Biuletyn WAT
Vol. LXIV, Nr 1, 2015

Refrakcja i dopasowanie falowe w hiperbolicznej termosprężystości

JÓZEF RAFA

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Cybernetyki,
Instytut Matematyki i Kryptologii, ul. Kaliskiego 2,
00-908 Warszawa,
jrafa@onet.eu

Streszczenie. Tematyka publikacji dotyczy propagacji fal termosprężystych, ze szczególnym uwzględnieniem refrakcji fal na granicy warstwy spoczywającej na półprzestrzeni.
Analogicznie do występującego w przypadku fal akustycznych lub elektromagnetycznych efektu dopasowania falowego wprowadzono pojęcie impedancji fali termosprężystej i zbadano jej wpływ na odbicie i załamanie tych fal na granicy ośrodków.
Model ośrodka opisuje obustronne sprzężenie oddziaływań mechanicznych i termicznych z uwzględnieniem falowej propagacji ciepła w ośrodkach.
Słowa kluczowe: hiperboliczna termosprężystość, impedancja falowa ośrodka termosprężystego, refrakcja i dopasowania falowe

1. Wprowadzenie

Propagacja fal w ośrodkach warstwowych o różnych własnościach termomechanicznych (z uwzględnieniem skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła) w przypadku obustronnego sprzężenia oddziaływań mechanicznych i termicznych stanowi nowatorskie podejście w zagadnieniach termosprężystości.
Opis taki jest rozwinięciem prac z termosprężystości między innnymi W. Nowackiego [15], S. Kaliskiego [13] oraz innych autorów, w których rozpatrywano paraboliczne równania ciepła. Późniejsze rozwinięcia tych prac, np. [8], [14], dotyczą równań dyspersyjnych bądź zagadnień propagacji fal

w przestrzeni lub półprzestrzeni [12]. Z pracy Gawinecki i inni [7] wykazano istnienie fal powierzchniowych typu Rayleigha oraz fal termicznych wraz z ich pełnym opisem geometrycznym i fizycznym w półprzestrzeni dla liniowych równań hiperbolicznych termosprężystości z dwoma czasami relaksacji.

W wyżej wymienionych pracach badano zagadnienia brzegowo początkowe dla liniowch równań termosprężystości. J. Gawinecki w pracach [1], [2] udowodnił istnienie (po raz pierwszy) globalnych w czasie rozwiązań zagadnień początkowych i brzegowo początkowych dla nieliniowych równań hiperbolicznych termosprężystości w przestrzeni trójwymiarowej metodami przestrzeni Sobolewa i oszacowań energetycznych. W pracy J. Gawineckiego i inni [5] podano warunki konieczne i wystarczające do formowania się termicznych fal uderzeniowych w nieliniowej hiperbolicznej termosprężystości.

W niniejszej pracy wyznaczono analityczne rozwiązanie opisujące propagację zmodyfikowanych fal mechanicznych i termicznych w warstwie i półprzestrzeni.

Ze względu na praktyczny aspekt zagadnienia (np. w konstrukcjach drogowych i lotniskowych), przeanalizowano refrakcję propagujących się fal na granicy warstwy i półprzestrzeni. Wykorzystując odpowiedni dobór wprowadzonych impedancji termosprężystych, można wpływać na rozkład temperatury i naprężeń w ośrodkach i minimalizować negatywne skutki m.in. termicznych oddziaływań na stan nośności nawierzchni.

2. Sformułowanie problemu

Zbadamy układ warstwy na półprzestrzeniach wypełnionych ośrodkiem termosprężystym. Zgodnie z modelem termosprężystości [5], [6] i falowym modelem propagacji ciepła Pipkina–Gurtina [10] równania problemu mają postać:

– równanie bilansu pędu

$$\partial_t(\rho v_i) - \partial_k \sigma_{ik} = 0, \tag{1}$$

– równanie bilansu ciepła

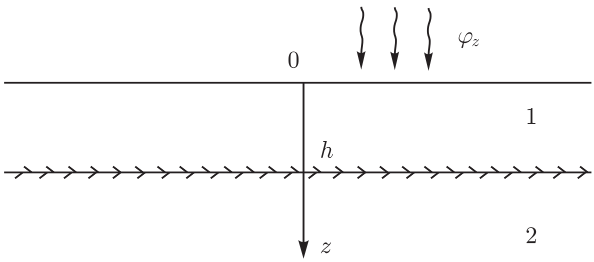
$$\partial_t(e) - \partial_k q_k = 0, \tag{2}$$

– związki konstytutywne

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= \lambda\varepsilon\delta_{ik} - (3\lambda + 2u)\alpha(\theta - \theta_0)\delta_{ik} + \mu\varepsilon_{ik} \\ e &= \rho c_v \theta + (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta_0\varepsilon \\ q_k &= -k(t) * \partial_k\theta, \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie $*$ oznacza operator splotu względem czasu, $\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, v_i – składowe wektora prędkości, σ_{ik} – składowe tensora naprężeń, e – energię wewnętrzną, q_k – składowe wektora strumienia ciepła, θ – temperaturę bezwzględną, θ_0 – temperaturę odniesienia oraz ρ – gęstość masową, λ, μ – stałe Lamégo, α – współczynnik rozszerzalności termicznej, c_v – współczynnik ciepła właściwego, $k(t)$ – funkcję relaksacji współczynnika przewodnictwa ciepła, ε_{ik} – składowe tensora odkształcenia, $\varepsilon = Tr\varepsilon_{ik}$ – ślad tensora, odkształcenie, $i, jk = 1, 2, 3(x, y, z)$, t – zmienną czasową.

Graficzny schemat rozpatrywanego zagadnienia przedstawiono na rys. 1.



Rys 1. 1 – warstwa o grubości h, 2 – półprzestrzeń, φ_z – zewnętrzne oddziaływanie termiczne

Formułujemy problem graniczny (typu Daniłowskiej) z następującymi warunkami, jeśli

$$z = 0 \quad \sigma_{zz}^{(1)} = 0, \quad q_z^{(1)} = -\varphi_z \tag{4}$$

jeśli $z = h$

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= v^{(2)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} &= \sigma_{zz}^{(2)} \\ q_z^{(1)} &= q_z^{(2)} \\ \theta^{(1)} &= \theta^{(2)} \end{aligned} \tag{5}$$

Ponadto przyjmujemy jednorodne warunki początkowe:

$$\text{przy} \quad t \leq 0 \quad v_i = 0, \quad \varepsilon_{ik} = 0, \quad \theta = 0 \tag{6}$$

Przyjmując jednorodny (niezależny od x, y) rozkład oddziaływań zewnętrznych $\varphi_z = \varphi_z(t)$ na powierzchni $z = 0$, uprościmy problem, przyjmując zależności opisujące v_i, ε_{ik} oraz θ od zmiennych (t, z).

Wykonując ponadto przekształcenie Laplacea względem czasu t, powyższe równania problemu dla warstwy i półprzestrzeni zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} & s\rho\bar{v}_z - \partial_z\bar{\sigma}_{zz} = 0 \\ & s\bar{e} + \partial_z\bar{q}_z = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}_{zz} = (\lambda + 2\mu)\bar{\varepsilon}_{zz} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\bar{\mathcal{T}} \\ & \bar{e} = e_0 + \rho c_v\bar{\mathcal{T}} + (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta_0\bar{\varepsilon}_{zz} \\ & \bar{q}_k = -\bar{k}(s)\bar{\mathcal{T}}, \quad \mathcal{T}(z,t) = \theta(z,t) - \theta_0, \end{aligned} \tag{8}$$

zaś warunki graniczne przyjmują formę:

$$\bar{\sigma}_{zz}^{(1)} = 0, \quad \bar{q}_z^{(1)} = -\bar{\varphi}_z, \quad \text{jeśli} \;\; z = 0 \tag{9}$$

$$\begin{aligned} & \bar{v}_z^{(1)} = \bar{v}_z^{(2)}, \quad \bar{\sigma}_{zz}^{(1)} = \bar{\sigma}_{zz}^{(2)} \\ & \bar{q}_z^{(1)} = \bar{q}_z^{(2)}, \quad \bar{\theta}^{(1)} = \bar{\theta}^{(2)}, \quad \text{jeśli} \;\; z = h, \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie

$$\bar{f}(z,s) = \int f(z,t)e^{-st}dt.$$

Korzystając ze znanej zależności

$$\partial_z v_z = \partial_t\varepsilon_{zz}$$

otrzymujemy związek

$$\partial_z\bar{v}_z = s\bar{\varepsilon}_{zz}, \tag{11}$$

W celu dalszego uproszczenia zapisów powyższych równań wprowadzimy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} & v_z^{(1)} = v_1, \quad v_z^{(2)} = v_2 \\ & \varepsilon_{zz}^{(1)} = \varepsilon_1, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_1 \\ & \varepsilon_{zz}^{(2)} = \varepsilon_2, \quad \sigma_{zz}^{(2)} = \sigma_2 \\ & \theta^{(1)} = \theta_1, \quad \theta^{(2)} = \theta_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Komplet dotychczasowych równań problemu zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} & s\rho_k\bar{v}_k - \partial_z\bar{\sigma}_k = 0 \\ & s\rho_k c_{vk}\bar{\mathcal{T}}_k - \bar{k}_k\partial_z\bar{\mathcal{T}}_k + (3\lambda_k + 2\mu_k)\alpha_k\theta_0\varepsilon_k = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_k &= (\lambda_k + 2\mu_k)\bar{\varepsilon}_k - (3\lambda_k + 2\mu_k)\alpha_k \bar{\mathcal{T}}_k \\
\bar{q}_k &= -\bar{k}_k \partial_z \bar{\mathcal{T}}_k
\end{aligned}
\tag{14}
$$

gdzie $k = 1$ dotyczy wielkości w warstwie, $k = 2$ dotyczy wielkości w półprzestrzeni.
Przyjmując jako wielkości niewiadome: $X = [v_k, \varepsilon_k, \mathcal{T}_k]^T$ (zapisane w postaci macierzowej) oraz korzystając z zależności (11), otrzymujemy do rozwiązania następujący układ równań

$$
\begin{aligned}
& s\rho_k \bar{v}_k - \frac{1}{s}(\lambda_k + 2\mu_k)\partial_z^2 \bar{v}_k + (2\lambda_k + 2\mu_k)\alpha_k \partial_z \bar{\mathcal{T}}_k = 0 \\
& s\rho_k C_{v_k} \bar{\mathcal{T}}_k - \bar{k}_k \partial^2 z \bar{\mathcal{T}}_k + (3\lambda_k + 2\mu_k)\alpha_k \theta_0 \partial_z \bar{v}_k = 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

z warunkami brzegowymi:
jeśli $z = 0$

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{s}(\lambda_1 + 2\mu_1)\partial_z \bar{v}_1 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 \bar{\mathcal{T}}_1 = 0 \\
& \bar{k}_1 \partial_z \bar{\mathcal{T}}_1 = \bar{\varphi}_z
\end{aligned}
\tag{16}
$$

jeśli zaś $z = h$

$$
\begin{aligned}
& \bar{v}_1 = \bar{v}_2 \quad \bar{\mathcal{T}}_1 = \bar{\mathcal{T}}_2 \\
& \bar{k}_1 \partial_z \bar{\mathcal{T}}_1 = \bar{k}_2 \partial_z \bar{\mathcal{T}}_2 \\
& \frac{1}{s}(\lambda_1 + 2\mu_1)\partial_z \bar{v}_1 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 \bar{\mathcal{T}}_1 \\
& \quad = \frac{1}{s}(\lambda_2 + 2\mu_2)\partial_z \bar{v}_2 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 \bar{\mathcal{T}}_2
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Rozwiązując powyższy układ równań, wyznaczymy bezpośrednio prędkości masowe v_k oraz temperaturę $\bar{\mathcal{T}}_k$ w warstwie i półprzestrzeni.
Pozostałe wielkości: $\bar{\sigma}_k$, $\bar{\varepsilon}_k$, $\bar{q}_k$ obliczamy, wykorzystując zależności (11) i (14).

3. Rozwiązanie ogólne sformułowanego problemu

Rozwiązanie układu równań (15) wyrazimy następującymi formułami

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathcal{T}}_1 &= A_1 e^{-\gamma_{11} z} + B_1 e^{-\gamma_{11}(2h - z)} \\
\bar{\mathcal{T}}_2 &= A_2 e^{-\gamma_{12}(z-h)} e^{-\gamma_{11} h}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= \bar{v}_{1s} + \bar{v}_{1T} \\
\bar{v}_2 &= \bar{v}_{2s} + v_{2T},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{1s} &= C_1 e^{-\gamma_{s1} z} + \mathbb{D}_1 e^{-\gamma_{s1}(2h-z)} \\
\bar{v}_{1T} &= A_1 a_1 e^{-\gamma_{T1} z} + b_1 B_1 e^{-\gamma_{T1}(2h-z)} \\
\bar{v}_{2s} &= C_2 e^{-\gamma_{s2}(z-h)} e^{-\gamma_{s1} h} \\
v_{2T} &= a_2 A_2 e^{-\gamma_{T2} z},
\end{aligned} \tag{20}$$

zaś $(\gamma_{sl}, \gamma_{Tl})$ są pierwiastkami równania charakterystycznego

$$(\bar{v}_{sl}^2 - \gamma_l^2)(\bar{v}_{Tl}^2 - \gamma_l^2) - \gamma_l^2 \bar{\beta}_{Tl} \bar{\beta}_{sl} = 0, \tag{21}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
v_{sl}^2 &= \frac{s^2}{c_{sl}^2}, & v_{Tl}^2 &= \frac{s^2}{C_{Tl}^2} \\
C_{sl}^2 &= \frac{\lambda_l + 2\mu_l}{\rho_l}, & C_{Tl}^2 &= \frac{s\bar{k}_l}{\rho_l C_{vl}}
\end{aligned}$$

są prędkościami odpowiednio fal sprężystych i termicznych. Ponadto

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_{Tl} &= \frac{s(3\lambda_l + 2\mu_l)\alpha_l}{\lambda_l + 2\mu_l} \\
\bar{\beta}_{sl} &= \frac{3\lambda_l + 2\mu_l}{\bar{k}_l} \alpha_l \theta_0
\end{aligned}$$

są odpowiednio współczynnikami sprzężenia mechanicznego i termicznego. Warunki brzegowe przyjmują postać:
jeśli $z = 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s}(\lambda_l + 2\mu_l)\partial_z \bar{v}_1 - (3\lambda_1 +_2 \mu_1)\alpha_1 \bar{\mathcal{T}}_1 = 0 \\
&\bar{k}_1 \partial_z \bar{\mathcal{T}}_1 = \bar{\varphi}_z
\end{aligned} \tag{22}$$

oraz jeśli $z = h$

$$\begin{aligned}
&\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \\
&\bar{\mathcal{T}}_1 = \bar{\mathcal{T}}_2 \\
&\frac{1}{s}(\lambda_1 + 2\mu_1)\partial_z \bar{v}_1 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha_1 \bar{\mathcal{T}}_1 \\
&= \frac{1}{s}(\lambda_2 + 2\mu_2)\partial_z \bar{v}_2 - (3\lambda_2 + 2\mu_2)\alpha_2 \bar{\mathcal{T}}_2 \\
&\bar{k}_1 \partial_z \bar{\mathcal{T}}_1 = \bar{k}_2 \partial_z \bar{\mathcal{T}}_2
\end{aligned} \tag{23}$$

Temperatura $\bar{\mathcal{T}}_1$ i $\bar{\mathcal{T}}_2$ wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{T}}_1 &= \frac{\bar{\varphi}_z}{\bar{k}_1\gamma_{T1}M_T}\left(e^{-\gamma_{T1}z} + \frac{1-r_T}{1+r_T}e^{-\gamma_{T1}(2h-z)}\right)\\ \bar{\mathcal{T}}_2 &= \frac{2\bar{\varphi}_z}{k_1\gamma_{T1}(1+r_T)M_T}e^{-\gamma_{T2}(z-h)}e^{-\gamma_{T1}h},\end{aligned} \tag{24}$$

gdzie

$$\begin{aligned}r_T &= \frac{k_2\gamma_{T2}}{k_1\gamma_{T1}},\\ M_T &= 1 - \frac{1-r_T}{1+r_T}e^{-2h\gamma_{T1}},\end{aligned} \tag{25}$$

Zatem obliczając bezpośrednio, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\bar{v}_{1T} &= \frac{\bar{\varphi}_z}{\bar{k}_1 M_T}\frac{\bar{\beta}_{T1}}{v_{s1}^2-\gamma_{T1}^2}(e^{-\gamma_{T1}z} - e^{-\gamma_{T1}(2h-z)})\\ \bar{v}_{2T} &= \frac{2\bar{\varphi}_z}{k_1\gamma_{T1}M_T}\frac{\beta_{T2}\gamma_{T2}}{v_{sz2}^2-\gamma_{T2}^2}e^{-\gamma_{T2}(z-h)}e^{-\gamma_{T1}h}.\end{aligned} \tag{26}$$

Pozostałe składniki $\bar{v}_{1s}$ oraz $\bar{v}_{2s}$ wyznaczymy w jawnej formie, wykorzystując pozostałe warunki brzegowe

$$\begin{aligned}&\partial_z\bar{v}_{1s}|_{z=0} = \frac{\varphi_z\beta_{T1}v_{s1}^2}{\bar{k}_1\gamma_{T1}M_T(v_{s1}^2-\gamma_{T1}^2)}M_T^+\\ &\text{gdzie}\quad M_T^+ = 1 + \frac{1-r_T}{1+r_T}e^{-2h\gamma_{T1}};\\ &(\bar{v}_{1s}-\bar{v}_{2s})|_{z=h} = -\frac{2\varphi_z\bar{\beta}_{T2}\gamma_{T2}}{k_1\gamma_{T1}M_T}\frac{1}{v_{s2}^2-\gamma_{T2}^2}e^{-\gamma_{T1}h}\\ &\partial_z\bar{v}_{1s} - \zeta\partial_z\bar{v}_{23s}|_{z=h} = \frac{2\bar{\varphi}_z e^{-\gamma_{1T}h}}{k_1\gamma_{T1}M_T}\cdot\left[\left(\frac{\bar{\beta}_{T1}\gamma_{T1}^2}{v_{s1}^2-\gamma_{T1}^2} - \zeta\frac{\bar{\beta}_{T2}\gamma_{T2}^2}{v_{s2}^2-\gamma_{T2}^2}\right)\right.\\ &\qquad\left. + \frac{\bar{\beta}_{T1}-\zeta\bar{\beta}_{T2}}{1+r_T}\right]\qquad\text{gdzie}\quad \zeta = \frac{\lambda_2+2\mu_2}{\lambda_1+2\mu_1}\end{aligned} \tag{27}$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy

$$C_2 = C\frac{1}{M_s(1+rs)},\quad M_s = 1 - \frac{1-r_s}{1+r_s}e^{-2h\gamma_{s1}} \tag{28}$$

$$C = p_s e^{-\gamma_{s1}h} + p_r e^{\gamma_{s1}h} - \frac{2p_1}{\gamma_{s1}}$$

$$r_s = \frac{(\lambda_2+2\mu_2)\gamma_{sz}}{(\lambda_1+2\mu_1)\gamma_{s1}}$$

$$p_1 = \frac{\bar{\varphi}_z \beta_{T1} v_{s1}^2}{\bar{k}_1 \gamma_{T1} M_T (v_{s1}^2 - \gamma_{T1}^2)}$$

$$p_s = p_2 + p_3, \quad p_r = p_2 - p_3$$

$$p_2 = \frac{-2\bar{\varphi}_z \beta_{T2} \gamma_{T2}}{k_1 \gamma_{T1} M_T} \frac{1}{v_{s2}^2 - \gamma_{T2}^2} e^{-\gamma_{T1} h}$$

$$p_3 = \frac{2\bar{\varphi}_z e^{-\gamma_{T1} h}}{k_1 \gamma_{T1} M_T} \cdot \left[\frac{\bar{\beta}_{T1} \gamma_{T1}^2}{v_{s1}^2 - \gamma_{T1}^2} - \zeta \frac{\beta_{T2} \gamma_{T2}^2}{v_{sz}^2 - \gamma_{T2}^2} + \frac{\beta_{T1} - \zeta \beta_{T2}}{1 + r_T} \right]$$

oraz

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{C}{Ms} + \frac{1}{2} p_r e^{\gamma_{s1} h} \\ D_1 &= \frac{C}{Ms} \frac{1 - r_s}{1 + r_s} + \frac{1}{2} p_s e^{\gamma_{s1} h} \end{aligned} \tag{29}$$

Zatem możemy wyrazić $\bar{v}_{1s}$ na $\bar{v}_{2s}$ wzorami

$$\begin{aligned} \bar{v}_{1s} &= \left(\frac{c}{Ms} + \frac{1}{2} p_r e^{\gamma_{s1} h} \right) e^{-\gamma_{s1} z} \\ &\quad + \left(\frac{c}{Ms} \frac{1 - r_s}{1 + r_s} + \frac{e^{r_{s1} h}}{2} p_s \right) e^{-\gamma_{s1}(2h - z)} \\ \bar{v}_{2s} &= c \frac{1}{Ms(1 + r_s)} e^{-\gamma_{s2}(z - h)} e^{-\gamma_{s1} h} \end{aligned}$$

lub po przekształceniu

$$\begin{aligned} \bar{v}_{1s} &= \frac{c}{Ms} \left(e^{-\gamma_{s1} z} + \frac{1 - r_s}{1 + r_s} e^{-\gamma_{s1}(2h - z)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (pre^{-\gamma_{s1} z} + p_s e^{-\gamma_{s1}(2h - z)}) e^{\gamma_{s1} h} \\ \bar{v}_{2s} &= \frac{c}{Ms} \frac{1}{1 + r_s} e^{-\gamma_{s2}(z - h)} e^{-\gamma_{s1} h} \end{aligned} \tag{30}$$

Wyznaczyliśmy zatem ogólne rozwiązanie postawionego problemu w postaci transformat Laplace'a.

4. Analiza uzyskanego rozwiązania i podsumowanie

Uzyskane rozwiązanie wyraża superpozycję procesów mechanicznych i sprzężonych z nimi efektów termicznych.

Istotnym elementem rozwiązania jest występowanie zjawiska refrakcji fal mechanicznych i termicznych. Refrakcję tych fal opisuje się dwoma parametrami:

– współczynnikiem odbicia fali mechanicznej

$$r_s = \frac{(\lambda_2 + 2\mu_2)\gamma_{s2}}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\gamma_{s1}},$$

gdzie $is = (\lambda + 2\mu)\gamma_s$ jest impedancją fali mechanicznej ośrodka oraz

– współczynnikiem odbicia fali termicznej

$$r_T = \frac{k_2\gamma_{T2}}{k_1\gamma_{T1}}$$

gdzie formuła $i_T = k\gamma_T$ wyraża wartość impedancji fali termicznej ośrodka.

Współczynniki refrakcji

$$W_s = \frac{1 - r_s}{1 + r_s} \quad \text{oraz} \quad w_T = \frac{1 - r_T}{1 + r_T}, \quad w \in (-1, 1)$$

określają stan „dopasowania własności termomechanicznych w badanych ośrodkach warstwy i podłoża.

Jeżeli $w_T = 0$, wówczas nie występuje odbicie fali termicznej od granicy ośrodków, analogicznie $w_s = 0$ odpowiada brakom odbicia fali mechanicznej w warstwie. W warunkach pełnego „dopasowania impedancji falowych ($r_T = 1$, $r_s = 1$) procesy propagacji i oddziaływania fal w układzie warstwowym istotnie się upraszczają.

Pełną analizę tego zjawiska, rozwiązanie w przestrzeni fizycznej (z, t), obliczenia szczegółowe oraz graficzną prezentację wyników przedstawimy w następnej publikacji.

Zjawisko refrakcji fal odgrywa istotną rolę w rzeczywistych konstrukcjach warstwowych, np. nawierzchniach drogowych i lotniskowych. Dobierając odpowiednio parametry termomechaniczne warstw i podłoża można zminimalizować negatywne skutki oddziaływań ruchu pojazdów i warunków klimatycznych na wymienione nawierzchnie.

Z okazji 25-lecia współpracy naukowej w Instytucie Matematyki i Kryptologii w dziedzinie zastosowań matematyki praca ta jest poświęcona prof. n. mat. inż. Jerzemu Augustowi Gawineckiemu, byłemu Dyrektorowi Instytutu Matematyki i Kryptologii, obecnie Dziekanowi Wydziału Cybernetyki

Autor J. Rafa

Artykuł wpłynął do redakcji 7.11.2014. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 13.01.2015.

LITERATURA

[1] Gawinecki J.A., *Global solutions to the Cauchy problem in non-linear hyperbolic thermoelasticity*, Math. Meth. Appl. Sci. 15, 1992, 223–257.

[2] Gawinecki J.A., *Global solutions to initial value problems in nonlinear hyperbolic thermoelasticity*, Dissertationes Math., 344, 1955, 1–61.

[3] Gawinecki J.A., *Initial boundary value problem in nonlinear hyperbolic thermoelasticity. Some applications in continuum mechanics*, Dissertationes Math., 407, 2002, 1–51.

[4] Gawinecki J.A., Łazuka J., Rafa J., Gawinecka A., *Mathematical and physical aspect of the initial value problem for nonlocal model propagation of heat with a finite speed*, Applicationes Math., vol. 40, 2013, 31–61.

[5] Gawinecki J.A., Gawinecka A., Rafa J., *Forming of the waves with strong discontinuity in nonlinear hyperbolic thermoelasticity*, Biul. WAT, No 4, 2011, 377–398.

[6] Gawinecki J.A., Rafa J., Włodarczyk E., *$L^\infty - L^1$-time decay estimate to the solution of the Cauchy problem of the system of equations describing nonlocal model of the propagation of heat with finite speed*, Biul. WAT, 1993, No 12, 4–20.

[7] Gawinecki J.A., Sikorska B., Nakamura G., Rafa J., *Mathematical and physical interpretation of the solution to the initial–boundary value problem in linear hyperbolic thermoelasticity theory*, Zeitschrift für Angewandte Mathematic und Mechanik ZAMM 87, No 10, 2007, 715–746.

[8] Green A.E., Lindsay K.A., *Thermoelasticity*, J. of Elasticity 2, 1972, 1–7.

[9] Graczyk M., Rafa J., Rafulski L., Zofka A., *New analytical solution of flow and heat refraction problem i multilayer pavement*, Roads and Bridges, 13, 2014, 33–48.

[10] Gurtin M.E,. Pipkin A.C., *A general theory of heat conduction with finite waves speeds*, Arch. Rational Mech. Anal., 31, 1968, 113–126.

[11] Ignaczak J., *Rayleigh waves in non homogeneous izotropic semi-space*, Arch. Mech. Stos., 3, 15, 1993, 341–346.

[12] Ignaczak J., *Generalized thermoelasticity*, Appl. Mech. Rev. 44, 1991, 1–8.

[13] Kaliski S. i inni, *Waves*, Elsevier, Amsterdam, 1992.

[14] Lord H.W., Shulman Y., *Generalized dynamical theory of thermoelasticity*, J. Mech. Phys. Solids 15, 1967, 299–309.

[15] Nowacki W., *Dynamical problems of thermoelasticity*, [in Polish], PWN, Warsaw, 1966.

JÓZEF RAFA

Refraction and wave matching in hyperbolic thermoelasticity

Abstract The subject of the publication concerns the propagation of thermoelastic waves with a particular emphasis on the refraction of waves at the boundary of a layer laying (resting) on a halfspace. Analogously to the effect of wave matching, which appears in the case of acoustic and electromagnetic waves, the impedance of a thermoelastic wave has been introduced and its influence and the reflection and refraction on the boundary at media has been investigated.
The model of the medium describes a mutual coupling of mechanical and thermal interactions with a wave type propagation of heat in media taken into account.
Keywords: hyperbolic thermoelasticity, wave impedance of a thermoelastic medium, refraction and wave matching