



Próba znalezienia transmitancji węzła ciernego

Maciej Szews

TNC sp. z o.o. Dealer IVECO, Gdańsk

Streszczenie: W pracy przedstawiono model matematyczny procesu hamowania w postaci transmitancji obiektu statycznego pierwszego rzędu, wyznaczony na podstawie danych uzyskanych podczas badań eksploatacyjnych. Do optymalizacji procesu wykorzystano dodatek Solver w arkuszu kalkulacyjnym Excel. We wprowadzeniu przedstawiono analizę teoretyczną modelu hamowania i wykazano, że prowadzi ona do równań różniczkowych nieliniowych.

Słowa kluczowe: proces hamowania, model matematyczny, transmitancja, Solver, bilans energetyczny

An attempt to find the friction node transfer function

Maciej Szews

TNC sp. z o.o. Dealer IVECO, Gdańsk

Summary: The paper presents the mathematical model of the braking process in the form of the first order static element transfer function determined on the basis of data obtained during operational tests. The Solver add-on in the Excel spreadsheet was used to optimize the process. In the introduction the theoretical analysis of braking process was presented and it was shown that it leads to nonlinear differential equations.

Key words: braking process, mathematical model, transfer function, Solver, energy balance

1. Wstęp

Celem pracy jest budowa modelu matematycznego określającego dynamikę wzrostu temperatury tarczy hamulcowej podczas procesu hamowania ciągnika siodłowego. W pierwszej części podjęto próbę analitycznego znalezienia modelu. Na podstawie przeprowadzonej analizy udowodniono, że model ten byłby bardzo skomplikowany, wobec tego nieczytelny. Komplikacja polega na uwzględnieniu dużej liczby parametrów. Pominięcie niektórych parametrów prowadziłoby do znacznych niedokładności modelu.

Wobec powyższego zbudowano opis matematyczny procesu na podstawie prowadzonych wcześniej badań doświadczalnych w postaci transmitancji operatorowej [2]. Jako wielkość wejściową przyjęto przyrost temperatury tarczy hamulcowej w czasie odniesiony do wartości ustalonej tej tarczy po procesie hamowania. Szeroko wykorzystano analizę statystyczną

2. Model analityczny

Najbardziej ogólnym równaniem opisującym właściwości dynamiczne procesu hamowania jest bilans energetyczny: energia kinetyczna poruszającego się samochodu podczas jazdy po płaskiej drodze bez wzniesień (płaszczyzna pozioma) zamieniana jest w ciepło, które jest rozpraszane do otoczenia. W stanie dynamicznym rośnie temperatura węzła hamulcowego, co jest oznaką akumulowania się energii w węźle składającym się z tarczy hamulcowej i klocka oraz ich najbliższego otoczenia. Ogólnie można napisać:

$$\Delta E_{\text{system}} = E_{\text{in}} - E_{\text{out}} \text{ [kJ]} \quad (1)$$

gdzie:

- ΔE_{system} – zmiana energii całkowitej analizowanego systemu, przykładowo ciągnika siodłowego z trójosiową naczepą, w [kJ],
- E_{in} – ilość energii dostarczanej do systemu, np. z silnika, w [kJ],
- E_{out} – ilość energii rozpraszanej, w [kJ].

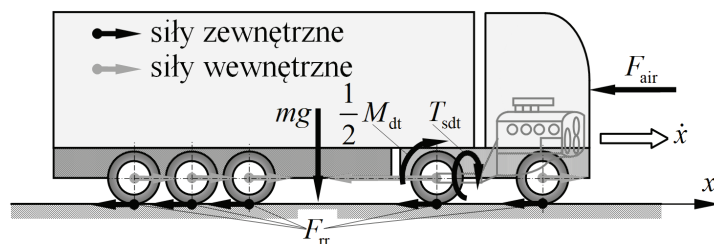
Przykładowo, podczas ruchu jednostajnego w poziomie $v = \text{const}$ nie ma akumulacji energii, wobec tego równanie (1) przyjmuje postać:

$$0 = E_{\text{in}} - E_{\text{out}} \text{ [kJ]} \quad (2)$$

Dogodniejszy do analizy jest bilans mocy:

$$0 = \dot{E}_{\text{in}} - \dot{E}_{\text{out}} \text{ [kW]} \quad (3)$$

W tym stanie praca silnika wyznaczona na podstawie jego mocy zużywana jest przede wszystkim na pokonanie oporów ruchu w powietrzu i sił oporów tarcia kół o jezdnię (rys. 1).



Rys. 1. Podstawowe siły działające na samochód w ruchu [opracowanie własne]
Fig. 1. Basic forces acting on a heavy truck in motion [own study]

Moc silnika można wyznaczyć ze wzoru:

$$\dot{W}_{sh} = \omega T W \quad \text{lub} \quad \dot{W}_{sh} = \frac{2\pi\dot{n}}{60} \frac{T}{1000} \text{ kW} \quad (4)$$

gdzie:

- \dot{W}_{sh} – moc na wale napędowym, w [kW],
- ω – prędkość kątowa wałka napędowego, w [rad/s],
- \dot{n} – prędkość obrotowa wałka napędowego, w [obr/min],
- T – moment obrotowy, w [N·m].

Szczególnie trudne może być uwzględnienie oporów ruchu w powietrzu, ponieważ przyjmuje się, że:

$$F_{air} = \beta \dot{x} \quad (5)$$

gdzie:

- F_{air} – siła oporów ruchu w powietrzu, w [N],
- β – współczynnik oporów ruchu w powietrzu, w [N·s/m],
- \dot{x} – prędkość samochodu, w [m/s].

Wobec tego moc rozpraszana \dot{E}_{air} w wyniku oporów ruchu w powietrzu można określić wzorem:

$$\dot{E}_{air} = F_{air} \dot{x} = \beta \dot{x}^2 \quad (6)$$

Sygnalizowana powyżej trudność polega na tym, że prędkość \dot{x} jest podniesiona do kwadratu, co będzie prowadziło do nieliniowego równania różniczkowego, natomiast współczynnik β jest zależny od wielu parametrów, przede wszystkim od kształtu pojazdu, ale również warunków atmosferycznych.

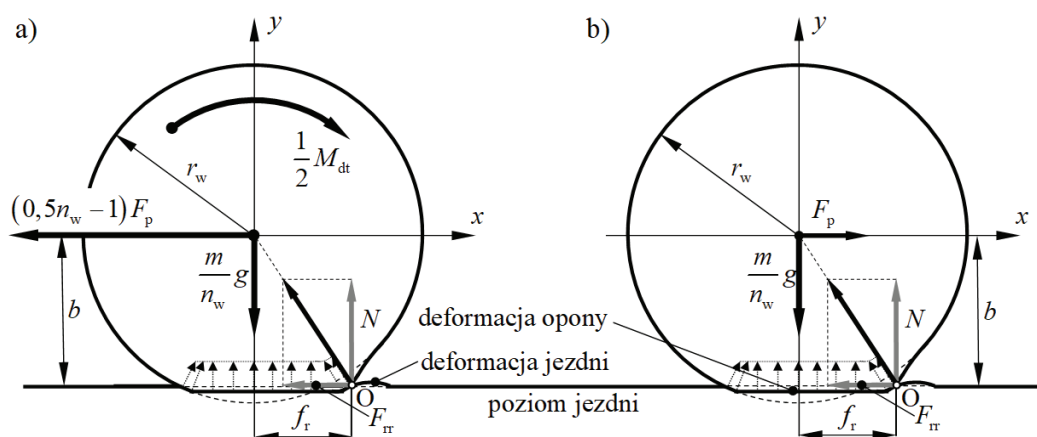
Siłę oporów tarcia kół na powierzchni jezdni można wyznaczyć z układu równań dla koła napędowego i koła tocznego (rys. 2), określających w obydwóch przypadkach warunek równowagi momentów wokół punktu O. Przyjmujemy założenie upraszczające, że promień koła jest w przybliżeniu równy ramieniu $r_w \approx b$, dla sił $4F_p$ (rys. 2a) lub F_p (rys. 2b). Należy zauważyć, że układ równań (7) został napisany tylko dla jednej strony pojazdu:

$$\text{dla koła napędzanego} \quad 0,5M_{dt} = (0,5n_w - 1)F_p r_w + \frac{m}{n_w} g \cdot f_r \quad (7)$$

$$\text{dla koła tocznego} \quad 0 = F_p r_w - \frac{m}{n_w} g \cdot f_r \quad (8)$$

gdzie:

- M_{dt} – moment obrotowy na wale mostu, wyznaczony z momentu obrotowego silnika T , w [N·m],
- F_p – siła ciągnąca dla jednego koła, w [N],
- r_w – promień koła, w [m],
- f_r – współczynnik tarcia tocznego, w [m],
- m – całkowita masa pojazdu, w [kg],
- n_w – łączna liczba kół samochodu,
- g – przyspieszenie ziemskie, w [m·s⁻²].



Rys. 2. Opory toczenia: a) koło napędzane, b) koło toczne [opracowanie własne]
 Fig. 2. Rolling resistance: a) driven wheel, b) rolling wheel [own study]

Siłę tarcia tocznego F_{rr} można wyznaczyć bezpośrednio z równania (8), przyjmując, że z warunku równowagi dla sił poziomych $F_p = F_{rr}$:

$$F_{rr} = F_p = \frac{m}{n_w} g \frac{f_r}{r_w} \quad (9)$$

czyli moc rozpraszana na n_w kołach (moc zamieniana w ciepło) w wyniku tarcia tocznego:

$$\dot{E}_{rr} = F_{rr} \dot{x} = m \cdot g \frac{f_r}{r_w} \dot{x} \quad (10)$$

Z równania (7) można wyznaczyć moment obrotowy na wale mostu napędowego, po podstawieniu (9) do (7) otrzymamy:

$$M_{dt} = m \cdot g \cdot f_r \quad (11)$$

Bilans mocy procesu hamowania, przy przyjęciu założeń, że w chwili wciśnięcia pedału hamulca $t = 0$ prędkość pojazdu wynosiła $\dot{x}(0)$, po czasie $t = t_h$ wynosiła $\dot{x}(t_h)$, silnik jest odłączony poprzez sprzęgło $\dot{E}_{in} = 0$:

$$\Delta \dot{E}_{system} = 0 - \Delta \dot{E}_k - \beta \cdot \dot{x}^2(t) - m \cdot g \cdot \frac{f_r}{r_w} \dot{x}(t) \quad (12)$$

Należy zauważyć, że zmiana energii kinetycznej ΔE_k jest zmianą stanu pojazdu, zależy więc jedynie od stanu końcowego $E_k(t_h) = 0,5m \cdot \dot{x}^2(t_h)$ i stanu początkowego w procesie hamowania $E_k(t_0) = 0,5m \cdot \dot{x}^2(t_0)$, czyli rozproszona moc w przypadku zmiany energii kinetycznej nie jest zależna od t , wobec tego można napisać:

$$\Delta \dot{E}_k = m \frac{\dot{x}^2(t_h) - \dot{x}^2(t_0)}{2t_h} \quad (13)$$

czyli ma wartość liczbową niezależną od tego, w jaki sposób zmienia się $x(t)$. Podczas hamowania $\Delta E_k < 0$, w granicznym przypadku, gdy samochód się zatrzyma $\dot{x}(t)$, spadek energii kinetycznej jest równy $\Delta E_k = -0,5m \cdot \dot{x}^2(t_0)$.

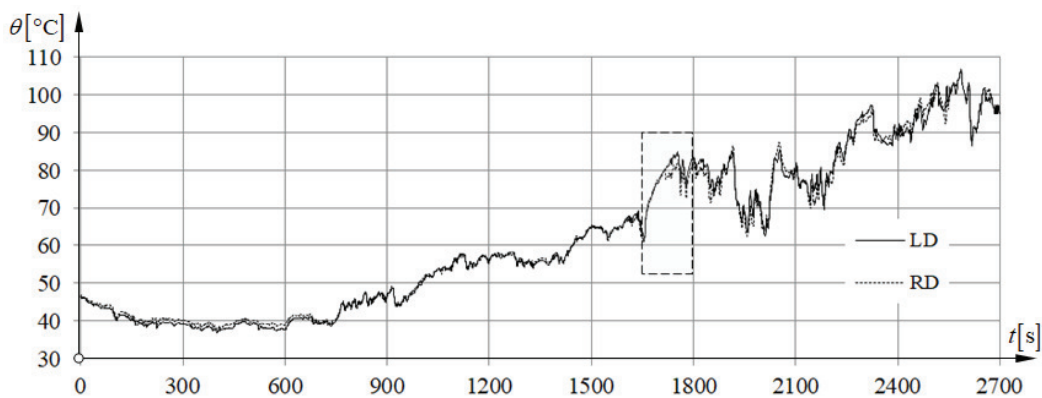
W tym modelu pominięto przykładowo siłę wiatru, sprawność dyferencjału, opory ruchu w łożyskach kół itp.

Równania przedstawione powyżej mogą stanowić fragment modelu matematycznego opisującego przekształcanie energii kinetycznej w rozpraszane ciepło z uwzględnieniem dynamicznej akumulacji ciepła w węźle cieplnym. Rozwikłanie tego modelu, czyli określenie temperatury tarczy hamulca w zależności od wybranych parametrów (nie wszystkich), np.: $\theta_d = f(\Delta v, p_{pn}, m, n, \beta, \dots)$, prowadzi do opisu analitycznego, który absolutnie nie nadaje się do praktycznego wykorzystania.

3. Model na podstawie badań doświadczalnych

3.1. Model statystyczny

Ujęcie statystyczne wymaga dużej liczby danych, dlatego zrealizowano badania na obiekcie rzeczywistym (ciągnik siodłowy plus trzyosiowa naczepa) podczas hamowania w terenie górzystym, pagórkowatym, płaskim – przez kilkadziesiąt godzin. Otrzymano wyniki różnorodnych procesów hamowania, np. długotrwałego, krótkotrwałego, pulsacyjnego.

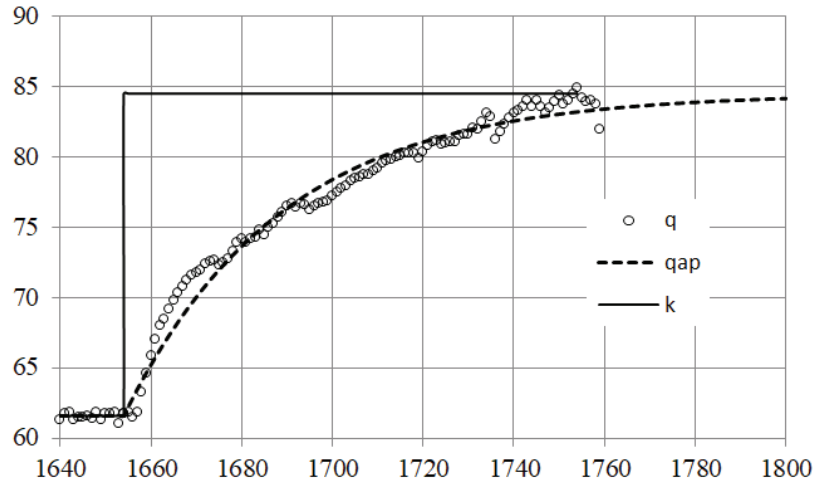


Rys. 3. Przykładowy zmierzony przebieg temperatury [opracowanie własne]

Fig. 3. An example of a measured temperature course [own study]

Na rys. 3 przedstawiono zmierzony przebieg temperatury na tej samej osi z lewej (LD) i prawej (RD) strony samochodu przez 45 min (0,75 h). Zaznaczony

linią przerywaną fragment krzywej ilustrującej wyniki pomiarów wykorzystano do opracowania wspomnianego we wprowadzeniu modelu matematycznego. Fragment ten jest szczegółowo przedstawiony na rys. 4.



Rys. 4. Fragment krzywej pomiarowej służący do określenia transmitancji [opracowanie własne]
 Fig. 4. Part of the measurement curve used to determine of transfer function [own study]

3.2. Postać modelu

W tej części pracy przedstawiono metodę określenia transmitancji węzła ciernego (czyli właściwości dynamicznych) na podstawie jednego zarejestrowanego procesu hamowania podczas wybranej serii pomiarów.

Przyjęto, że badany obiekt ma właściwości obiektu statycznego 1. rzędu, czyli transmitancję w postaci:

$$G(s) = \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_\infty} = \frac{k}{Ts + 1} \quad (14)$$

gdzie:

- $\Delta\theta = \theta - \theta(0)$ – przyrost wartości temperatury, w [K],
- $\Delta\theta_\infty = \theta_\infty - \theta(0)$ – przyrost wartości temperatury określający nowy stan ustalony, w [K],
- $\theta_D(0)$ – temperatura tarczy hamulcowej w chwili rozpoczęcia hamowania,
- $\theta_D(t)$ – temperatura tarczy hamulcowej podczas hamowania w czasie t ,
- k – współczynnik wzmocnienia obiektu,
- T – stała czasowa obiektu.

Transmitancja określona wzorem (14) jest obrazem równania różniczkowego w postaci [1]:

$$T \frac{d\Delta\theta}{dt} + \Delta\theta = k \quad (15)$$

dla zerowych warunków początkowych.

Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$\Delta\theta(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (16)$$

Jeżeli przyjmiemy, że $k = \Delta\theta_{\infty}$, można napisać:

$$\Delta\theta(t) = \Delta\theta_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (17)$$

Podczas badań laboratoryjnych wartość $k = \Delta\theta_{D_{\infty}}$ jest mierzona. Wówczas metoda podręcznikowa polegałaby na znalezieniu stałej czasowej badanego obiektu na podstawie analogowo zarejestrowanego przebiegu procesu poprzez wykreślenie linii poziomej równoległej do osi czasu w odległości $0,632 \Delta\theta_{D_{\infty}}$, czyli całkowitego przyrostu temperatury tarczy podczas hamowania (patrz rys. 3). Współrzędna czasowa tego punktu jest stałą czasową badanego obiektu. Jednakże przyrost $\Delta\theta_{D_{\infty}}$ podczas badań eksploatacyjnych jest trudno znaleźć, dlatego należało przyjąć, że jest nieznanym i wobec tego poszukiwać dwóch parametrów transmitancji.

3.3. Określenie transmitancji

Przykład ten ilustruje możliwości wykorzystania współczesnej techniki obliczeniowej dostępnej praktycznie dla każdego, czyli arkusza kalkulacyjnego Excel.

W przypadku proponowanej metody do analizy przyjęto kilkadziesiąt wyników badań, przebieg krzywej aproksymującej do tych wyników dopasowano metodą najmniejszych kwadratów. Do dopasowania wykorzystano funkcję celu, jaką była suma kwadratów odchylenia krzywej aproksymującej od wyników badań.

$$f(k, T) = \sum_i (\theta_{api} - \theta_{mi})^2 \quad (18)$$

θ_{api} – i-ta temperatura wyznaczona na podstawie funkcji aproksymującej,

θ_{mi} – i-ta temperatura zmierzona określająca nowy stan ustalony.

Proces minimalizacji funkcji (18) odbywał się w następujących krokach:

1. Przyjęto, że analizie zostaną poddane wyniki pomiarów $t \in \langle 1640; 1800 \rangle$ s, czyli proces trwający $\Delta t = 160$ s.
2. Przedział czasu podzielono na następujące fragmenty:
 - $1640 \leq t < 1644$ – stygnięcie węzła ciernego, temperatury w tych punktach nie brano pod uwagę,
 - $1645 \leq t < 1653$ – quasi-stacjonarna temperatura tarczy, dla tych wartości wyznaczono wartość średnią i tę wartość przyjęto jako dolną wartość wymuszenia,
 - $t = 1653$ – rozpoczęcie procesu hamowania,
 - $1654 \leq t < 1754$ – proces hamowania, na podstawie tych danych wyznaczono parametry szukanej transmitancji k, T (14),

- $t \geq 1754$ – wszystkie wyniki pomiaru temperatury odrzucono, w tym czasie brak było hamowania, na wykresie rys. 4 wyniki pomiaru przedstawiono jedynie dla $1754 \leq t \leq 1760$,
3. Przesunięto oś czasu, początek osi znajdował się w punkcie $t = 1654$ s.
 4. Założono wstępne wartości $k = 25$; $T = 50$ s, dla tych wartości wyznaczono wartość funkcji celu $\Sigma\Delta\theta = 259,55$
 5. Uruchomiono nakładkę SOLVER, przy jej pomocy uzyskano minimalną wartość funkcji celu $\Sigma\Delta\theta = 95,78$ dla parametrów $k = 22,89$ i $T = 24,81$ s, na rys. 4 jest to krzywa θ_{ap} .

4. Podsumowanie

Znaleziony w postaci transmitancji model wzrostu temperatury tarczy hamulcowej jest istotny do określenia właściwości termicznych układu hamowania. Istotna jest stała czasowa T , która dobrze ilustruje zmiany temperatury tarczy istotne dla zmian właściwości ciernych układu klocków hamulcowy – tarcza, co wiąże się ze zmianą siły hamowania.

Wykorzystanie arkusza kalkulacyjnego do parametrów określenia założonej transmitancji ma istotne zalety:

1. Można znaleźć krzywą aproksymującą na podstawie częściowych wyników badań. W odróżnieniu od metody klasycznej nie musi być znana wartość k .
2. W klasycznej metodzie stała czasowa T określana jest na podstawie jednego punktu pomiarowego, jest to czas, dla którego wielkość mierzona przyjmie wartość $\theta_m = 0,632\theta_\infty$. Przy aproksymacji metodą elementów skończonych pod uwagę jest branych wiele punktów, w analizowanym przykładzie $i = 101$. Fakt ten czyni ten sposób znajdowania transmitancji bardziej wiarygodnym.

Bibliografia

- [1] Knopik, L., Perczyński D., Peszyński K., Szews M., „Analiza statystyczna temperatur węzłów ciernych naczepy trójosiowej”, *Logistyka* (2015), 1915–1925.
- [2] Peszyński, K., Siemieniako, F., „Sterowanie Procesów. Podstawy i przykłady”. Wydawnictwa Uczelniane Akademii Techniczno-Rolniczej, Bydgoszcz 2002.
- [3] Solodovnikov, V.V., „Statischeeskaja dynamika linejnych sistem avto-mati-czeskogo upavlenija” (pol. „Dynamika statystyczna liniowych systemów sterowania automatycznego”), GIFTL. Moskwa 1957.
- [4] Szews, M., Knopik, L., Perczyński, D., Peszyński, K., „Analiza zmian wartości temperatury hamulców naczep ciągników siodłowych”, *Logistyka* 6(2014).
- [5] Szews, M., Perczyński, D., Knopik, L., Wawrzyniak, S., “Temperature analysis dependence in the vicinity of the brake disk” (pol. „Analiza rozkładu temperatury w pobliżu tarczy hamulcowej”), *Proceedings of 23rd Intern. Conf. Engineering Mechanics 2017, Svratka, Czech Republic*.
- [6] Wang, G., “Impact of Brake Pad Structure on Temperature and Stress Fields of Brake Disc” (pol. „Wpływ struktury klocków hamulcowych na pola temperatury i naprężenia w tarczy hamulcowej”), *Advances in Materials Science and Engineering*. 2013.