

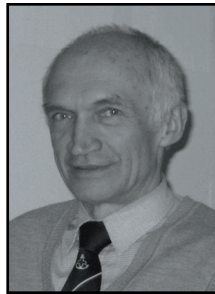
Andrzej MUCIEK

POLITECHNIKA WROCLAWSKA, KATEDRA METROLOGII ELEKTRONICZNEJ I FOTONICZNEJ
UL. B.PRUSA 53/55, 50-317 WROCLAW

Metoda precyzyjnego pomiaru wartości skutecznej sygnałów okresowych oparta na rekonstrukcji sygnału z próbek integracyjnych

Dr hab. Andrzej Konstanty MUCIEK

Urodził się w 1943 r. w Należowie; mgr inż. elektroniki 1969 r., mgr matematyki 1974 r., dr nauk technicznych. 1975 r., dr hab. 1987 r., prof. ndzw. 1992.; Autor 76 publikacji, 1 książki; prowadził badania naukowe w National Institute of Standards and Technology, USA 1985-1986, Physikalische Technische Bundesanstalt, RFN 1992-1994, Istituto Elettrotecnico Nazionale, Włochy 1995.



e-mail: andrzej.muciek@pwr.wroc.pl

Streszczenie

Przedstawiono podstawy próbkowania integracyjnego. Podano sposób estymacji współczynników szeregu Fouriera z próbek integracyjnych oparty na metodzie najmniejszych kwadratów. Estymowane wartości pozwalają na wyznaczenie wartości skutecznej badanego sygnału. Opracowano metodę korekcji estymatorów współczynników w której wykorzystywany jest precyzyjny pomiar wartości średniej wyprostowanego sygnału. Wykazano, że pozwala to na znaczną poprawę dokładności wyznaczania wartości skutecznych sygnałów okresowych.

Słowa kluczowe: rekonstrukcja sygnału, pomiar wartości skutecznej, estymacja parametrów.

A Method for Precise Determination of rms Values of Periodic Signals Based on Signal Reconstruction from Integrative Samples

Abstract

Fundamentals of integrative sampling are presented. Estimation of Fourier coefficients from samples using the method of least squares is given. These estimates are used in the next step, to estimate the rms value. A method for correction of estimated coefficients based on precise measurement of the signal rectified average value is proposed. It is proved that such procedure increases significantly accuracy of rms estimation.

Keywords: signal reconstruction, rms measurement, parameter estimation.

1. Wprowadzenie

Najdokładniejsze pomiary wartości skutecznych sygnałów okresowych małej częstotliwości wykonywane są za pomocą systemów opartych na napięciowych przetwornikach termicznych. Pozwalają one na pomiar wartości skutecznych z dokładnością na poziomie 1 ppm [1,2]. Jednakże systemy oparte na tych przetwornikach mają szereg wad, które ograniczają ich zastosowanie: są wrażliwe na przeciążenia, mają niewystarczającą bezwładność termiczną w zakresie niskich częstotliwości i są bardzo drogie. Dlatego pojawiają się coraz częściej próby zastosowania techniki próbkowania wspartej optymalnymi

metodami estymacji [1-3]. Szczególnie obiecujące jest wykorzystanie próbek integracyjnych.

W artykule przedstawiono podstawy próbkowania integracyjnego i jego zastosowanie do rekonstrukcji sygnałów okresowych opartej na metodzie najmniejszych kwadratów. Ponadto zaproponowano metodę korekcji estymatorów współczynników zrekonstruowanego sygnału wykorzystującą precyzyjny pomiar wartości średniej sygnału wyprostowanego oraz metodę estymacji z równaniami więzów. Przeanalizowano dokładność korekcji dla niektórych ważnych sygnałów i wykazano, że można w ten sposób znacznie poprawić dokładność wyznaczenia wartości skutecznej i innych parametrów sygnału.

2. Sformułowanie problemu

Niech $s(t)$ będzie badanym sygnałem okresowym o ograniczonym paśmie. Sygnał ten można przedstawić w formie skończonego szeregu Fouriera

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^K [a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)], \quad (1)$$

gdzie $\omega = 2\pi f$, $f = 1/T$ jest częstotliwością, a T okresem badanego sygnału. Celem badań jest określenie wartości skutecznej (rms) sygnału $s(t)$. Procedura składa się z dwóch kroków, w pierwszym współczynniki a_0 , a_k oraz b_k , $k = 1, \dots, K$, są estymowane z próbek integracyjnych, a w drugim wartość skuteczna wyznaczana jest ze wzoru

$$rms = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (a_k^2 + b_k^2)}. \quad (2)$$

Proces rekonstrukcji sygnału $s(t)$ polega na estymacji współczynników a_0 , a_k , b_k , $k = 1, 2, \dots, K$. Może wystąpić wiele różnych sytuacji praktycznych, np. znana lub nieznaną częstotliwość sygnału $s(t)$ oraz znane lub nieznaną pasmo sygnału. Do estymacji parametrów możemy stosować jedną z dwóch metod dyskretną transformatę Fouriera lub metodę najmniejszych kwadratów (NK). W pierwszym przypadku, występuje szereg ograniczeń: próbkowanie powinno być równomierne, a okno czasowe powinno być wielokrotnością okresu próbkowania. Ogranicza to znacznie zastosowanie tej metody. Zaletą jej jest prostota i duża szybkość obliczeń, którą uzyskuje się dzięki algorytmom szybkiej transformaty Fouriera. Druga z metod, NK, nie ma tak silnych ograniczeń (np. próbkowanie może być zarówno ze stałym jak i zmiennym odstępem czasowym) charakteryzuje się jedynie większą złożonością obliczeń numerycznych, która w analizowanym problemie odgrywa raczej drugorzędną rolę, dlatego w dalszej części będzie wykorzystywana metoda NK.

Liczba estymowanych współczynników a_k i b_k wynosi $2K+1$. Stąd liczba pobranych próbek N powinna spełniać warunek $N > 2K+1$. Przedstawimy obecnie podstawowe definicje i własności próbkowania integracyjnego.

3. Próbkowanie integracyjne

W klasycznym próbkowaniu mierzona jest wartość sygnału $s(t)$ w ustalonym momencie $t = t_n$. Sygnał zmienia się w czasie, więc wyznaczenie jego wartości w określonym momencie wymaga jak najkrótszego czasu konwersji. Jednakże im dokładniejszy jest przetwornik AC tym dłuższy jest jego czas konwersji. Dlatego zwykle stosuje się układy śledząco-pamiętające, których celem jest zapamiętanie w określonym momencie wartości sygnału i utrzymanie jej na czas przetwarzania. Układy te jednak są źródłem znacznych błędów, co jest szczególnie niedogodne w pomiarach sygnałów małych częstotliwości. Pogliano [1,2] zaproponował zastosowanie próbek integracyjnych, które pozwalają na wyeliminowanie układów śledząco-pamiętających, przy jednoczesnym utrzymaniu relatywnie długich czasów przetwarzania.

Próbka integracyjna w momencie $t = t_n$ określona jest wzorem

$$s_a(t_n) = \frac{1}{T_a} \int_{t_n - T_a/2}^{t_n + T_a/2} s(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

gdzie T_a jest *czasem integracji*. Tak więc próbka integracyjna $s_a(t_n)$ w punkcie t_n jest równa wartości średniej sygnału $s(t)$ w przedziale $\langle t_n - T_a/2, t_n + T_a/2 \rangle$ o szerokości T_a położonym symetrycznie względem punktu t_n . Zwykle stosowane jest próbkowanie równomierne z odstępem T_s , wtedy $t_n = nT_s$. Zauważmy, że gdy czas integracji dąży do zera, $T_a \rightarrow 0$, wtedy próbka integracyjna staje się próbką punktową.

4. Rekonstrukcja sygnału z próbek

Próbka integracyjna, $s_a(t_n)$, różni się, na ogół, od wartości sygnału w punkcie t_n , $s_a(t_n) \neq s(t_n)$. Podstawiając we wzorze (3) zamiast $s(t)$ jego reprezentację określoną przez szereg Fouriera (1), po przekształceniach otrzymuje się wyrażenie

$$s_a(t_n) = a_0 + \sum_{k=1}^K [a_k \text{sinc}(k\theta) \cos(k\omega t_n) + b_k \text{sinc}(k\theta) \sin(k\omega t_n)] \quad (4)$$

określające n -tą próbkę integracyjną, w którym $\theta = \pi(T_a/T)$ jest względnym czasem integracji odniesionym do okresu T badanego sygnału, natomiast $\text{sinc}(\alpha) = \text{sin}(\alpha)/\alpha$, gdy $\alpha \neq 0$, oraz $\text{sinc}(0) = 1$. Wzór (4) przypomina rozwinięcie w szereg Fouriera, z tą różnicą, że współczynniki a_k oraz b_k mnożone są przez funkcję $\text{sinc}(k\theta)$. Zauważmy, że wartość tej funkcji nie zależy od punktu próbkowania i jest znana jeśli znana jest częstotliwość sygnału mierzzonego f oraz czas całkowania T_a .

Użyteczne w dalszej analizie będzie wprowadzenie *transformowanych współczynników* zdefiniowanych za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0, \\ \alpha_k(\theta) &= a_k \text{sinc}(k\theta), \\ \beta_k(\theta) &= b_k \text{sinc}(k\theta), \quad k = 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (5)$$

Wykorzystując transformowane współczynniki we wzorze (4) otrzymuje się następującą użyteczną do estymacji zależność

$$s_a(t_n) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^K [\alpha_k(\theta) \cos(k\omega t_n) + \beta_k(\theta) \sin(k\omega t_n)]. \quad (6)$$

Wzór ten posiada odpowiednią postać do estymowania wartości transformowanych współczynników, α_k oraz β_k i następnie do wyznaczenia estymatorów "zwykłych" współczynników a_k oraz b_k szeregu Fouriera.

Zauważmy, że gdy względne czasy próbkowania równają się zeru, $\theta = 0$, wtedy współczynniki transformowane są równe zwykłemu współczynnikom Fouriera tj $\alpha_k = a_k$ oraz $\beta_k = b_k$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia estymatorów transformowanych współczynników z próbek metodą NK. Wybór wariantu metody NK jest zależny od błędów próbek integracyjnych. Rozpatrzmy typową i najprostszą sytuację "pomiarów jednakowej dokładności", gdy próbki integracyjne są obciążone losowymi błędami addytywnym

$$s_n = s_a(t_n) + \Delta_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

gdzie $s_a(t_n)$ reprezentuje dokładne wartości próbek addytywnych w punktach $t = t_n$, natomiast Δ_n reprezentuje losowe błędy transformacji. Założymy, że błędy Δ_n (i zarazem próbki s_n) spełniają następujące warunki: nie są obciążone błędem systematycznym, $E[\Delta_n] = 0$; mają tę samą wariancję $\text{var}[\Delta_n] = \sigma^2$ oraz nie są skorelowane $\text{cov}[\Delta_n, \Delta_k] = 0$ jeśli $n \neq k$, gdzie $E[\cdot]$ jest wartością oczekiwaną $\text{var}[\cdot]$ wariancją, natomiast $\text{cov}[\cdot]$ kowariancją. Przy powyższych założeniach estymatory NK otrzymuje się minimalizując następującą sumę kwadratów [3]

$$Q = \sum_{n=1}^N \left[s_n - \left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^K [\alpha_k(\theta) \cos(k\omega t_n) + \beta_k(\theta) \sin(k\omega t_n)] \right) \right]^2, \quad (7)$$

która po wprowadzeniu notacji macierzowej może być zapisana w prostej postaci

$$Q = (s - Xa)^T (s - Xa), \quad (8)$$

gdzie

$s = [s_0, s_1, \dots, s_{N-1}]^T$ jest wektorem próbek integracyjnych,
 $a = [\alpha_0, \alpha_1(\theta), \dots, \alpha_K(\theta), \beta_1(\theta), \dots, \beta_K(\theta)]^T$ jest wektorem transformowanych współczynników,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \cos \omega t_1 & \dots & \cos K \omega t_1 & \sin \omega t_1 & \dots & \sin K \omega t_1 \\ 1 & \cos \omega t_2 & \dots & \cos K \omega t_2 & \sin \omega t_2 & \dots & \sin K \omega t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos \omega t_N & \dots & \cos K \omega t_N & \sin \omega t_N & \dots & \sin K \omega t_N \end{bmatrix}$$

jest macierzą eksperymentu; symbol T oznacza transpozycję.

Zalóżmy, dalej, że częstotliwość podstawowa sygnału f jest znana. Jeśli macierz eksperymentu X ma pełny rząd to estymatory NK $\hat{\alpha}_k(\theta)$ i $\hat{\beta}_k(\theta)$, $k=1, \dots, K$, transformowanych współczynników określone są wzorem [4]

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T s. \quad (9)$$

Wykorzystując równania (5) znajdujemy estymatory zwykłych współczynników Fouriera

$$\hat{a}_0 = \hat{\alpha}_0, \quad \hat{a}_k = \hat{\alpha}_k / \text{sinc}(k\theta), \quad \hat{b}_k = \hat{\beta}_k / \text{sinc}(k\theta), \quad k=1, \dots, K,$$

a po ich podstawieniu do wzoru (1) otrzymuje się zrekonstruowany sygnał $\hat{s}(t)$, a ze wzoru (2) ocenę wartości skutecznej sygnału $s(t)$.

Jak już wspomniano wyżej, wraz ze wzrostem czasu przetwarzania T_a , błąd przetwornika maleje. Jednak nie można tego czasu zwiększać swobodnie, gdyż argument wyrażenia $\text{sinc}(k\theta)$ zależy czasu integracji T_a , a funkcja sinc może przyjąć zerowe wartości co uniemożliwia obliczenie estymatorów

współczynników Fouriera ze wzoru (5). Najprostszym sposobem uniknięcia takiej sytuacji jest przyjęte przez Pogliano [1] założenie, że wszystkie wartości argumentów $k\theta$, $k=1, \dots, K$, funkcji $\text{sinc}(k\theta)$ leżą w obrębie jej "listka głównego" a z tego założenia otrzymuje się następujące ograniczenie czasu integracji

$$T_a < TK. \quad (10)$$

Ten warunek może być stosowane jedynie dla sygnałów mało zniekształconych (małe K) i o małej częstotliwości (duże T).

Są również inne metody zwiększenia czasu integracji pozwalające uniknąć warunku (10). Jedną z nich polega na takim dobrze wartości czasu integracji T_a , aby argumenty $k\theta$ określone dla kolejnych wartości k przeplatały się zerami funkcji $\text{sinc}(k\theta)$. Inna metoda, polega na sekwencyjnym wyznaczaniu współczynników Fourier w grupach i doborze czasu integracji dla każdej grupy oddzielnie. Stosowanie wymienionych metod wymaga analizy optymalizacyjnej i leży poza zakresem rozważań prezentowanych w artykule.

5. Korekcja rekonstruowanego sygnału

Stosując precyzyjny integracyjny przetwornik AC możliwy jest bardzo dokładny pomiar wartości średniej sygnału wyprostowanego (rsa) – oznaczenie to pochodzi od angielskiego terminu *rectified signal average* – zdefiniowanej wzorem

$$rsa(s(t)) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T |s(t)| dt. \quad (11)$$

Przy pomiarze wartości rsa można niemal swobodnie wydłużać czas przetwarzania T_a , o ile utrzymany jest warunek, że jest on wielokrotnością okresu sygnału, $T_a = kT$. W ten sposób wynik pomiaru s_A wartości rsa może być znacznie dokładniejszy niż zwykle próbki integracyjne, a więc dokładniejszy niż wynik rekonstrukcji sygnału. To otwiera możliwość poprawy dokładności rekonstrukcji poprzez korektę estymatorów współczynników szeregu Fouriera i poprawę dokładności wyznaczania wartości skutecznej. Rozważmy teraz ten problem.

Błędy próbkowania powodują, że wartość średnia po wyprostowaniu, $rsa(\hat{s}(t))$, zrekonstruowanego sygnału $\hat{s}(t)$ jest różna od mierzonej wartości $s_A = rsa(s(t)) + \Delta$, gdzie Δ jest błędem pomiaru pomijalnie małym w porównaniu z błędem próbkowania. Jest więc sensowne, aby skorygować estymatory współczynników szeregu Fouriera tak, aby otrzymany w ten sposób *skorygowany sygnał* $\hat{s}_c(t)$ spełniał równanie

$$rsa(\hat{s}_c(t)) = rsa(s(t)). \quad (12)$$

Korekcję można przeprowadzić stosując metodę NK z równaniami więzów [4]. Założymy przy tym, że sygnał $s(t)$: nie jest mocno zniekształcony, przechodzi przez początek układu współrzędnych, $s(0) = 0$ a ponadto spełnia warunek

$$s(t) \geq 0 \text{ dla } t \in \langle 0, T_0 \rangle \text{ oraz } s(t) \leq 0 \text{ dla } t \in \langle T_0, T \rangle.$$

Warunki te nie ograniczają w istotny sposób klasy rozważanych sygnałów, a znacznie upraszczają analizę. Dla tych sygnałów wartość rsa określona jest wzorem

$$rsa(s(t)) = \frac{1}{T} \left(\int_0^{T_0} s(t) dt - \int_{T_0}^T s(t) dt \right). \quad (13)$$

Podstawiając rozwinięcie sygnału $s(t)$ określone wzorem (1) do (13), po przekształceniach, otrzymuje się równanie

$$rsa(s(t)) = a_0 \left(\frac{\theta_0}{\pi} - 1 \right) + \sum_{k=1}^K \left[\frac{a_k}{\pi k} \sin(k\theta_0) + \frac{b_k}{\pi k} (1 - \cos(k\theta_0)) \right], \quad (14)$$

gdzie $\theta_0 = 2\pi(T_0/T)$ jest względną długością części dodatniej sygnału. Ważną własnością równania (14) jest liniowa zależność wartości $rsa(s(t))$ od współczynników szeregu Fouriera $a_0, a_1, \dots, a_K, b_1, \dots, b_K$. Zastępując te współczynniki ich transformacjami $\alpha_k(\theta)$ i $\beta_k(\theta)$, wzór (5), otrzymujemy

$$rsa(s(t)) = \alpha_0 \left(\frac{\theta_0}{\pi} - 1 \right) + \sum_{k=1}^K \left[\frac{\alpha_k(\theta)}{\pi k} \frac{\sin(k\theta_0)}{\text{sinc}(k\theta)} + \frac{\beta_k(\theta)}{\pi k} \frac{(1 - \cos(k\theta_0))}{\text{sinc}(k\theta)} \right] \quad (15)$$

Jeśli zdefiniujemy wektor

$$\mathbf{Z} = \left[\frac{\theta_0}{\pi} - 1, \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\theta_0)}{\text{sinc}(\theta)}, \dots, \frac{1}{\pi K} \frac{\sin(K\theta_0)}{\text{sinc}(K\theta)}, \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos(\theta_0)}{\text{sinc}(\theta)}, \dots, \frac{1}{\pi K} \frac{1 - \cos(K\theta_0)}{\text{sinc}(K\theta)} \right] \quad (16)$$

wtedy równanie (15) można zapisać w wektorowej formie

$$rsa(s(t)) = \mathbf{Z}\mathbf{a}. \quad (17)$$

Estymatory $\hat{\mathbf{a}}_c$ skorygowanych współczynników można otrzymać poprzez minimalizację różnicowej sumy kwadratów Q , wzór (8), przy warunku, że spełniają one równanie więzów (17). Estymatory te wyznaczymy stosując metodę mnożników Lagrange'a [4]. Skąd po przekształceniach otrzymuje się [3]

$$\hat{\mathbf{a}}_c = \hat{\mathbf{a}} + corr = \hat{\mathbf{a}} + \frac{rsa(s(t)) - \mathbf{Z}\hat{\mathbf{a}}}{\mathbf{Z}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{Z}^T} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{Z}^T, \quad (18)$$

gdzie $\hat{\mathbf{a}}$ jest wektorem estymatorów transformowanych współczynników (9). Tak więc wektor skorygowanych współczynników jest równy sumie estymatorów przed korektą i członu korekcyjnego $corr$. Człon ten jest proporcjonalny do różnicy $rsa(s(t)) - \mathbf{Z}\hat{\mathbf{a}}$, gdzie $\mathbf{Z}\hat{\mathbf{a}} = rsa(\hat{s}(t))$. W sytuacjach praktycznych nie jest znana dokładna wartość $rsa(s(t))$ i zastępuje się ją odpowiednio dokładnym wynikiem pomiaru s_A . Człon korekcyjny jest więc proporcjonalny do różnicy między wynikiem pomiaru s_A a wartością średnią zrekonstruowanego sygnału.

Po podstawieniu skorygowanych estymatorów $\hat{\mathbf{a}}_c$ do wzoru (1) otrzymuje się skorygowaną reprezentację sygnału $\hat{s}_c(t)$ a po podstawieniu do (2) skorygowaną wartość skuteczną sygnału.

6. Badanie efektywności korekcji

Ważnym zadaniem jest ocena efektywności korekcji. Współczynniki szeregu Fouriera zmieniane są w korekcji w różnym stopniu, stąd istnieje potrzeba określenia ogólnej miary poprawy efektywności. Celem analizy jest pomiar wartości skutecznej, więc taką ogólną miarą może być *współczynnik efektywności korekcji* eff określony wzorem $eff = \delta_r / \delta_c$, gdzie δ_r i δ_c są względnymi błędami określenia wartości skutecznej, odpowiednio ze zrekonstruowanego $\hat{s}(t)$ i skorygowanego sygnału $\hat{s}_c(t)$. Współczynnik eff określa ile razy zmniejsza się błąd wyznaczania wartości skutecznej po korekcji.

Nie ma możliwości wyprowadzenia drogą analityczną ogólnego wzoru określającego współczynnik eff dla dowolnego sygnału, dlatego wyznaczymy go dla dwóch ważnych sygnałów. Rozważania zostaną przeprowadzone dla próbkowania

punktowego, gdyż upraszcza to obliczenia przy zachowaniu ogólności rozważań. Próbkowanie punktowe jest szczególnym przypadkiem próbkowania integracyjnego, gdy $T_a = 0$.

P1. Korekcja sygnału sinusoidalnego $s(t) = b_1 \sin(\omega t)$

Założmy, że po rekonstrukcji otrzymaliśmy ocenę \hat{b}_1 współczynnika b_1 , przy czym $\hat{b}_1 \neq b_1$. Następnie wyznaczamy wartość $rsa(s(t))$ z pomijalnie małym błędem, tak że można przyjąć $s_A = rsa(s(t)) = (2/\pi)b_1$ (błąd pomiaru $\Delta = 0$). Elementy równania więzów są następujące: $\mathbf{Z} = [2/\pi]$, $\mathbf{a} = [b_1]$. Macierz eksperymentu \mathbf{X} składa się z jednej kolumny, więc człon $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ we wzorze (18) jest liczbą i redukuje się – człon korekcyjny $corr$ nie zależy od macierzy \mathbf{X} i jest równy $corr = b_1 - \hat{b}_1$, stąd skorygowany estymator współczynnika b_1 wynosi

$$\hat{a}_c = \hat{a} + corr = \hat{b}_1 + (b_1 - \hat{b}_1) = b_1. \quad (19)$$

Tak więc, po korekcji, niezależnie od wyniku wcześniejszej oceny, otrzymuje się dokładny wynik, a współczynnik efektywności $eff = \infty$. Korekcja jest idealna.

P2. Korekcja sygnału $s(t) = b_1 \sin(\omega t) + b_{2p+1} \sin[(2p+1)\omega t]$

Zbadamy efektywność korekcji sygnału składającego się z podstawowego przebiegu i nieparzystej harmonicznej. Należy wyznaczyć wartości dwóch współczynników $\mathbf{a} = [b_1, b_{2p+1}]^T$. Kładąc $\alpha = \omega t$ przejdziemy do kątowej formy $s(\alpha) = b_1 \sin \alpha + b_{2p+1} \sin((2p+1)\alpha)$. Wystarczy próbować sygnał $s(t)$ w przedziale $\langle 0, T/2 \rangle$ (w mierze kątowej $\langle 0, \pi \rangle$). Dla tego sygnału $T_0 = T/2$ więc $\theta_0 = 2\pi T_0/T = \pi$. Jeśli pobierzemy N próbek w punktach $0, (1/N)\pi, (2/N)\pi, \dots, ((N-1)/N)\pi$, wtedy macierz eksperymentu jest równa

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \sin(0\pi/N) & \sin(0(2p+1)\pi/N) \\ \sin(1\pi/N) & \sin(1(2p+1)\pi/N) \\ \dots & \dots \\ \sin((N-1)\pi/N) & \sin((N-1)(2p+1)\pi/N) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Gdy liczba próbek N jest wielokrotnością sześciu to łatwo sprawdzić, że

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \frac{N}{2} \mathbf{I}_2 \Rightarrow (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \frac{2}{N} \mathbf{I}_2, \quad (21)$$

gdzie \mathbf{I}_2 jest macierzą jednostkową, 2×2 . Na mocy (16)

$$\mathbf{Z} = \frac{2}{\pi} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2p+1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

a z (15)

$$rsa(s(t)) = \frac{2}{\pi} \left(b_1 + \frac{1}{2p+1} b_{2p+1} \right). \quad (23)$$

Założmy, że znana jest dokładna wartość rsa , t.j. $rsa(s(t)) = s_A$. Wtedy ze wzoru (18), po przekształceniach, otrzymuje się następujące wartości skorygowanych współczynników

$$\hat{b}_1^c = b_1 - \frac{1}{1+(2p+1)^2} (b_1 - \hat{b}_1) + \frac{2p+1}{1+(2p+1)^2} (b_{2p+1} - \hat{b}_{2p+1}), \quad (24)$$

$$\hat{b}_{2p+1}^c = b_{2p+1} - \frac{(2p+1)^2}{1+(2p+1)^2} (b_{2p+1} - \hat{b}_{2p+1}) + \frac{2p+1}{1+(2p+1)^2} (b_1 - \hat{b}_1) \quad (25)$$

Dla mało zniekształconych sygnałów $b_{2p+1} \ll b_1$, wtedy trzeci człon po prawej stronie wzoru (24) jest pomijalnie mały i skorygowana ocena współczynnika b_1 jest około $(2p+1)^2$ razy bliżej prawdziwej jego wartości niż zrekonstruowana wartość.

Na mocy wzorów (24) i (25) otrzymuje się relacje

$$\delta_1^c = \frac{1}{1+(2p+1)^2} \delta_1 - \frac{2p+1}{1+(2p+1)^2} \frac{b_{2p+1}}{b_1} \delta_{2p+1}, \quad (26)$$

$$\delta_{2p+1}^c = \frac{(2p+1)^2}{1+(2p+1)^2} \delta_{2p+1} - \frac{2p+1}{1+(2p+1)^2} \frac{b_1}{b_{2p+1}} \delta_1 \quad (27)$$

między względnymi błędami $\delta_1 = (\hat{b}_1 - b_1)/b_1$ oraz $\delta_{2p+1} = (\hat{b}_{2p+1} - b_{2p+1})/b_{2p+1}$ estymatorów współczynników \hat{b}_1 i \hat{b}_{2p+1} zrekonstruowanego sygnału, a względnymi błędami $\delta_1^c = (\hat{b}_1^c - b_1)/b_1$ i $\delta_{2p+1}^c = (\hat{b}_{2p+1}^c - b_{2p+1})/b_{2p+1}$ skorygowanych współczynników \hat{b}_1^c i \hat{b}_{2p+1}^c . Dla mało zniekształconych sygnałów współczynnik efektywności jest w przybliżeniu równy $eff \cong 1 + (2p+1)^2$ i dla najmniej korzystnego przypadku, $p = 1$ wynosi $eff \cong 10$ (a dla $p = 2$, $eff \cong 25$). Tak więc poprawa dokładności estymacji współczynnika b_1 poprzez korekcję wynosi co najmniej dziesięć razy i w przybliżeniu tego samego rzędu wynosi poprawa dokładności wyznaczenia wartości skutecznej ze wzoru (2).

7. Podsumowanie

Z przeprowadzonej analizy wynika, że stosując odpowiednie metody estymacji można dokonać precyzyjnych pomiarów wartości skutecznej sygnałów okresowych z próbek integracyjnych. Przy użyciu dostępnej w handlu aparatury możliwe jest osiągnięcie, dokładności pomiaru rzędu 0.02%. Ponadto dokładność pomiaru może być poprawiona nawet dziesięciokrotnie poprzez zastosowanie pomiarów wartości średniej sygnału po wyprostowaniu i odpowiednim skorygowaniu estymatorów proponowaną w artykule metodą.

8. Literatura

- [1] U. Pogliano, "Evaluation of the uncertainties in the measurement of distorted power by means of the IEN sampling system." *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-55, pp. 620-624, no. 2, Apr. 2006.
- [2] U. Pogliano, "Precision measurement of AC voltage below 20 Hz at IEN," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-46, pp. 369-372, no.2, Apr. 1997.
- [3] A. Muciek, A Method for Precise RMS Measurements of Periodic Signals by Reconstruction Technique with Correction, 2006 Conference on Electromagnetic Measurements Digest, Torino, July 9-14, 2006. str.456-457.
- [4] G. Seber, *Linear regression analysis*, New York; John Wiley & Sons, 1977.

Artykuł recenzowany