Magdalena ATAMAN, Wacław SZCZEŚNIAK

DRGANIA SWOBODNE PŁYTY I PASMA PŁYTOWEGO O ŚREDNIEJ GRUBOŚCI Z UMIARKOWANIE DUŻYMI UGIĘCIAMI

Przedmiotem rozważań w artykule jest płyta i pasmo płytowe o średniej grubości, drgające z umiarkowanie dużymi przemieszczeniami. W pracy podano układ pięciu równań opisujących w ogólnym przypadku drgania płyty średniej grubości. Są to cząstkowe równania różniczkowe, z których tylko dwa są równaniami liniowymi. Następnie przeanalizowano zginanie walcowe pasma płytowego o średniej grubości. W tym przypadku układ równań redukuje się do trzech równań z trzema niewiadomymi. Podano również równania i omówiono rozwiązanie drgań swobodnych analizowanego pasma płytowego.

WSTĘP

Pierwsza teoria drgań płyt o średniej grubości powstała na bazie teorii belek Timoshenki [1], w której do klasycznej teorii zginania belek wprowadza się dwie poprawki. Timoshenko, bazując na założeniach Rayleigha [2], uwzględnił wpływ momentu obrotowego przekroju oraz dodatkowo uwzględnił naprężenia styczne. Jako pierwszy poprawki Timoshenki do teorii płyt wprowadził Reissner. Prace [3, 4] tego autora dotyczą statyki. Natomiast do zadań z dynamiki belek i płyt teorię Timoshenki pierwszy zastosował Ufland [5]. Teorię płyt średniej grubości opracował również Hencky [6], którą następnie wykorzystał w swoich pracach Mindlin [7, 8]. Płyty średniej grubości do dnia dzisiejszego są przedmiotem badań wielu autorów, między innymi [6-11].

W niniejszej pracy analizowane są drgania swobodne płyty i pasma płytowego o średniej grubości z umiarkowanie dużymi ugięciami.

1. RÓWNANIA RUCHU PŁYTY ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

W niniejszej pracy przyjmujemy założenie, że obroty ω_z są pomijalne [12, 13], a także hipotezę kinematyczną na przemieszczenia, wynikającą z pominięcia obciążeń stycznych na górnej i dolnej powierzchni płyty, w postaci

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} w + \Psi_{(z)} \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{bmatrix}, \quad u_z = w, \tag{1}$$

gdzie funkcja $\Psi_{(z)}$ jest opisana wzorem

$$\Psi_{(z)} = \frac{1}{1-\nu}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{zh^2}{4}\right). \tag{2}$$

Wpływ odkształceń postaciowych w płycie uwzględniają nieznane funkcje χ_x oraz χ_y. W ogólnym przypadku drgania płyty średniej grubości opisane są układem pięciu równań różniczkowych cząstkowych, z których tylko dwa są równaniami liniowymi:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
&+ \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x y} + \frac{h^2}{12(1-\nu)}\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \chi_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\
&\left. + \nu\frac{\partial \chi_y}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \chi_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{h^4}{120(1-\nu)^2}\left(\chi_x\frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \right. \\
&\left. + \nu\,\chi_y\frac{\partial \chi_y}{\partial y}\right) + \frac{A_0 h}{S}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{h^2}{48}\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \chi_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\
&\left. + \frac{\partial \chi_y}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} + \chi_y\frac{\partial^2 w}{\partial x y}\right) + \frac{h^2}{960(1-\nu)}\left(\chi_y\frac{\partial \chi_x}{\partial y} + \chi_x\frac{\partial \chi_y}{\partial y}\right) = \\
&= \frac{\rho h}{S}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
&+ \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x y} + \frac{h^2}{12(1-\nu)}\left(\frac{\partial \chi_y}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \chi_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\
&\left. + \nu\frac{\partial \chi_x}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} + \nu\,\chi_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{h^4}{120(1-\nu)^2}\left(\chi_y\frac{\partial \chi_y}{\partial y} + \right. \\
&\left. + \nu\,\chi_x\frac{\partial \chi_x}{\partial x}\right) + \frac{A_0 h}{S}\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{h^2}{48}\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \chi_x\frac{\partial^2 w}{\partial x y} + \right. \\
&\left. + \frac{\partial \chi_y}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \chi_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{h^2}{960(1-\nu)}\left(\chi_y\frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \right. \\
&\left. + \chi_x\frac{\partial \chi_y}{\partial x}\right) = \frac{\rho h}{S}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla^4 w + \frac{h^2}{5(1-\nu)}\nabla^2\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{\partial \chi_y}{\partial y}\right) - \frac{\rho h^3}{12D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\nabla^2 w + \right. \\
&\left. + \frac{h^2}{S(1-\nu)}\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{\partial \chi_y}{\partial y}\right)\right] - A_0\nabla^2\left[\frac{h^2}{10}\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{\partial \chi_y}{\partial y}\right) = \right.
\end{aligned}$$

$$= \frac{q}{D} + \frac{1}{D}\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{\rho h}{D}\left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{h^2}{12(1-\nu)}\chi_y \right]\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{h^2}{12(1-\nu)}\chi_x \right]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \right.$$

$$\nabla^2 \chi_x \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} - \frac{\partial \chi_x}{\partial y} \right) - \frac{5(1-\nu)}{h^2}\chi_x - \frac{\rho h^3}{12D}\frac{\partial^2 \chi_x}{\partial t^2} +$$
$$- \frac{A_0(1-\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} - \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right) =$$
$$- \frac{5(1-\nu)}{h^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 w\right) + \frac{5\rho h(1-\nu)(1+A_0)}{12D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad \text{(3) c.d.}$$

$$\nabla^2 \chi_y - \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y} - \frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right) - \frac{5(1-\nu)}{h^2}\chi_y +$$
$$- \frac{\rho h^3}{12D}\frac{\partial^2 \chi_y}{\partial t^2} - \frac{A_0(1-\nu)}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} - \frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right) =$$
$$= - \frac{5(1-\nu)}{h^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2 w\right) + \frac{5\rho h(1-\nu)(1+A_0)}{12D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

gdzie:

$$A_0 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad S = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}. \qquad (4)$$

Dodatkowe równanie nierozdzielności ma postać

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \qquad (5)$$

lub

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} =$$
$$= - \frac{h^2}{24(1-\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial x} + \frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right) +$$
$$- \frac{h^4}{960(1-\nu)^2}\left[2\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y}\frac{\partial \chi_x}{\partial y} + \frac{\partial \chi_y}{\partial x}\frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right) + \right.$$
$$\left. - \frac{\partial \chi_x}{\partial x}\frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right]. \qquad (6)$$

Wzór (6) łączy krzywiznę Gaussa z nieznanymi funkcjami χ_x i χ_y, określającymi naprężenia styczne w płycie. Ze wzorów (6) wynikają związki wiążące elementy krzywizny Gaussa z funkcjami χ_x i χ_y:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = - \frac{h^2}{24(1-\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y} + \frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right),$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{h^4}{960(1-\nu)^2}\left\{ 2\left[\left(\frac{\partial \chi_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi_y}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \qquad (7)$$
$$\left. - \frac{\partial \chi_x}{\partial x}\frac{\partial \chi_y}{\partial y} \right\}.$$

Warunek nierozdzielności (7) można napisać również w postaci całkowej [10].

2. PASMO PŁYTOWE ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

W przypadku zginania walcowego pasma płytowego o średniej grubości w płaszczyźnie xz zachodzą związki:

$$v = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad \chi_y = 0,$$
$$N_{xy} = 0, \quad M_{xy} = 0, \qquad (8)$$
$$Q_y = 0, \quad N_y = \nu N_x, \quad M_y = \nu M_x,$$

a układ równań w tym przypadku redukuje się do układu trzech równań z trzema niewiadomymi: u, w oraz χ_x. Uwzględniając dodatkowo to, że siła bezwładności $\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ jest pomijalnie mała w porównaniu z siłą $\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, co wykazał autor pracy [14], układ równań redukuje się do dwóch, z których tylko jedno jest nieliniowe:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) +$$
$$- \frac{\rho h^5}{60D(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{D}\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) +$$
$$- \frac{(17-6\nu)\rho h^3}{60D(1-\nu)}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 h^6}{60D^2(1-\nu)}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} =$$
$$= \frac{q}{D} - \frac{(2-\nu)h^2}{10D(1-\nu)}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\rho h^5}{60D(1-\nu)}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \chi_x}{\partial x^2} - \frac{10}{h^2}\chi_x - \frac{\rho h^3}{6D(1-\nu)}\frac{\partial^2 \chi_x}{\partial t^2} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[- \frac{10}{h^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{11\rho h}{6D(1-\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{q}{D(1-\nu)} \right].$$

W przypadku pominięcia poprawki Timoshenki na ścinanie ($\chi_x = 0$) układ równań (9) redukuje się do dwóch równań nieliniowych w następującej postaci:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\rho h^3}{12D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - A_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\rho h^3}{12D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) =$$
$$= \frac{q}{D} + \frac{N_x}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho h}{D}\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{A_0 h}{S}\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\rho h}{S}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Jeśli z kolei pominiemy wpływ naprężeń σ_z, ($A_0 = 0$) na odkształcenia pasma oraz obciążenie zewnętrzne q, to otrzymamy następującą zależność:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = 0 \qquad (11)$$

Ze wzoru (11) wynika, że ε_x nie zależy od współrzędnej x, a jedynie od czasu t. Można zatem zapisać dla pasma płytowego następujące zależności [15]:

$$\varepsilon_x(t)=\frac{1}{l}\int_0^l \varepsilon_x(t)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_0^l\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{1}{l}\left[u(l,t)-u(0,t)+\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right], \tag{12}$$

$$N_x=\frac{S}{l}\left[u(l,t)-u(0,t)+\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\right],\quad S=\frac{Eh}{1-\nu^2}.$$

3. DRGANIA SWOBODNE PASMA PŁYTOWEGO ŚREDNIEJ GRUBOŚCI

Równanie drgań swobodnych pasma płytowego otrzymujemy przyjmując we wzorze (9)1 założenia, że $q=0$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ oraz zakładając siłę N_x według wzoru (12)2. Rozwiązanie równania przyjmujemy w postaci szeregu:

$$w(x,t)=\sum_m f_m(t)\sin\alpha_m x,\quad \alpha_m=\frac{m\pi}{l},\quad m=1,3,5,\ldots \tag{13}$$

Po podstawieniu wzorów (13) do równania drgań swobodnych pasma płytowego otrzymujemy nieskończony układ równań:

$$\ddot{f}_m\left[\frac{\rho h}{D}-\alpha_m^2\frac{\rho h^3}{12D}\left(1-A_0\right)\right]+\alpha_m f_m+$$
$$+\frac{12}{lh}\alpha_m^2\left[\Delta l(t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i^2 l}{4}f_i^2\right]f_m=0, \tag{14}$$

gdzie:

$$\Delta l(t)=u(l,t)-u(0,t),\quad \omega_m^2=\frac{\alpha_m^2 D}{\rho h}\frac{1}{1-\beta},$$
$$\beta=\frac{\gamma_m^2}{12}\left(1-A_0\right),\quad \gamma_m^2=h^2\alpha_m^2. \tag{15}$$

W powyższych wzorach ω_m oznacza częstość drgań swobodnych pasma płytowego z uwzględnieniem poprawki Rayleigha. Przyjmując $f_m\neq 0$ wyznaczamy całkę szczególną z równania:

$$\ddot{f}_m+\omega_m^2\left[1+\frac{\Delta l(t)}{\gamma_m^2 Dl}\right]f_m+\frac{3\omega_m^2}{h^2}f_m^3=0. \tag{16}$$

Jeśli pasmo płytowe podparte jest przegubowo nieprzesuwnie na krawędziach, to $\Delta l(t)=0$ i równanie (16) przybiera następującą postać:

$$\ddot{f}_m+\omega_m^2 f_m+\frac{3\omega_m^2}{h^2}f_m^3=0. \tag{17}$$

Równanie (17) jest to tzw. równanie Duffinga, którego ścisłe rozwiązanie przy warunkach początkowych $f_m(0)=A$ i $\dot{f}_m(0)=0$ podane jest np. w [16, 17].

PODSUMOWANIE

Przedmiotem rozważań w niniejszego artykułu jest płyta i pasmo płytowe o średniej grubości drgające z umiarkowanie dużymi przemieszczeniami. W pracy podano układ pięciu równań opisujących w ogólnym przypadku drgania płyty średniej grubości. Są to cząstkowe równania różniczkowe, z których tylko dwa są równaniami liniowymi. Następnie przeanalizowano zginanie walcowe pasma płytowego o średniej grubości. W tym przypadku układ równań redukuje się do trzech równań z trzema niewiadomymi. Podano również równania i omówiono rozwiązanie drgań swobodnych analizowanego pasma płytowego.

BIBLIOGRAFIA

1. Timoshenko S., *On the correction for shear of differential equation for transverse vibrations of prismatic bar*, Philosophical Magazine, Vol. 41, 1921, pp. 744-746.
2. Rayleigh J.W.S., *The theory of sound*, MacMillan and Co., London 1894.
3. Reissner E., *On the theory of bending of elastic plates*, Journal of Mathematics and Physics, Volume 23, Issue 1-4, April 1944, pp. 184–191.
4. Reissner E., *On the effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, Journal of Applied Mechanics (American Society of Mechanical Engineers: ASME) Vol. 12, 1945, pp. 69-77.
5. Uflyand JA.S., *Rasprostranenie voln pri poperechnykh kolebanijakh sterzhnejj i plastin*, Prikladnaja Matematika i mekhanika, Tom XII, 1949, st. 287-300. (in Russian: Уфлянд Я.С., *Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин*, Прикладная Математик и механика, Том XII, 1949, ст. 287-300.)
6. Szcześniak W., *Drgania swobodne i wymuszone belki z dużymi ugięciami*, Rozprawy Inżynierskie, Vol. 34, 3, 1979, str. 359-369.
7. Szcześniak W., *Drgania swobodne płyty o średniej grubości*, AIL 22, 1 1976 str. 107-127. List do redakcji 22, 4, AIL, 1976.
8. Szcześniak W., *Drgania płyty o średniej grubości pod obciążeniem ruchomym*, Rozprawy Inżynierskie, Vol. 33, z. 1-2, 1985, str. 37-53.
9. Szcześniak W., *Drgania wymuszone płyty o średniej grubości*, Rozprawy Inżynierskie, Vol. 36, z. 2, 1987, str. 347-374.
10. Szcześniak W., *Analiza dynamiczna płyt o średniej grubości*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, z. 101, OWPW, Warszawa 1988.
11. Szcześniak W., *Wpływ dwuparametrowego podłoża sprężystego na drgania własne płyty średniej grubości*, Rozprawy Inżynierskie, Vol. 37, 1, 1989, str. 87-115.
12. Funk Y.C., *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.
13. Chia Ch.I., *Nonlinear analysis of plates*, McGraw-Hill, New York,1980.
14. Volmir A.C., *Gibkije plastinki I obolochki*, Gosudarstviennyje Izdatelstvo Technicheskoj Literatury, Moskwa 1956.
15. Kaliski S. red., *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966.
16. Kozhemiakina I.F., Morgajevski A.B., *Uchet inercji wrashchenia i zdviga pri isledovanii nieliniejnych kolebanii plastin pod diejstviem podvizhnoj nagruzki*, P.M.M., t. XXII, No 4, st. 75-80, 1976.
17. Szcześniak W., *Drgania pasma płytowego z dużymi przemieszczeniami*, VIII Konferencja Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji, Jadwisin,1987, str. 343-351.

18. Szcześniak W., Ataman M., *Stateczność warstwy nawierzchni bitumicznej na moście z izolacją odpowietrzającą nowego typu – podejście analityczne*, Autobusy nr 6/2016, str. 703-706.
19. Ataman M., Szcześniak W., *Analiza ugięć płyty sprężystej Kirchhoffa spoczywającej na inercyjnym podłożu Własowa pod impulsem siły*, Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe, Instytut Naukowo-Wydawniczy "Spatium", vol. 17, nr 12, 2016, ss. 537-540.
20. Ataman M., Szcześniak W., *Drgania płyty sprężystej Kirchhoffa spoczywającej na inercyjnym podłożu Własowa wymuszone impulsem siły*, Autobusy. Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe, Instytut Naukowo-Wydawniczy "Spatium", vol. 17, nr 12, 2016, ss. 541-544.

Free vibrations of thick plate and thick plate strip with moderate deflections

In the paper, thick plate and thick plate strip is analysed. Transverse shear deformations and rotary inertia are considered. Displacements are assumed to be large. A system of five partial differential equations of vibrations of thick plate are given. Only two of them are linear equations. Bending of plate strip is considered also. Three equations of motion describe this problem. Equations and solution of free vibrations of plate strip are given and discussed as well.

Autorzy:

dr inż. Magdalena Ataman – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej

prof. dr hab. inż. Wacław Szcześniak – Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Architektury