w których występują strumienie sprzężone uzwojeń maszyny $\psi_n(\mathbf{i},\varphi)$ spełniające związki

$$\psi_n(\mathbf{i},\varphi)=\frac{\partial E_{mo}(\mathbf{i},\varphi)}{\partial i_n},\quad n\in\{1,2,...,\mathrm{N}\} \quad (3)$$

Bardzo często używana jest także forma tych równań posługująca się indukcyjnościami dynamicznymi

$$L^{\mathrm{d}}{}_{n,k}(\mathbf{i},\varphi)=\frac{\partial\psi_n(\mathbf{i},\varphi)}{\partial i_k}=\frac{\partial^2E_{mo}(\mathbf{i},\varphi)}{\partial i_k\,\partial i_n} \quad (4)$$

dla $n,k\in\{1,2,...,\mathrm{N}\}$. Wówczas przyjmują one w zapisie macierzowym postać

$$\mathbf{L}_{\mathrm{d}}(\mathbf{i},\varphi)\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\Psi(\mathbf{i},\varphi)}{\partial\varphi}+\mathbf{R}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{u} \quad (5)$$

Równaniom maszyny można nadać postać nawiązującą do klasycznej ich postaci z macierzą indukcyjności

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{L}(\mathbf{i},\varphi)\cdot\mathbf{i}\right)+\mathbf{R}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{u} \quad (6)$$

Elementy $L_{n,k}(\mathbf{i},\varphi)$ takiej macierzy indukcyjności są funkcjami wszystkich prądów oraz kąta obrotu. Macierz $\mathbf{L}(\mathbf{i},\varphi)$ nie jest jednak jednoznacznie określona. Założenie o jej symetrii pozwala jednoznacznie określić jej elementy, definiując je jako indukcyjności nieliniowe [1].

W pracach [1][4] zaproponowano zmodyfikowaną formę zapisu szeregu Taylora funkcji ko-energii dla maszyn elektrycznych, wprowadzając formy wyższych rzędów, na wzór formy kwadratowej, opisującej ko-energię układu cewek o liniowych charakterystykach. W tym zapisie funkcja ko-energii przyjmuje formę

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{mo}}(\mathbf{i},\varphi)&=\tfrac{1}{2}\mathbf{i}^T\cdot\mathbf{A}_2(\varphi)\cdot\mathbf{i}+\\&+\tfrac{1}{4}\mathbf{i}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{diag}_{\mathrm{N}}\left[\mathbf{i}^T\ \cdots\ \mathbf{i}^T\right]\cdot\mathbf{A}_4^{\mathrm{c}}(\varphi)\cdot\mathrm{diag}_{\mathrm{N}}\left[\mathbf{i}\ \cdots\ \mathbf{i}\right]\cdot\mathbf{i}+\\&+\tfrac{1}{6}\mathbf{i}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{diag}_{\mathrm{N}}\left[\mathbf{i}^T\ \cdots\ \mathbf{i}^T\right]\cdot\mathrm{diag}_{\mathrm{N}^2}\left[\mathbf{i}^T\ \cdots\ \mathbf{i}^T\right]\cdot\mathbf{A}_6^{\mathrm{c}}(\varphi)\cdot\\&\cdot\mathrm{diag}_{\mathrm{N}^2}\left[\mathbf{i}\ \cdots\ \mathbf{i}\right]\cdot\mathrm{diag}_{\mathrm{N}}\left[\mathbf{i}\ \cdots\ \mathbf{i}\right]\cdot\mathbf{i}+\cdots\end{aligned} \quad (7)$$

Wyodrębniono w nim macierze $\mathbf{A}_2(\varphi)$, $\mathbf{A}_4^{\mathrm{c}}(\varphi)$ oraz $\mathbf{A}_6^{\mathrm{c}}(\varphi)$, których elementy zależą jedynie od kąta obrotu, a nie zależą od prądów. Wygodniejszy jest jednak zapis

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{mo}}(\mathbf{i},\varphi)&=\tfrac{1}{2}\mathbf{i}^T\cdot\mathbf{A}_2(\varphi)\cdot\mathbf{i}+\\&+\tfrac{1}{4}\mathbf{i}^T\cdot\mathbf{A}_4(\mathbf{i},\varphi)\cdot\mathbf{i}+\tfrac{1}{6}\mathbf{i}^T\cdot\mathbf{A}_6(\mathbf{i},\varphi)\cdot\mathbf{i}+\cdots\end{aligned} \quad (8)$$

w którym macierze $\mathbf{A}_2(\varphi),\mathbf{A}_4(\mathbf{i},\varphi),\mathbf{A}_6(\mathbf{i},\varphi)$ wynikają z formy (7), a funkcja ko-energii jest sumą form kwadratowych prądów utworzonych na bazie tych macierzy. Pozwala to zapisać wektor strumieni skojarzonych uzwojeń maszyny w postaci

$$\Psi(\mathbf{i},\varphi)=\left(\mathbf{A}_2(\varphi)+\mathbf{A}_4(\mathbf{i},\varphi)+\mathbf{A}_6(\mathbf{i},\varphi)+\cdots\right)\cdot\mathbf{i} \quad (9)$$

a macierze indukcyjności dynamicznych i nieliniowych jako

$$\mathbf{L}_{\mathrm{d}}(\mathbf{i},\varphi)=\mathbf{A}_2(\varphi)+3\mathbf{A}_4(\mathbf{i},\varphi)+5\mathbf{A}_6(\mathbf{i},\varphi)+\cdots \quad (10)$$

$$\mathbf{L}_{\mathrm{n}}(\mathbf{i},\varphi)=\mathbf{A}_2(\varphi)+\mathbf{A}_4(\mathbf{i},\varphi)+\mathbf{A}_6(\mathbf{i},\varphi)+\cdots \quad (11)$$

We wszystkich powyższych zależnościach występują te same współczynniki stałe, zależne od kąta φ, które są zgrupowane w macierzach $\mathbf{A}_2(\varphi)$, $\mathbf{A}_4^{\mathrm{c}}(\varphi)$, $\mathbf{A}_6^{\mathrm{c}}(\varphi)$,... o elementach stałych dla zadanego położenia wirnika. W celu opisu maszyny elektrycznej uwzględniającego nieliniowość obwodu magnetycznego należy te współczynniki wyznaczyć, korzystając z wyników obliczania rozkładu pola magnetycznego metodami numerycznymi.

W pracy opisano algorytm określania elementów macierzy $\mathbf{A}_2(\varphi)$, $\mathbf{A}_4^{\mathrm{c}}(\varphi)$, $\mathbf{A}_6^{\mathrm{c}}(\varphi)$,... na podstawie wartości ko-energii oraz strumieni skojarzonych obliczonych numerycznie z rozkładu pola magnetycznego dla określonego zbioru wartości prądów $\mathbf{i}=\{i_1\ \cdots\ i_{\mathrm{N}}\}$, a także nieco zmodyfikowany uwzględniający także wartości indukcyjności dynamicznych. Pozwalają one na redukcję liczby przypadków numerycznego obliczania rozkładu pola gdyż dla obliczenia współczynników funkcji aproksymujących wykorzystywane są zarówno wartości ko-energii jaki również wartości strumieni skojarzonych (czyli pochodnych funkcji ko-energii względem poszczególnych prądów), które można obliczyć na podstawie tego samego rozkładu pola magnetycznego.

2. Opis algorytmu aproksymacji funkcji ko-energii i strumieni skojarzonych

Metodologia określania współczynników funkcji aproksymujących ko-energię, strumienie skojarzone oraz indukcyjności dynamiczne i nieliniowe zostanie przedstawiona na przykładzie maszyny o dwóch uzwojeniach. Ma to na celu przejrzystą prezentację jej idei. Dodatkowo, z tego samego powodu, ograniczono aproksymację funkcji ko-energii do pierwszych dwóch różniczek w szeregu Taylora

$$E_{\mathrm{mo}}(i_1,i_2)=\frac{1}{(2)!}\mathrm{d}^2E_{\mathrm{mo}}(0,0)+\frac{1}{(4)!}\mathrm{d}^4E_{\mathrm{mo}}(0,0)$$

W tym i dalszych zapisach pominięto zależność ko-energii oraz strumieni skojarzonych od kąta obrotu φ, przyjmując, że obowiązują one dla wybranej wartości tego kąta. Funkcja aproksymująca ko-energię ma w bezpośrednim zapisie szeregiem potęgowym postać

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{mo}}(i_1,i_2)&=\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}_{2,0}\cdot i_1^{\,2}+2\mathrm{A}_{1,1}\cdot i_1\cdot i_2+\mathrm{A}_{0,2}\cdot i_2^{\,2})+\\&+\tfrac{1}{4}(\mathrm{A}_{4,0}\cdot i_1^{\,4}+4\mathrm{A}_{3,1}\cdot i_1^{\,3}\cdot i_2+6\mathrm{A}_{2,2}\cdot i_1^{\,2}\cdot i_2^{\,2}+\\&+4\mathrm{A}_{1,3}\cdot i_1\cdot i_2^{\,3}+\mathrm{A}_{0,4}\cdot i_2^{\,4})\end{aligned}\qquad(12)$$

w której współczynniki stałe są określone przez odpowiednie pochodne cząstkowe funkcji $E_{\mathrm{mo}}(i_1,i_2)$ obliczane dla zerowych wartości prądów. Każdy z nich może być funkcją kąta φ, czego nie uwzględniono w zapisie. Przy takiej aproksymacji funkcji ko-energii macierze $\mathbf{A_2}$ oraz $\mathbf{A_4}(i_1,i_2)$ występujące w (8), (9), (10) i (11) mają postaci

$$\mathbf{A_2}=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{2,0} & \mathrm{A}_{1,1}\\ \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{0,2}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A_4}(i_1,i_2)=\begin{bmatrix}i_1 & i_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i_1 & i_2\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{4,0} & \mathrm{A}_{3,1} & \mathrm{A}_{3,1} & \mathrm{A}_{2,2}\\ \mathrm{A}_{3,1} & \mathrm{A}_{2,2} & \mathrm{A}_{2,2} & \mathrm{A}_{1,3}\\ \mathrm{A}_{3,1} & \mathrm{A}_{2,2} & \mathrm{A}_{2,2} & \mathrm{A}_{1,3}\\ \mathrm{A}_{2,2} & \mathrm{A}_{1,3} & \mathrm{A}_{1,3} & \mathrm{A}_{0,4}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_1 & 0\\ i_2 & 0\\ 0 & i_1\\ 0 & i_2\end{bmatrix}$$

W konsekwencji, strumienie skojarzone uzwojeń należy aproksymować funkcjami

$$\psi_1(i_1,i_2)=\frac{\partial E_{mo}(i_1,i_2)}{\partial i_1}=(\mathrm{A}_{2,0}\cdot i_1+\mathrm{A}_{1,1}\cdot i_2)+$$

$$+(\mathrm{A}_{4,0}\cdot i_1^{\,3}+3\mathrm{A}_{3,1}\cdot i_1^{\,2}\cdot i_2+3\mathrm{A}_{2,2}\cdot i_1\cdot i_2^{\,2}+\mathrm{A}_{1,3}\cdot i_2^{\,3})\qquad(13a)$$

$$\psi_2(i_1,i_2)=\frac{\partial E_{mo}(i_1,i_2)}{\partial i_2}=(\mathrm{A}_{1,1}\cdot i_1+\mathrm{A}_{0,2}\cdot i_2)+$$

$$+(\mathrm{A}_{3,1}\cdot i_1^{\,3}+3\mathrm{A}_{2,2}\cdot i_1^{\,2}\cdot i_2+3\mathrm{A}_{1,3}\cdot i_1\cdot i_2^{\,2}+\mathrm{A}_{0,4}\cdot i_2^{\,3})\qquad(13b)$$

Z powyższych zapisów jednoznacznie wynika, że we zależnościach (12) oraz (13a,b) występują te same stałe współczynniki. W celu ich określenia można wykorzystać wszystkie trzy powyższe zależności jednocześnie. Należy podkreślić, że komercyjne pakiety do analizy pola magnetycznego umożliwiają obliczanie tych wartości w fazie post-procesingu na podstawie obliczonego rozkładu pola. Jeżeli oznaczyć przez $\mathrm{E}_{\mathrm{mo}}(n)$ wartość ko-energii obliczonej na podstawie rozkładu pola dla pary prądów $\mathrm{I}_{1n},\mathrm{I}_{2n}$ oraz odpowiednio przez $\psi_1(n)$, $\psi_2(n)$ oznaczyć wartości strumieni skojarzonych każdego z uzwojeń, obliczone na podstawie tego samego rozkładu pola, wówczas można zapisać następujący układ równań algebraicznych liniowych, w którym niewiadomymi są współczynniki funkcji (12) oraz (13a,b).

$$\begin{bmatrix}\mathrm{E}_{\mathrm{mo}}(n)\\ \psi_1(n)\\ \psi_2(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tfrac{1}{2}\mathrm{I}_{1,n}^{\,2} & \mathrm{I}_{1,n}\mathrm{I}_{2,n} & \tfrac{1}{2}\mathrm{I}_{2,n}^{\,2}\\ \mathrm{I}_{1,n} & \mathrm{I}_{2,n} & 0\\ 0 & \mathrm{I}_{1,n} & \mathrm{I}_{2,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{2,0}\\ \mathrm{A}_{1,1}\\ \mathrm{A}_{0,2}\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}\tfrac{1}{4}\mathrm{I}_{1,n}^{\,4} & \mathrm{I}_{1,n}^{\,3}\cdot\mathrm{I}_{2,n} & \tfrac{3}{2}\mathrm{I}_{1,n}^{\,2}\cdot\mathrm{I}_{2,n} & \mathrm{I}_{1,n}\cdot\mathrm{I}_{2,n}^{\,3} & \tfrac{1}{4}\mathrm{I}_{2,n}^{\,4}\\ \mathrm{I}_{1,n}^{\,3} & 3\mathrm{I}_{1,n}^{\,2}\cdot\mathrm{I}_{2,n} & 3\mathrm{I}_{1,n}\cdot\mathrm{I}_{2,n}^{\,2} & \mathrm{I}_{2,n}^{\,3} & 0\\ 0 & \mathrm{I}_{1,n}^{\,3} & 3\mathrm{I}_{1,n}^{\,2}\cdot\mathrm{I}_{2,n} & 3\mathrm{I}_{1,n}\cdot\mathrm{I}_{2,n}^{\,2} & \mathrm{I}_{2,n}^{\,3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{4,0}\\ \mathrm{A}_{3,1}\\ \mathrm{A}_{2,2}\\ \mathrm{A}_{1,3}\\ \mathrm{A}_{0,4}\end{bmatrix}\qquad(14)$$

Układ równań (14) otrzymano wykorzystując zarówno wartość funkcji ko-energii jak i wartości jej pierwszych pochodnych cząstkowych dla wybranej wartości jej zmiennych niezależnych. Istotnym jest fakt, że można go utworzyć na podstawie jednego rozwiązania równań pola. Jest to układ o macierzy prostokątnej o ogólnej postaci

$$\mathbf{W}(n)=\mathbf{I}(n)\cdot\mathbf{A}\qquad(15)$$

W ogólnym przypadku jego wymiary zależą od liczby uzwojeń maszyny oraz liczby wyrazów różniczek uwzględnianych w rozwinięciu Taylora funkcji ko-energii. Liczba wierszy w układzie (14) dla maszyny o M uzwojeniach wynosi M+1. Liczba kolumn wzrasta bardzo szybko wraz ze stopniem uwzględnianej różniczki oraz liczby uzwojeń.

Układ równań (14) stanowi podstawę dla zastosowania metody regresji liniowej do wyznaczania wartości współczynników funkcji aproksymujących (12) oraz (13a,b). W tym celu należy przeprowadzić serię obliczeń wartości ko-energii oraz strumieni skojarzonych w wybranym obszarze przestrzeni prądów i_1, i_2. Na podstawie takiego zbioru wartości można utworzyć układ równań o postaci

$$\mathbf{W} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} \tag{16}$$

złożonego z równań (15) uporządkowanych w następujący sposób

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}(1) \\ \mathbf{W}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{W}(\mathrm{N}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}(1) \\ \mathbf{I}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{I}(\mathrm{N}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A} \tag{17}$$

Metoda regresji prowadzi do wyrażenia określającego wektor $\mathbf{A}$ o postaci

$$\mathbf{A} = \left(\left(\mathbf{I}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \right)^{-1} \cdot \mathbf{I}^T \right) \cdot \mathbf{W} \tag{18}$$

w którym macierz $\left(\mathbf{I}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \right)^{-1} \cdot \mathbf{I}^T$ jest znana jako macierz pseduo-odwortna Moore-Penrose'a dla macierzy $\mathbf{I}$ [6].

Algorytm opisany w tym rozdziale pozwala w istotny sposób ograniczyć ilość obliczeń koniecznych do obliczenia współczynników funkcji aproksymujących ko-energię oraz strumienie skojarzone uzwojeń maszyny z nieliniowym obwodem magnetycznym. Ważną jego zaletą jest jednoczesna aproksymacja funkcji ko-energii oraz jej pierwszych pochodnych cząstkowych, czyli strumieni skojarzonych uzwojeń maszyny.

3. Algorytm uwzględniający dodatkowo indukcyjności dynamiczne uzwojeń

Algorytm opisany powyżej można rozbudować uwzględniając wyrażenia aproksymujące indukcyjności dynamiczne, czyli drugie pochodne cząstkowe funkcji ko-energii. Przy założonej jej aproksymacji wielomianem (12) indukcyjności dynamiczne są aproksymowane funkcjami, w których występują te same współczynniki jak w związkach (12) oraz (13a,b)

$$L^{\mathrm{d}}_{1,1}(i_1,i_2) = \frac{\partial^2 E_{mo}(i_1,i_2)}{\partial i_1^{\,2}} = \mathrm{A}_{2,0} +$$
$$+ (3\mathrm{A}_{4,0} \cdot i_1^{\,2} + 6\mathrm{A}_{3,1} \cdot i_1 \cdot i_2 + 3\mathrm{A}_{2,2} \cdot i_2^{\,2}) \tag{19a}$$

$$L^{\mathrm{d}}_{2,2}(i_1,i_2) = \frac{\partial^2 E_{mo}(i_1,i_2)}{\partial i_2^{\,2}} = \mathrm{A}_{2,2} +$$
$$+ (3\mathrm{A}_{2,2} \cdot i_1^{\,2} + 6\mathrm{A}_{1,3} \cdot i_1 \cdot i_2 + 3\mathrm{A}_{0,4} \cdot i_2^{\,2}) \tag{19b}$$

$$L^{\mathrm{d}}_{1,2}(i_1,i_2) = \frac{\partial^2 E_{mo}(i_1,i_2)}{\partial i_2\, \partial i_1} = \mathrm{A}_{1,1} +$$
$$(3\mathrm{A}_{3,1} \cdot i_1^{\,2} + 6\mathrm{A}_{2,2} \cdot i_1 \cdot i_2 + 3\mathrm{A}_{1,3} \cdot i_2^{\,2}) \tag{19c}$$

W efekcie można powiększyć układ równań (14) o dodatkowe trzy równania

$$\begin{bmatrix} \mathrm{E}_{\mathrm{mo}}(n) \\ \psi_1(n) \\ \psi_2(n) \\ L^{\mathrm{d}}_{1,1}(n) \\ L^{\mathrm{d}}_{1,2}(n) \\ L^{\mathrm{d}}_{2,2}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{I}_{1,n}^{\,2} & \mathrm{I}_{1,n} \cdot \mathrm{I}_{2,n} & \frac{1}{2}\mathrm{I}_{2,n}^{\,2} \\ \mathrm{I}_{1,n} & \mathrm{I}_{2,n} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{1,n} & \mathrm{I}_{2,n} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{2,0} \\ \mathrm{A}_{1,1} \\ \mathrm{A}_{0,2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\mathrm{I}_{1,n}^{\,4} & \mathrm{I}_{1,n}^{\,3} \cdot \mathrm{I}_{2,n} & \frac{3}{2}\mathrm{I}_{1,n}^{\,2} \cdot \mathrm{I}_{2,n}^{\,2} & \mathrm{I}_{1,n} \cdot \mathrm{I}_{2,n}^{\,3} & \frac{1}{4}\mathrm{I}_{2,n}^{\,4} \\ \mathrm{I}_{1,n}^{\,3} & 3\mathrm{I}_{1,n}^{\,2} \cdot \mathrm{I}_{2,n} & 3\mathrm{I}_{1,n} \cdot \mathrm{I}_{2,n}^{\,2} & \mathrm{I}_{2,n}^{\,3} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{1,n}^{\,3} & 3\mathrm{I}_{1,n}^{\,2} \cdot \mathrm{I}_{2,n} & 3\mathrm{I}_{1,n} \cdot \mathrm{I}_{2,n}^{\,2} & \mathrm{I}_{2,n}^{\,3} \\ 3\mathrm{I}_{1,n}^{\,2} & 6\mathrm{I}_{1,n} \cdot \mathrm{I}_{2,n} & 3\mathrm{I}_{2,n}^{\,2} & 0 & 0 \\ 0 & 3\mathrm{I}_{1,n}^{\,2} & 6\mathrm{I}_{1,n} \cdot \mathrm{I}_{2,n} & 3\mathrm{I}_{2,n}^{\,2} & 0 \\ 0 & 0 & 3\mathrm{I}_{1,n}^{\,2} & 6\mathrm{I}_{1,n} \cdot \mathrm{I}_{2,n} & 3\mathrm{I}_{2,n}^{\,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{4,0} \\ \mathrm{A}_{3,1} \\ \mathrm{A}_{2,2} \\ \mathrm{A}_{1,3} \\ \mathrm{A}_{0,4} \end{bmatrix} \tag{20}$$

W tych równaniach zachowano oznaczenia z równań (14). Aby je otrzymać należy jednak wykonać dwa dodatkowe obliczenia rozkładu pola magnetycznego dla dwóch par prądów

$$(\mathrm{I}_{1n} + \Delta\mathrm{I}_{1n}, \mathrm{I}_{2n}) \text{ oraz } (\mathrm{I}_{1n}, \mathrm{I}_{2n} + \Delta\mathrm{I}_{2n}),$$

zyskując jednak trzy równania. Indukcyjności dynamiczne wynikają z zależności

- dla pierwszej pary prądów $(\mathrm{I}_{1n} + \Delta\mathrm{I}_{1n}, \mathrm{I}_{2n})$

$$L^{\mathrm{d}}_{1,1}(n) = \frac{\Delta\psi_{1,1}(n)}{\Delta\mathrm{I}_{1n}} \qquad L^{\mathrm{d}}_{2,1}(n) = \frac{\Delta\psi_{2,1}(n)}{\Delta\mathrm{I}_{1n}}$$

- dla drugiej pary prądów $(\mathrm{I}_{1n},\mathrm{I}_{2n}+\Delta\mathrm{I}_{2n})$

$$L^{\mathrm{d}}{}_{2,2}(n)=\frac{\Delta\psi_{2,2}(n)}{\Delta\mathrm{I}_{2n}} \qquad L^{\mathrm{d}}{}_{1,2}(n)=\frac{\Delta\psi_{1,2}(n)}{\Delta\mathrm{I}_{2n}}$$

Ponieważ wartości $L^{\mathrm{d}}{}_{2,1}(n)$ oraz $L^{\mathrm{d}}{}_{1,2}(n)$ muszą być równe, w rzeczywistych obliczeniach należałoby przyjąć

$$L^{\mathrm{d}}{}_{1,2}(n)=L^{\mathrm{d}}{}_{1,2}(n)=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\psi_{1,2}(n)}{\Delta\mathrm{I}_{2n}}+\frac{\Delta\psi_{2,1}(n)}{\Delta\mathrm{I}_{1n}}\right)$$

Indukcyjności dynamiczne można także wyznaczyć korzystając z wzorów na aproksymacje drugich pochodnych cząstkowych funkcji ko-energii lecz wymaga to obliczania rozkładu pola dla czterech par prądów: $(\mathrm{I}_{1n}+\Delta\mathrm{I}_{1n},\mathrm{I}_{2n})$, $(\mathrm{I}_{1n},\mathrm{I}_{2n}+\Delta\mathrm{I}_{2n})$ oraz $(\mathrm{I}_{1n}-\Delta\mathrm{I}_{1n},\mathrm{I}_{2n})$, $(\mathrm{I}_{1n},\mathrm{I}_{2n}-\Delta\mathrm{I}_{2n})$.

W ogólnym przypadku liczba wierszy w układzie (20) wyniesie $1+\mathrm{M}+\mathrm{M}\cdot(\mathrm{M}+1)/2$, gdzie M oznacza liczbę uzwojeń maszyny. Zatem dodatkowe obliczanie rozkładów pola w celu określenia indukcyjności dynamicznych może być opłacalne. Liczba kolumn, podobnie jak w układzie (14), wzrasta bardzo szybko wraz ze stopniem uwzględnianej różniczki oraz liczby uzwojeń.

Dalsze postępowanie jest analogiczne jak w przypadku algorytmu opisanego w poprzednim rozdziale. Należy utworzyć układ równań o postaci (17), a następnie określić wektor ze współczynnikami z (18). Bazowy układ równań (20) uwzględnia drugie pochodne funkcji ko-energii, więc jej aproksymacja powinna być lepsza lub wymagać mniejszej liczby powtórzeń obliczania rozkładu pola magnetycznego w maszynie.

4. Wnioski

W pracy opisano algorytmy, które formalizują sposób obliczania stałych współczynników występujących w funkcjach aproksymujących ko-energię, strumienie skojarzone oraz indukcyjności wykorzystywane przy obwodowym opisie maszyn elektrycznych z nieliniowym obwodem magnetycznym. Ich ważną zaletą jest ograniczenie liczby przypadków numerycznych obliczeń rozkładu pola magnetycznego w maszynie. Istotną nowością jest także fakt, że przy aproksymacji uwzględnia się nie tylko wartości funkcji ko-energii, lecz również jej pierwsze pochodne cząstkowe lub dodatkowo także drugie pochodne cząstkowe.

7. Literatura

[1] Sobczyk T.J., An Energy-Based Approach to Modeling the Magnetic Non-Linearity in AC Machines, Part I – General Formulas for the Co-energy, Linkage Fluxes and Inductances, Archives of Electrical Engineering, PWN, Warsaw, 48(1-2): 219-229 (1999).

[2] Demerdash N.A., Nehl T.W., Electric Machinery Parameters and Torques by Current and Energy Perturbations from Field Computations - Part I: Theory and Formulation, IEEE Trans. on Energy Conversion, 14(4): 1507-1513 (1999).

[3] Demenko A., Nowak L., Pietrowski W., Calculation of Magnetization Characteristic of a Squirrel Cage Machine Using Edge Element Method, COMPEL, James & James Science Pub., 23(4):1110-1118 (2004).

[4] Sobczyk T.J., Methodological Aspects of Mathematical Modeling of Induction Machines (in Polish), WNT, Warsaw (2004).

[5] Kudła J., Mathematical Models of AC Machines Accounting for Saturation (in Polish), Scien. Bull. of Silesian University of Technology, No. 1683, Gliwice (2005).

[6]Bishop Ch. M., Pattern Recognition and Machine Learning, Springer Science + Business Media, (2006).

[7]Warzecha A., Multidimensional Magnetizing Characteristics for Circuit Models of Electrical Machines (in Polish), Cracow University of Technology, Monograph (381), Series of Electrical & Computer Eng. (2010).

Autorzy:

Tadeusz J. Sobczyk, prof. dr hab. inż.
pesobczy@cyfronet.pl,
Adam Warzecha, dr hab. inż.
pewarzec@cyfronet.pl,
Witold Mazgaj, dr hab. inż.
pemazgaj@cyfronet.pl,
Politechnika Krakowska, Instytut Elektromechanicznych Przemian Energii,
Kraków, 31-155, ul. Warszawska 24.

Źródło finansowania

Praca powstała w ramach projektu badawczego „Modelowanie nieliniowości, histerezy i anizotropii w magnetowodach przetworników elektromechanicznych z wirującym polem magnetycznym”, nr 2011/01/B/ST7/04479, finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki.

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Dariusz Spałek