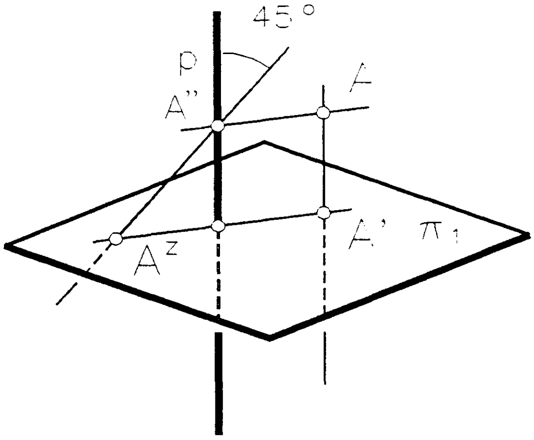
Henryk GLIŃSKI
Ośrodek Geometrii i Grafiki Inżynierskiej
Politechnika Śląska

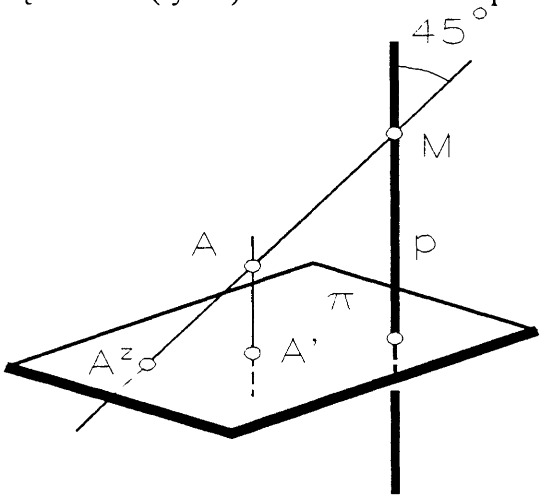
O PEWNEJ MODYFIKACJI RZUTU ZDEGENEROWANEGO

W pracy [4] prof. M. PALEJ zaproponował pewną modyfikację rzutowania w metodzie Monge'a poprzez zastąpienie rzutni pionowej π_2 prostą prostopadłą p do rzutni poziomej π_1 (rys. 1). Rzut zdegenerowany A^z punktu A, będący odpowiednikiem rzutu pionowego w metodzie Monge'a, jest punktem przebicia rzutni poziomej promieniem pionowo-rzutującym, załamanym w punkcie przecięcia prostej p pod kątem 45°. Rzut poziomy punktu jest identyczny z rzutem poziomym w metodzie Monge'a.

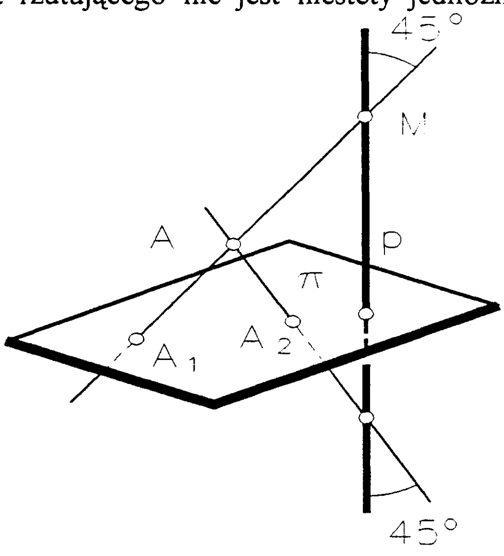


rys. 1.

Zaproponowane przez prof. M.PALEJA przekształcenie można poddać kolejnej modyfikacji poprzez rezygnację z poziomej części promienia rzutującego. Promień rzutujący dowolny punkt A będzie zatem prostą przechodzącą przez punkt A i przecinającą prostą p pod kątem 45° (rys. 2). Takie określenie promienia rzutującego nie jest niestety jednoznaczne,



rys. 2



rys. 3

przez dowolny punkt właściwy nie leżący na prostej p przechodzą zawsze dwie różne proste tworzące z prostą p kąt 45° (rys.3). Dokonajmy zatem kolejnej modyfikacji przekształcenia poprzez przyjęcie założenia, że przez punkt przechodzą dwa promienie rzutujące. Ostatecznie otrzymujemy następującą definicję rozważanego odwzorowania, które będziemy dalej nazywać ***rzutem osiowym***:

DEFINICJA: *Obrazami dowolnego punktu A nie należącego do rzutni π w* ***rzucie osiowym*** *nazywamy punkty przebicia A_1 i A_2 rzutni prostymi, przechodzącymi przez punkt A i tworzącymi z prostą p kąty 45°.*

Wprowadzone przekształcenie jest odwzorowaniem dwuobrazowym - dowolnemu punktowi w położeniu ogólnym odpowiadają dwa różne punkty. Oczywiście możliwe jest rozpatrywanie przypadku ogólniejszego, w którym prosta p może mieć dowolny kąt z płaszczyzną rzutni π a promień rzutujący dowolny kąt z prostą p.

Zwróćmy uwagę, że promienie rzutujące punkty przestrzeni i przecinające prostą p w pewnym ustalonym punkcie tworzą powierzchnię stożkową obrotową Γ, której osią jest prosta p. Każdy z promieni rzutujących musi być równoległy do jednej z tworzących powierzchni Γ. Płaszczyzna ω^∞ przecina powierzchnię stożkową Γ w stożkowej niewłaściwej s^∞. Każdy z promieni rzutujących punkty przestrzeni przecina stożkową s^∞ i prostą p, ogół promieni rzutujących tworzy zatem kongruencję prostych rzędu i klasy II.

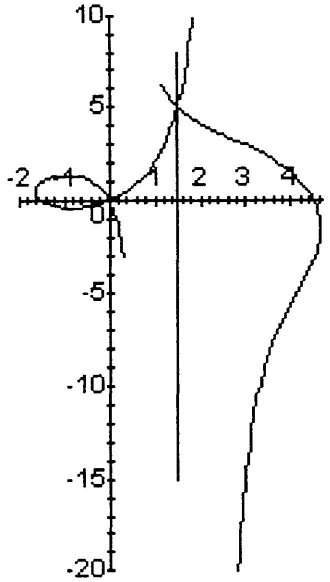
Stożkowa s^∞ i prosta p rozpatrywane łącznie tworzą krzywą skośną rzędu III, promienie rzutujące są dwusiecznymi tej krzywej. Rzut punktów przestrzeni z krzywej skośnej niezniekształconej rzędu III był rozpatrywany przez W.STANKIEWICZA [5] a przypadek szczególny, w którym krzywa rzędu III rozpada się na stożkową i przecinającą ją w jednym punkcie prostą był badany przez B.GROCHOWSKIEGO [1] i A.KOCHA [2]. W przypadku ogólnym jest to rzut IV stopnia, w którym obrazem krzywej płaskiej stopnia n jest krzywa płaska stopnia 4n.

Rozpatrywany przypadek jest o tyle interesujący, że obrazem prostej w położeniu ogólnym jest krzywa płaska rzędu IV przypominająca konchoidę Nikomedesa. Wprowadźmy układ współrzędnych prostokątnych tak, aby oś z układu jednoczyła się z prostą p. W tak przyjętym układzie współrzędnych obrazem punktu A o współrzędnych (x, y, z) będą punkty A_1 i A_2 współrzędnych:

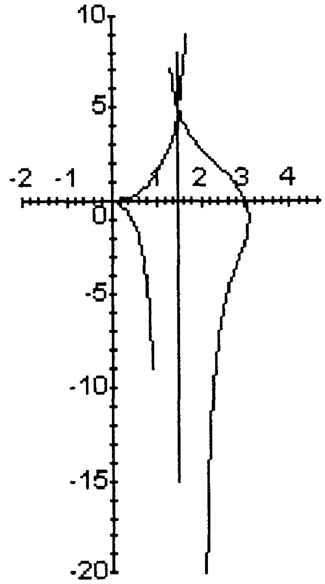
$$x'_{1,2} = x \pm \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad y'_{1,2} = y \pm \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Jeśli założymy, że prosta a, której obraz wyznaczamy, posiada równania $x = p$, $z = ky+c$, to równanie krzywej, będącej jej obrazem, ma postać (we współrzędnych biegunowych):

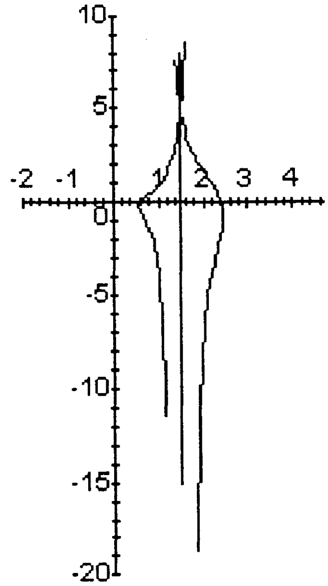
$\rho = \frac{p}{\cos\varphi} \pm (kp\tan\varphi + c)$. Porównując otrzymane równanie z równaniem konchoidy Nikomedesa $\rho = \frac{p}{\cos\varphi} \pm c$ stwierdzamy, że obydwa równania różnią się tylko wyrażeniem $kp\tan\varphi$. Na rysunkach 4 - 6 zamieszczono trzy przykłady otrzymanych krzywych dla różnych położeń prostych rzutowanych.



rys. 4



rys.5



rys.6

Literatura:

[1]. B. Grochowski: "Punkty wielokrotne rzutu skośnego III stopnia krzywej n-tego stopnia." Mat. Ogólnopolskiej Konferencji Naukowo-Dydaktycznej Geometrii Rzutowej i Wykreślnej, Kielce 1979.

[2]. A. Koch: "Powierzchnie prostokreślne w dwuobrazowym modelu odwzorowania liniowego". ZN AGH, Opuscula Mathematica nr 3, Kraków 1988.

[4]. M. Palej: "Degeneracja rzutni w metodzie Monge'a." Biuletyn Polskiego Towarzystwa Geometrii i Grafiki Inżynierskiej nr 2, Gliwice, 1996.

[5].W. Stankiewicz: "Rzut przestrzeni z krzywej przestrzennej stopnia trzeciego." ZN Geometria wykreślna, nr IV, Warszawa- Poznań 1966.

ON SOME MODIFICATION OF THE DEGENERATED PROJECTION

The article presents a modification of the so-called degenerated projection, proposed originally by M.Palej. The projector consists of the projection plane π and the straight line p perpendicular to the plane π. The image of an arbitrary point A of space is constructed in the following way. There are two projecting rays that pass through the point A and intersect the straight line p, and include an angle 45° with p. The traces A_1 and A_2 of the projecting rays in the plane π form images of the point A in the considered projection.