

MODELE ST W PROJEKTOWANIU ZGINANYCH I SKRĘCANYCH BELEK ŻELBETOWYCH

Streszczenie

Zgodnie z zaleceniami PN-EN-1992-1-1 stosowanie modeli ST jest szczególnie uzasadnione w obszarach dwuosioowego rozkładu naprężeń, to jest krótkich wspornikach, narożach ram czy też strefach przypodporowych belek. Nie są to jednak metody rozpowszechnione, szczególnie w odniesieniu do elementów skręcanych.

W niniejszym artykule podjęto próbę zastosowania przestrzennych modeli ST do zaprojektowania zbrojenia w żelbetowych podciągach skręcanych i zginanych. Otrzymane za pomocą analizy ST zbrojenie porównano ze zbrojeniem otrzymanym na podstawie zależności zaproponowanych w punktach 6.2 i 6.3 EC2

WSTĘP

Belki zakrzywione w planie, podlegające zginaniu i skręcaniu są powszechnie stosowanym elementem konstrukcyjnym w różnego typu zjazdach z dróg i autostrad. Zastosowanie ich jest szczególnie uzasadnione w miejscach krzyżowania się dróg, gdzie istotną rolę odgrywa bezkolizyjne kształtowanie zjazdów w różnych kierunkach.

Z uwagi na liczne braki w zaleceniach normy PN-EN-1992, dotyczące sposobu obliczania i kształtowania zbrojenia w elementach skręcanych, w niniejszym artykule podjęto próbę zastosowania modeli Strut and Tie (ST) do wymiarowania i kształtowania zbrojenia w zginanych i skręcanych belkach żelbetowych.

Stosowanie modeli kratownicowych do analizy sił wewnętrznych w konstrukcjach żelbetowych ma bardzo długą historię i znane jest od końca XIX. Za prekursorów praktycznego jej zastosowania w projektowaniu zarysowanych konstrukcji żelbetowych uważa się W. Rittera i E. Mörscha.

Unowocześnienie znanej metody kratownicowej w modelach Strut and Tie (ST) polega na zastosowaniu zasad teorii plastyczności, bazujących na twierdzeniu o dolnej granicy obciążenia konstrukcji oraz wykorzystaniu pewnych założeń dotyczących przekazywania się sił z prętów zbrojenia na beton. Twierdzenie o dolnej granicy obciążenia – metoda statyczna, stanowi, że największe spośród statycznie dopuszczalnych obciążeń i odpowiednio dopuszczalnych naprężeń jest mniejsze od obciążenia niszczonego. Korzystając z metody statycznej w ujęciu teorii nośności granicznej, otrzymujemy nośności mniejsze lub równe rzeczywistemu obciążeniu niszczeniowemu.

W metodzie ST rozpatruje się pola naprężeń spełniające wszystkie warunki równowagi, a następnie sprawdza się czy te pola są polami naprężeń bezpiecznych w całym obszarze konstrukcji. Zastosowanie twierdzenia o nośności granicznej rodzi potrzebę sprawdzania warunków równowagi sił wewnętrznych i zewnętrznych działających na konstrukcję, a obciążenia te muszą być bezpiecznie przenoszone przez elementy ustroju tworzącego model. Model ST składa się z rozciąganych prętów T, odwzorowujących zbrojenie rozciągane oraz ściskanych prętów S, odwzorowujących wyodrębnione obszary betonu ściskanego. Pręty S i T połączone są w odpowiednio ukształtowanych węzłach, umożliwiających zakotwienie zbrojenia rozciąganego i przeniesienie naprężeń ściskających.

Obszerny przegląd zagadnienia dotyczącego wykorzystania modeli kratownicowych w projektowaniu można znaleźć w pracy Schäfera i J. Schlaicha [1], a także w polskich opracowaniach autorstwa: W. Starosolskiego [2], A. Łapko i B.CH. Jensen [3], M.

Knauff [4] oraz Sz. Wolińskiego [5]. Projektowanie z zastosowaniem modeli ST znalazło się już w zaleceniach Eurokodu z 1991 roku [6]. W aktualnej wersji Eurokodu [7] podstawowe informacje można znaleźć w rozdziale 6.5 i załączniku J.

Zgodnie z zawartymi tam zaleceniami stosowanie modeli kratownicowych jest szczególnie uzasadnione w obszarach dwuosioowego rozkładu naprężeń, to jest krótkich wspornikach, narożach ram czy też strefach przypodporowych belek. Nie są to jednak metody rozpowszechnione, szczególnie w odniesieniu do elementów narażonych na skręcanie.

W niniejszym artykule analizowano wielkość i rozmieszczenie zbrojenia ortogonalnego wymaganego z uwagi na skręcanie i ścinanie żelbetowego elementu zarysowanego. Otrzymane za pomocą analizy ST zbrojenie porównano ze zbrojeniem wymaganym ze względu na ścinanie i skręcanie, uzyskanym na podstawie zależności zaproponowanych w punktach 6.2 i 6.3 PN-EN-1992-1-1 [7].

1. NOSNOŚĆ NA SKRĘCANIE WEDŁUG TEORII KLASTYCZNYCH ORAZ ZALECEŃ EUROKODU PN-EN-1992

Belka żelbetowa narażona na działanie momentu skręcającego, bez odpowiednio dobranego zbrojenia poprzecznego, ulegnie zniszczeniu z chwilą pojawienia się pierwszej spiralnej rysy obwodowej. Pierwsze rysy ukośne od skręcania w elementach o przekroju prostokątnym, pojawiają się z reguły na dłuższym boku, tam gdzie główne naprężenia rozciągające $\sigma_1 = \tau_{\max}$ najwcześniej osiągają wartość zbliżoną do wytrzymałości betonu na rozciąganie [9]. Pierwsze badania żelbetowych prętów o przekroju kołowym zostały przeprowadzone przez Mörscha w roku 1904. Późniejsze badania Bacha i Grafa w 1912 r obejmowały również przekroje prostokątne. E. Rausch w dyskretyzacji skręcanej belki żelbetowej (z 1929r), przyjął dla drugiej fazy pracy elementu model kratownicy przestrzennej, w którym ściskane krzyżulce są nachylone pod kątem 45o, zaś rozciągane odpowiadają kierunkowi wkładek stalowych. Jest to równoznaczne z założeniem, że po zarysowaniu w przejściu momentu skręcającego uczestniczy tylko zewnętrzna skorupa betonowa niezależnie czy jest to przekrój pełny czy skrzynkowy. Wymiarując zbrojenia na skręcanie wg. teorii Rauscha, przekroje pojedynczych prętów podłużnych i strzemion, można wyznaczyć z zależności (1) i (2):

$$a_{st} = \frac{T \cdot c_L}{2 \cdot A_j \cdot \sigma_{dop}} \quad (1)$$

$$a_s = \frac{T \cdot c_s}{2 \cdot A_j \cdot \sigma_{dop}} \quad (2)$$

gdzie:

a_{sl} , a_s – pole pojedynczych prętów podłużnych i strzemion,
 T – moment skręcający,
 c_L , c_s – rozstaw prętów podłużnych i strzemion,
 A_j – pole przekrój elementu wyznaczone w osiach strzemion,
 σ_{dop} – naprężenia dopuszczalne.

Lampert [8] na podstawie analiz wyników badań przeprowadzonych dla kratownicy przestrzennej doszedł do wniosku, że pręty podłużne usytuowane w narożach są „równoważne” tym, które rozmieszcza się po obwodzie. Idealizując model można przyjąć zbrojenie podłużne sprowadzone myślowo do czterech naroży.

Do wymiarowania skręcania w EC2 przyjęty został model St. Venanata, który w przekrojach pełnych jak i skrzynkowych zakłada powierzchniowy przepływ ścinania. Oznacza to, że w przekrojach pełnych, wewnętrzna strefa rdzenia przekroju nie bierze udziału w przenoszeniu obciążenia. Sprawdzenie nośności przekroju na skręcanie jest analogiczne do sprawdzenia nośności na ścinanie. Zgodnie z zaleceniem EC2, efekty skręcania i ścinania można superponować przyjmując te same wartości kąta nachylenia krzyżulców. Maksymalna nośność elementu jednocześnie skręcanego i ścinanego jest ograniczona przez nośność krzyżulców betonowych i należy spełnić warunek (3):

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}} + \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \leq 1 \quad (3)$$

gdzie:

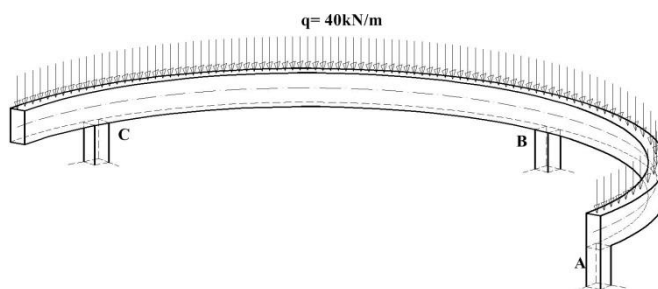
T_{Ed} , V_{Ed} – obliczeniowy moment skręcający i siła poprzeczna,
 $T_{Rd,max}$, $V_{Rd,max}$ – maksymalna nośność obliczeniowa na skręcanie i ścinanie.

W punkcie 6.5 PN-EN-1992-1-1 [7] zaproponowano alternatywną metodę wymiarowania elementów żelbetonowych tzw. metodę ST. W metodzie tej na podstawie otrzymanych sił osiowych z przestrzennego modelu kratownicy zastępczej, należy tak dobrać wymiary elementów ściskanych i zbrojenie w elementach rozciąganych, aby spełnione były warunki nieprzekroczenia naprężeń granicznych w betonie i stali oraz w węzłach w zależności od ich typu.

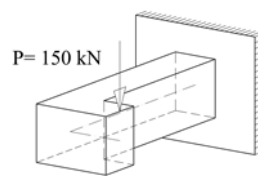
2. ANALIZOWANE PRZYKŁADY

Przedmiotem analizy były dwa podciąg o różnym kształcie

i obciążeniu, przedstawione na rysunku 1 i 2

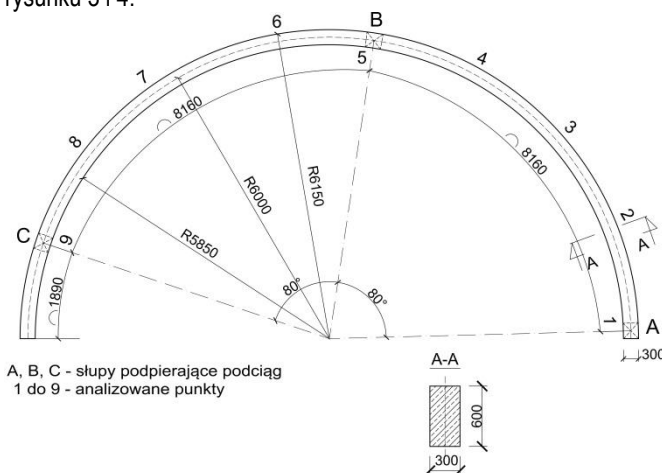


Rys. 1 Analizowane podciąg dwuprzęsłowy zakrzywiony w planie, obciążony równomiernie



Rys. 2 Analizowane wspornikowy, obciążony mimośrodowo siłą skupioną

Podciąg zaprojektowano z betonu klasy C25/30, zbrojone stalą RB 500SP. Szczegółowe wymiary, przekrój poprzeczny oraz zaznaczone analizowane przekroje na podciągach przedstawiono na rysunku 3 i 4.



A, B, C - słupy podpierające podciąg
 1 do 9 - analizowane punkty

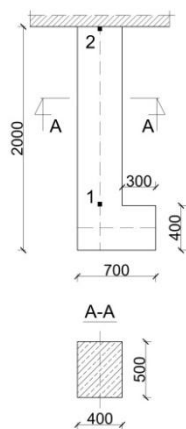
Rys. 3. Rzut z góry i przekrój - podciąg dwuprzęsłowy

Tab.1. Zbrojenie fragmentu podciągu dwuprzęsłowego, nachylenia krzyżulców ściskanych pod kątem 45°

Nr przekroju	Momenty		Wymagane zbrojenie wg. przypadku				Przyjęte zbrojenie	
	zginający [kNm]	skręcający [kNm]	zginanie [cm²]	ściananie [cm²/m]	skręcanie		podłużne	strzemiona
					strzemiona [cm²/m]	zb.podłużne [cm²]		
1	217,3	13,1	10,13	7,40	3,12	2,18	3 φ20 + 3 φ12	φ8 co 9 cm
2	0	33,5	0	4,28	7,98	5,58	2 φ20 + 5 φ12	φ8 co 8 cm
3	125,2	0	5,87	0	0	0	2 φ20	-

Tab.2. Zbrojenie fragmentu podciągu dwuprzęsłowego, nachylenia krzyżulców ściskanych pod kątem 30°

Nr przekroju	Wymagane zbrojenie wg. przypadku				Przyjęte zbrojenie	
	zginanie [cm²]	ściananie [cm²/m]	skręcanie		podłużne	strzemiona
			strzemiona [cm²/m]	zb.podłużne [cm²]		
1	10,13	4,05	1,80	3,60	3 φ20 + 4 φ12	φ8 co 17 cm
2	0	2,47	4,61	9,65	2 φ20 + 9 φ12	φ8 co 14 cm
3	5,87	0	0	0	2 φ20	-



1, 2 - analizowane przekroje

Rys. 4. Rzut z góry i przekrój - podciąg wspornikowy

Wymagane zbrojenie na zginanie, ścinanie i skręcanie wyznaczone zgodnie z algorytmem podanym w pkt.6.2 i 6.3 [7], zestawiono w tabelach. Dla podciagu dwuprzęsłowego z uwagi na powtarzalność sił przekrojowych, szczególne obliczenia wymaganego zbrojenia przedstawiono tylko dla fragmentu. W tabeli 1 i 2 zestawiono wymagane zbrojenia przyjmując różne nachylenia krzyżulców ściskanych, odpowiednio pod kątem 45° i 30° oraz momenty zginające i skręcające w analizowanych przekrojach 1 i 2.

W tabeli 3 zestawiono wynik dla podciagu wspornikowego i nachylenia krzyżulców ściskanych pod kątem 45°.

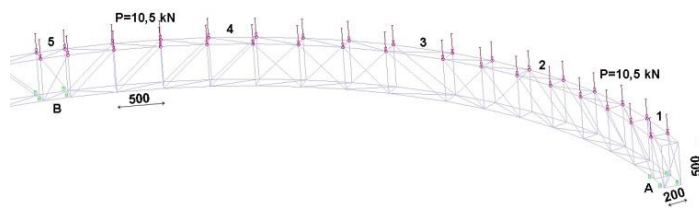
Tab.3. Zbrojenie podciagu wspornikowego

Nr przekroju	Wymagane zbrojenie wg. przypadku				Przyjęte zbrojenie	
	zginanie [cm ²]	ściananie [cm ² /m]	skręcanie		podłużne	strzemiona
			strzemiona [cm ² /m]	zb.podłużne [cm ²]		
1	1,59	8,81	17,48	12,05	1φ20 + 6 φ16	φ12 co 8,5cm
2	14,78				5 φ20 + 6 φ16	

3. MODELE ST ANALIZOWANYCH PODCIAGÓW

3.1. Podciąg dwuprzęsłowy

Analizowano dwa modele kratownicowe podciagu dwuprzęsłowego. Model 1 stanowiła kratownica przestrzenna nawiązująca kształtem do kratownicy Leonhardta, w której ściskane krzyżulce betonowe wydzielone rysami ukośnymi są na każdym boku pionowym i poziomym nachylone do osi pręta pod kątem 45o. Pręty pionowe kratownicy to rozciągane zbrojenie, odwzorowujące w belkach zbrojenie strzemionami. Pas górny i pas dolny kratownicy to odpowiednio zbrojenie rozciągane i ściskane pasy betonowe. Schemat kratownicy i obciążenie węzłowe, przedstawia rysunek 5.



Rys. 5. Fragment modelu kratownicy 1-podciagu dwuprzęsłowego

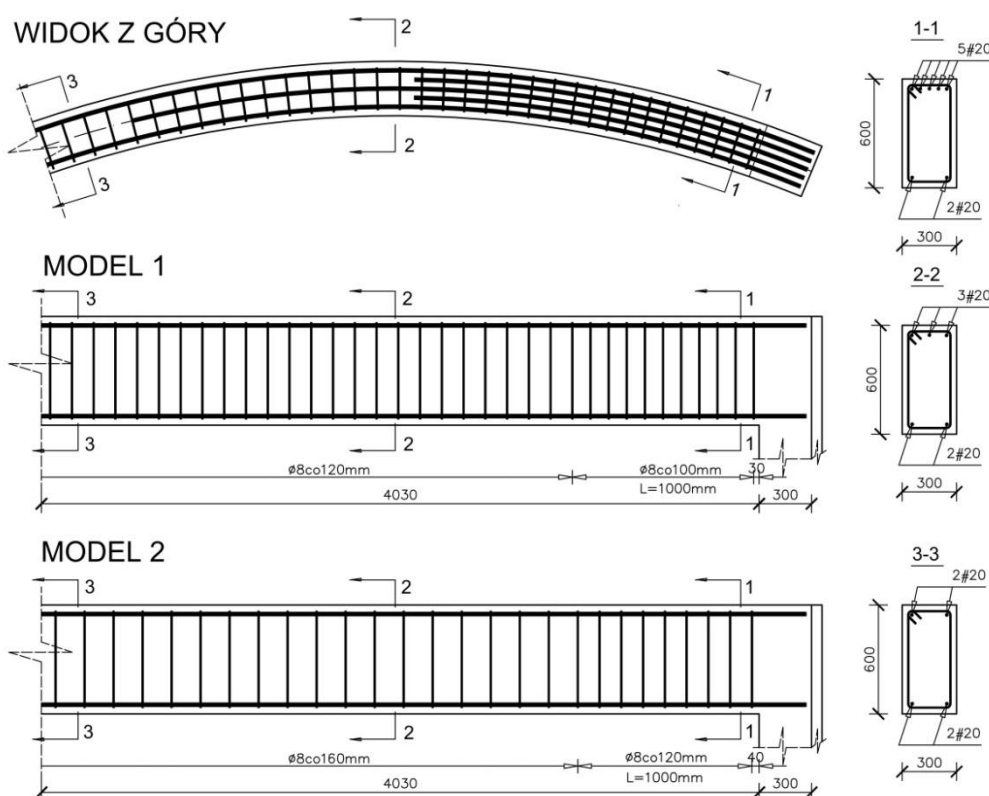
W modelu 2 kratownicy przestrzennej ściskane krzyżulce betonowe przyjęto nachylone do osi pręta pod kątem 30°.

Wymagane zbrojenie niezbędne do przeniesienia sił rozciągających wyznaczono z zależności (4):

$$A_s = \frac{T}{f_{yd}} \quad (4)$$

gdzie T- siła rozciągająca w elemencie kratownicy.

Zbrojenie fragmentu podciagu obejmującego przekroje 1 do 3 (tj. połowę przęsła AB), dla analizowanych przestrzennych modeli ST, przedstawiono na rysunku 6.



Rys. 6. Wymagane zbrojenie podciagu otrzymane na podstawie analizowanych modeli ST

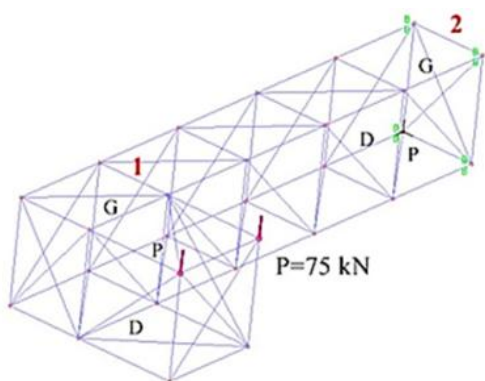
Sprawdzenie naprężeń granicznych w prętach ściskanych, przeprowadzono przyjmując grubość elementu -b, równą: $b = t_{ef,i} = Au = 60 \cdot 302 \cdot (60 + 30) = 10 \text{ cm}$.

Obliczenia przeprowadzono wg pkt.3.2. Maksymalna siła ściskająca w krzyżulcu, dla modelu 2 wynosi: $N_{21} = 301,8 \text{ kN}$.

$$\sigma_{c60} = \frac{301,8 \cdot 10^3}{500 \cdot 100} = 6,04 \text{ MPa} < \sigma_{Rd,max} = 9,43 \text{ MPa}.$$

3.2. Podciąg wspornikowy

W tym przypadku analizowano tylko jeden model kratownicy przestrzennej, w której ściskane krzyżulce betonowe przyjęto nachylone do osi pręta pod kątem 45°. Pręty pionowe kratownicy to rozciągane zbrojenie odpowiadające strzemionom w belkach żelbetowych. Schemat kratownicy i obciążenie węzłowe, przedstawia rysunek 7.



Rys. 7. Model kratownicy podciagu wspornikowego, D,G,P – elementy w których wystąpiły maksymalne siły rozciągające dla przekroju 1 i 2

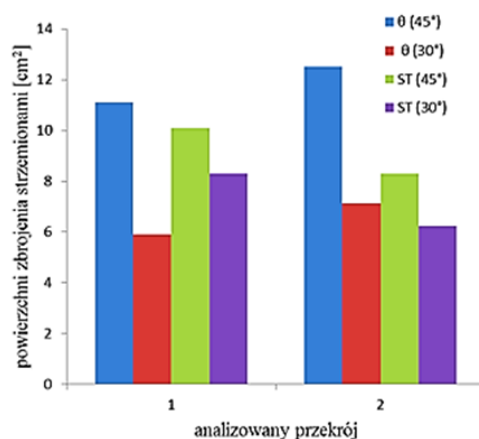
Wymagane zbrojenie w dwóch analizowanych przekrojach 1 i 2, wyznaczone na podstawie maksymalnych sił rozciągających w pasie górnym, dolnym, prętach pionowych i poziomych kratownicy zestawiono w tabeli 4.

Tab.4. Zbrojenie podciagu wspornikowego na podstawie modelu ST

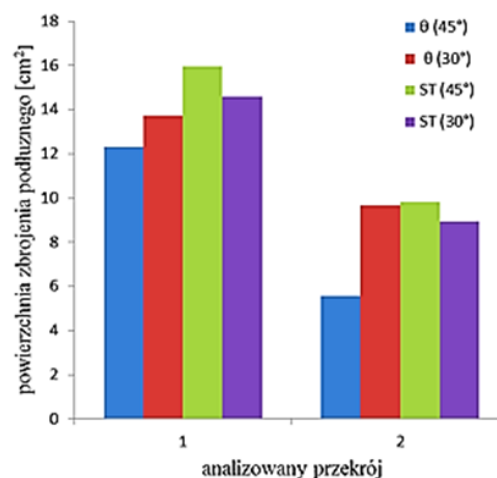
Nr prze kroju	Wymagane zbrojenie w elemencie [cm ²]			Przyjęte zbrojenie		
	Pas górny	Pas dolny	Pręt pionowy lub poziomy	Pas górny	Pas dolny	Pręt pionowy i poziomy
1	11,23	14,78	28,05	6 φ16	7 φ16	φ12 co 8,0 cm
2	29,76	13,70	20,82	5 φ20 +6 φ16	7 φ16	φ12 co 10,5 cm

4. ANALIZA WYNIKÓW I WNIOSKI KOŃCOWE

Wymagany rozstaw strzemion i pole powierzchni zbrojenia podłużnego w analizowanych przekrojach podciagu dwuprzęsłowego, przedstawiono na rysunku 8 i 9.



Rys. 8. Powierzchnia zbrojenia strzemionami w przekrojach 1 i 2 dla analizowanych modeli obliczeniowych



Rys.9. Powierzchnia zbrojenia podłużnego w przekrojach 1 i 2 dla analizowanych modeli obliczeniowych

Zbilansowana na odcinku długości 1m od podpory A (przekrój 1) powierzchnia zbrojenia jest zgodna z teorią nośności granicznej, oszacowane na podstawie modeli ST zbrojenie jest większe i wynosi odpowiednio:

- wymiarowanie wg pkt.6.2 i 6.3 [7]:
nachylenie krzyżulców 45° – $A = 22,73 \text{ cm}^2/\text{m}$,
nachylenie krzyżulców 30° – $A = 19,58 \text{ cm}^2/\text{m}$,
- wymiarowanie wg pkt.6.5 [7] – ST:
nachylenie krzyżulców 45° – $A = 26,90 \text{ cm}^2/\text{m}$,
nachylenie krzyżulców 30° – $A = 20,10 \text{ cm}^2/\text{m}$.

Odmierna sytuacja występuje dla przekroju 2, w którym dominuje moment skręcający i jednocześnie działa siła poprzeczna. Otrzymane wyniki nie są zgodne z powszechnie panującym poglądem, że oszacowanie na podstawie modeli ST jest bezpieczniejsze, a graniczna nośność elementu jest mniejsza. Zbilansowane na odcinku długości 1m zbrojenie, wynosi odpowiednio:

- wymiarowanie wg pkt.6.2 i 6.3 [7]:
nachylenie krzyżulców 45° – $A = 17,84 \text{ cm}^2/\text{m}$,
nachylenie krzyżulców 30° – $A = 15,73 \text{ cm}^2/\text{m}$,
- wymiarowanie wg pkt.6.5 [7] – ST:
nachylenie krzyżulców 45° – $A = 15,70 \text{ cm}^2/\text{m}$,
nachylenie krzyżulców 30° – $A = 12,20 \text{ cm}^2/\text{m}$.

Wymagane zbrojenie w przekroju 2, wyznaczone na podstawie modeli ST, w każdym z analizowanych przypadków jest mniejsze od wyznaczonego zgodnie z punktem 6.3 [7].

Dla podciagu wspornikowego otrzymane zbilansowane zbrojenie dla pasma 1 m, w analizowanych przekrojach 1 i 2 wynosi:

- wymiarowanie wg pkt.6.2 i 6.3 [7]:
przekrój 1 – $A = 39,93 \text{ cm}^2/\text{m}$,
przekrój 2 – $A = 53,12 \text{ cm}^2/\text{m}$,
- wymiarowanie wg pkt.6.5 [7] – ST:
przekrój 1 – $A = 54,06 \text{ cm}^2/\text{m}$,
przekrój 2 – $A = 64,12 \text{ cm}^2/\text{m}$.

Otrzymane wyniki dla analizowanych modeli ST podciągów skręcanych są potwierdzeniem znanego spostrzeżenia, że sposób zbrojenia (układ prętów) wymusza określony przepływ sił wewnętrznych w elemencie żelbetowym, determinując tym samym morfologię rys, zgodnie z oczekiwaniem projektanta elementu. W przekroju 2 dla podciągu zakrzywionego w planie, nie potwierdziła się powszechnie panująca opinia, że oszacowanie na podstawie modeli ST prowadzi zawsze do większej powierzchni zbrojenia. Rzeczywiście w dwóch analizowanych przypadkach tak jest, ale dla podciągu dwuprzęsłowego i przekroju 2 wynik jest odmienny.

Istotna różnica w powierzchni zbrojenia wyznaczonej na podstawie punktu 6.2 i 6.3 oraz 6.5 [7] występuje dla przekroju 1 podciągu wspornikowego. Zbrojenie wyznaczone modelem ST jest o około 70% większe.

Przedstawione symulacje numeryczne są wstępem do analizy zagadnienia projektowania elementów skręcanych i ścinanych z wykorzystaniem metody ST. Podsumowując przeprowadzone analizy można stwierdzić, że w zależności od przyjętego algorytmu wymiarowania, rozkład zbrojenia będzie różny i różna będzie jego powierzchnia. Czy bardziej racjonalny, na to pytanie trudno w tej chwili jednoznacznie odpowiedzieć. Zdaniem autorki, odpowiedź, musi być poprzedzona przeprowadzeniem dalszych prac tj. analiz numerycznych i badań laboratoryjnych elementów projektowanych zgodnie z pkt.6.2 i 6.3 [7] oraz metodą ST.

BIBLIOGRAFIA

1. Schlaich J., Schafer K. The Design of Structural Concrete. IABSE Workshop, New Delhi, 1993.
2. Starosolski W., Konstrukcje żelbetowe według Eurokodu 2 i norm powiązanych, tom 3, PWN, Warszawa 2012.
3. Łapko A, Jensen B, Ch. „Podstawy projektowania i algorytmu obliczeń konstrukcji żelbetowych” Arkady, Warszaw 2005.
4. Knauff M., Obliczanie konstrukcji żelbetowych według Eurokodu 2, PWN, Warszawa 2012.
5. Woliński Sz.; Wspomagana badaniami analiza konstrukcji żelbetowych za pomocą modeli ST, Zeszyty Naukowe Politechnik Rzeszowskiej, Budownictwo i Inżynieria Środowiska, z.57, t.2.2010,
6. ENV-1992-1-1:1991: Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1-1.
7. PN-EN-1992-1-1: 2008 : Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu . Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
8. Godycki-Ćwirko T. „Mechanika betonu”, Arkady, Warszawa 1982,
9. Lampert P. “Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung. Diss. ETH, Zurich 1970.

ST MODELS FOR RC BEAMS IN BENDING AND TORSION

Abstract

In accordance with the recommendations of PN - EN- 1992-1-1 the use of ST models is particularly justified in the areas of biaxial stress distribution, that is short cantilever, frames corners or shear zones of beams. However, these are not common methods, particularly as far as torsion elements are concerned. This article is an attempt to use three –dimensional ST models for design of RC beams in torsion. The reinforcement obtained by the analysis of ST models has been compared with the reinforcement obtained on the basis of the relationship proposed in Sections 6.2 and 6.3 EC2

Autorzy:

dr inż. **Lidia Buda-Ożóg** – Politechnika Rzeszowska, Katedra Konstrukcji Budowlanych.