

Tomasz Janusz TELESZEWSKI,
Sławomir Adam SORKO

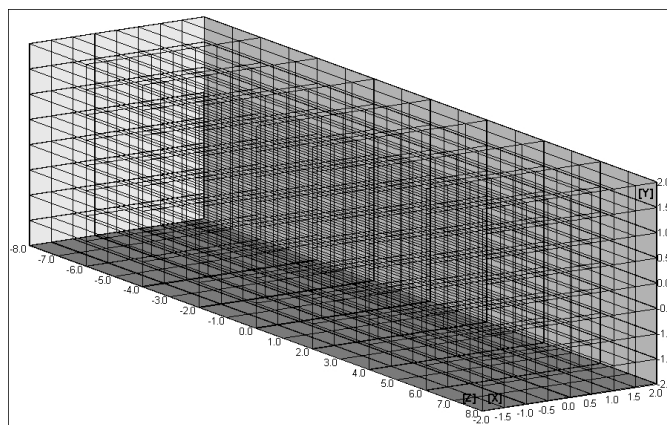
Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok
E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, s.sorko@pb.edu.pl

Rozwiązanie jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego metodą elementów skończonych

1 Wstęp

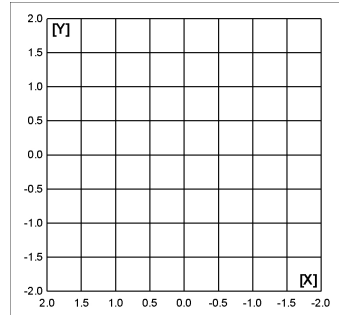
W pracy przedstawiono rozwiązanie jednokierunkowego laminarnego przepływu w przewodach prostoosiowych metodą elementów skończonych (MES) dla różnych kształtów przekroju poprzecznego przy zastosowaniu płaskich siatek.

Metoda elementów skończonych ugruntowana teoretycznie, najbardziej popularna, stosowana jest w wielu programach komercyjnych. Klasyczny algorytm rozwiązania przepływu w przewodach prostoosiowych wymaga budowy pracochłonnej przestrzennej siatki (rys.1). Wyprowadzony w publikacji algorytm pozwala zastąpić skomplikowaną siatkę przestrzenną wewnątrz przewodu siatką płaską zlokalizowaną w przekroju przewodu (rys.2).



Rys. 1. Przykładowa przestrzenna siatka stosowana w symulacji przepływu w przewodach prostoosiowych składająca się z 512 prostopadłościów

Fig. 1. Partition of the rectangle channel volume into 512 parallelepipeds.



Rys. 2. Przykładowa płaska siatka przekroju przewodu prostoosiowego składająca się z 64 prostokątnych elementów

Fig. 2. On partitions of the cross-section rectangle channel into 64 rectangles.

Przepływ jednokierunkowy w przewodzie prostoliniowym opisany jest następującym równaniem różniczkowym [1]:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1)$$

gdzie: c_z oznacza prędkość przepływu, p jest to ciśnienie, natomiast μ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej.

Pole prędkości przepływu jednokierunkowego c_z można podzielić na składową prędkości przepływu niezakłóconego c_∞ oraz składową prędkości przepływu wzbudzonego ściankami prostoliniowego kanału c_w [2]:

$$c_z = c_\infty + c_w \quad (2)$$

gdzie:

$$c_\infty = -\frac{1}{4} \wp(x_q^2 + y_q^2) \quad ; \quad \wp = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (2a)$$

Funkcja (2a) spełnia równanie (4). Wartość prędkości na brzegu (L) materialnym i nieprzepuszczalnym równa jest zero, wobec czego warunek brzegowy na ścianie (L) przyjmuje postać:

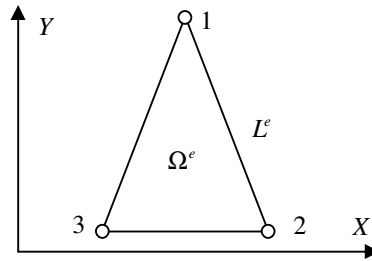
$$c_w(q) = -c_\infty \quad ; \quad q \in L \quad (3)$$

Warunek brzegowy (3) redukuje równanie Poissona (1) do równania Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 c_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_w}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

2 Rozwiązanie zagadnienia ustalonego jednokierunkowego laminarnego przepływu w przewodach prostoosiowych metodą elementów skończonych

W rozwiązaniu zagadnienia przepływu jednokierunkowego w przewodach prostoliniowych metodą elementów skończonych przyjęto trójkątne elementy podziału obszaru. Na rysunku 3 przedstawiono przykładowy element trójkątny, gdzie: (Ω) jest obszarem elementu, natomiast (L) jest brzegiem elementu skończonego.



Rys. 3. Trójkątny element skończony

Fig. 3. Triangular finite element

Obliczenia wykonano za pomocą metody Galerkinia [3,4]:

$$\int_{\Omega^e} (\nabla^2 c^e) \Phi_i^e d\Omega = 0 \quad (5)$$

gdzie Φ_i^e jest funkcją kształtu (funkcją interpolacyjną).

Prędkość c jest aproksymowana w obrębie elementu skończonego szeregiem:

$$c = \Phi_i^e c_i \quad (6)$$

gdzie, c_i są to węzłowe wartości funkcji c , natomiast Φ_i^e są to funkcje interpolacyjne.

Prędkość c w elemencie trójkątnym przybliżono funkcją liniową:

$$\tilde{\Phi}^e = a_1^e + b_2^e x + c_3^e y \quad (7)$$

Całkując równanie (5) przez części uzyskamy równanie:

$$\int_{L^e} \left(\frac{\partial c^e}{\partial x} n_x + \frac{\partial c^e}{\partial y} n_y \right) \Phi_i^e dL - \int_{\Omega^e} \left(\lambda \frac{\partial c^e}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial x} + \lambda \frac{\partial c^e}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (8)$$

Po podstawieniu zależności (6) do równania (8), otrzymuje się równanie dla i -tego węzła:

$$A_{ij}^e c_j = F_i^e \quad (9)$$

gdzie:

$$A_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \Phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j^e}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j^e}{\partial y} \right) d\Omega \quad (10)$$

$$F_i^e = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial c^e}{\partial x} n_x + \frac{\partial c^e}{\partial y} n_y \right) d\Omega \quad (11)$$

Kolejnym krokiem jest przejście z układu lokalnego (9) do układu globalnego. Globalny układ równań w MES, można uzyskać poprzez sumowanie układów równań otrzymanych dla poszczególnych elementów skończonych.

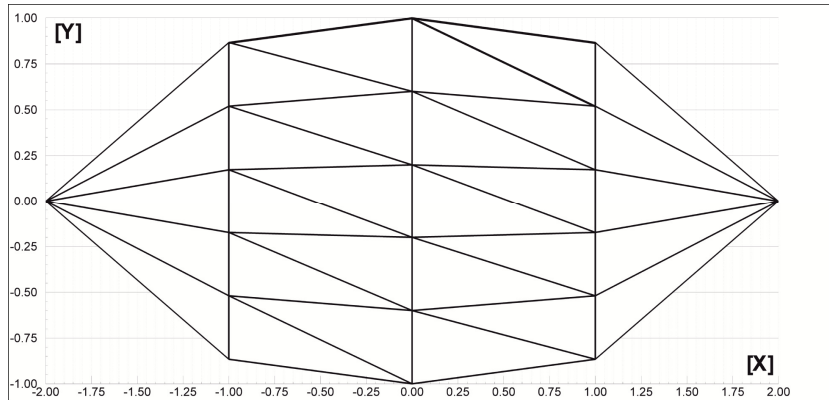
3 Weryfikacja rozwiązania zagadnienia ustalonego jednokierunkowego laminarnego przepływu w przewodach prostoosiowych metodą elementów skończonych przy zastosowaniu dwuwymiarowych siatek

W celu wykonania weryfikacji metody MES przy zastosowaniu płaskich siatek w modelowaniu przepływów jednokierunkowych w przewodach prostoosiowych porównano rezultaty obliczeń numerycznych MES ze znanym rozwiązaniem analitycznym dla przewodu eliptycznego. Obliczenia wykonano dla siatek składających się z elementów trójkątnych o trzech gęstościach: 30 (rys. 4), 510 oraz 2046 (rys. 5) elementów dla $\varphi = 1$.

Rozwiązanie teoretyczne pola prędkości w przewodzie prostoliniowym o przekroju elipsy opisane jest następującym wzorem [1]:

$$c_T = -\frac{1}{2} \varphi \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad ; \quad \varphi = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (12)$$

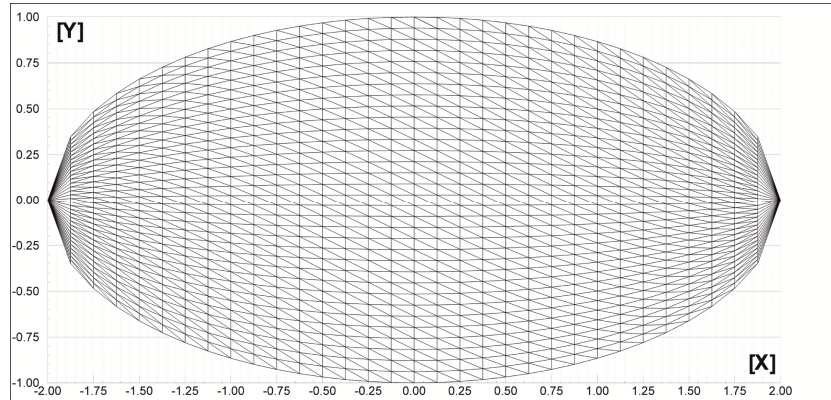
gdzie: $a=2$, $b=1$ – są to półosie elipsy.



Rys. 4. Przykładowa siatka przekroju przewodu eliptycznego składająca się z 30 trójkątnych elementów

Fig.4. On partitions of the cross-section elliptical channel into 30 triangles

Rozwiązanie jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego metodą elementów skończonych



Rys. 5. Przykładowa siatka przekroju przewodu eliptycznego składająca się z 2046 trójkątnych elementów

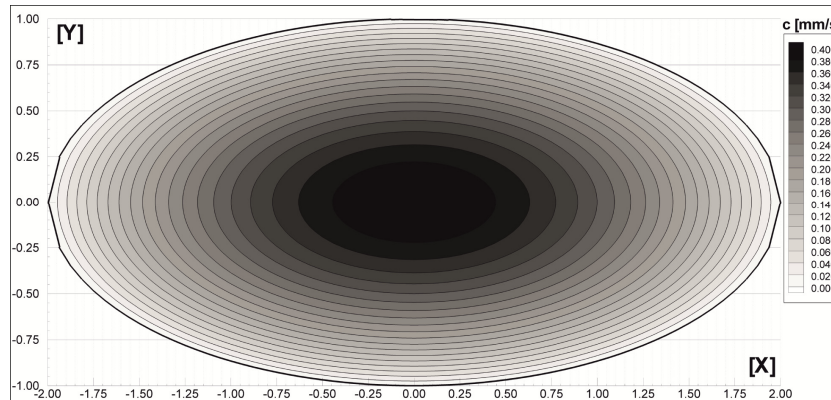
Fig.5. On partitions of the cross-section elliptical channel into 2046 triangles

Błąd rozwiązania MES dla prędkości w wybranych punktach wyznaczono z zależności:

$$\delta c_{MES} = \left| \frac{c_T - c_{MES}}{c_T} \right| * 100\%, \quad (13)$$

gdzie: c_{MES} oznacza prędkość wyznaczoną metodą elementów skończonych przy zastosowaniu płaskich siatek, natomiast c_T jest to prędkość wyznaczona z rozwiązania teoretycznego (12).

Na rysunku 6 wykreślono pole prędkości w przewodzie eliptycznym wyznaczone metodą MES przy zastosowaniu siatek płaskich.



Rys. 6. Pole prędkości w przewodzie prostoosiowym o przekroju eliptycznym wyznaczone metodą MES przez zastosowaniu płaskich siatek ($\xi = 1$)

Fig.6. FEM solution with two-dimensional grid - velocity in elliptical channel ($\xi = 1$)

Tabelaryczne zestawienie porównania rozwiązania numerycznego i teoretycznego w wybranych punktach przekroju prędkości znajduje się w tabeli 1. Błąd metody MES przy zastosowaniu płaskich siatek maleje wraz z zagęszczeniem siatki. Metoda numeryczna MES charakteryzuje się dużą dokładnością dla siatki składającej się już z 510 trójkątnych elementów, gdzie błąd nie przekracza 0.45%.

Tab. 1. Prędkość w przewodzie eliptycznym- błąd rozwiązania MES przy zastosowaniu dwuwymiarowych siatek

Tab. 1. Velocity in elliptical duct- error analysis applied in MES with two-dimensional grid

Lp	Współrzędne obszaru		Rozwiązanie analityczne	Rozwiązanie MES 30el.	Błąd metody
	x	y			MES 30el.
-	mm	mm	mm/s	mm/s	%
1	0,0000000	1,0000000	0,0000000	0,0000000	-
2	0,0000000	0,7500000	0,1750000	0,1586380	9,3497143
3	0,0000000	0,5000000	0,3000000	0,2855630	4,8123333
4	0,0000000	0,2500000	0,3750000	0,3649190	2,6882667
5	0,0000000	0,0000000	0,4000000	0,3807900	4,8025000
MES 510 el.					
1	0,0000000	1,0000000	0,0000000	0,0000000	-
2	0,0000000	0,7500000	0,1750000	0,1742480	0,4297143
3	0,0000000	0,5000000	0,3000000	0,2986870	0,4376667
4	0,0000000	0,2500000	0,3750000	0,3733350	0,4440000
5	0,0000000	0,0000000	0,4000000	0,3982200	0,4450000
MES 2046 el.					
1	0,0000000	1,0000000	0,0000000	0,0000000	-
2	0,0000000	0,7500000	0,1750000	0,1747880	0,1211429
3	0,0000000	0,5000000	0,3000000	0,2996330	0,1223333
4	0,0000000	0,2500000	0,3750000	0,3745260	0,1264000
5	0,0000000	0,0000000	0,4000000	0,3995000	0,1250000

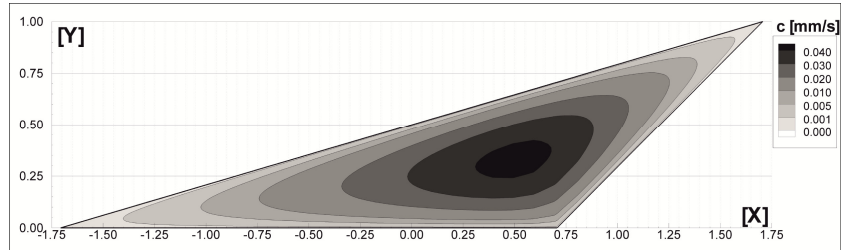
4 Przykłady obliczeniowe

Poniżej przedstawiono rezultaty obliczeń numerycznych MES przy zastosowaniu siatek dwuwymiarowych pól prędkości w przewodach prostoosiowych, dla których nie są znane rozwiązania analityczne. Wszystkie obliczenia wykonano dla $\zeta = 1$.

Na rysunkach 7-10 wykreślono pola prędkości w przewodzie o przekroju: trójkąta rozwartokątnego (rys.7), równoległoboku (rys.8), trapezu równoramiennego (rys.9), oraz sześciokąta (rys.10).

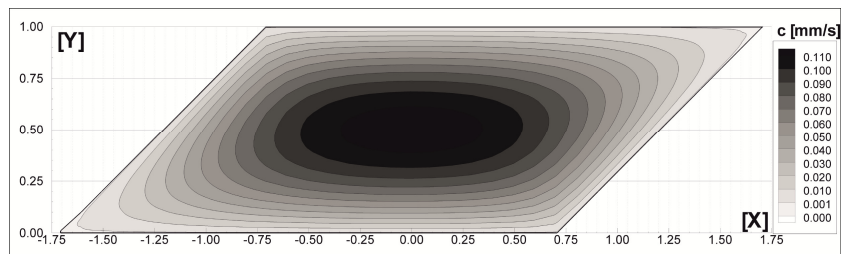
Symulacje zostały przeprowadzone na autorskim programie obliczeniowym FEM 1D DUCT FLOW.

Rozwiązanie jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego metodą elementów skończonych



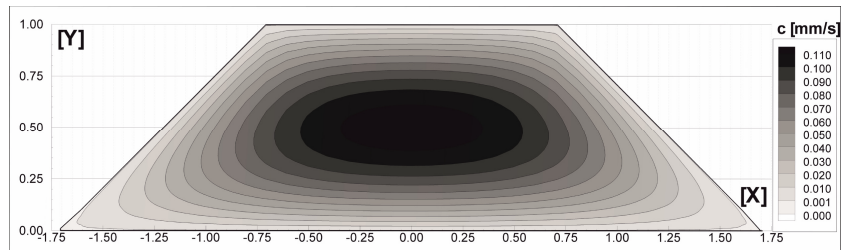
Rys. 7. Pole prędkości w przewodzie prostoosiowym o przekroju trójkąta rozwartokątnego wyznaczone metodą MES przez zastosowaniu płaskich siatek ($\xi\varnothing = 1$)

Fig.7. FEM solution with two-dimensional grid - velocity in isosceles triangle channel ($\xi\varnothing = 1$)



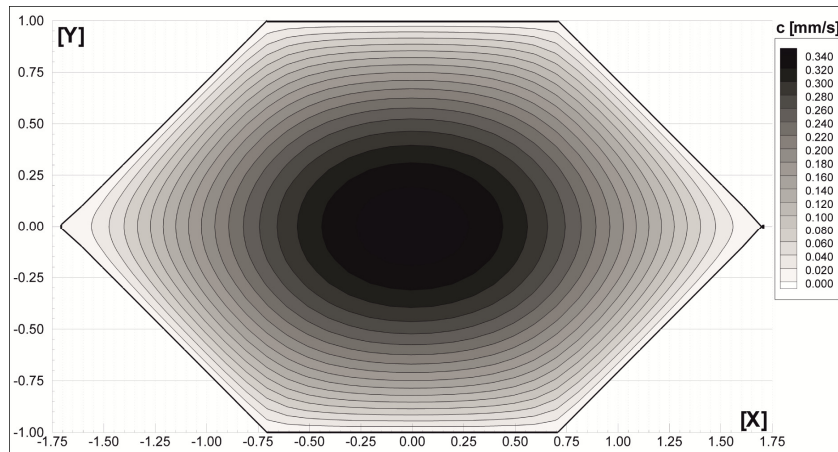
Rys. 8. Pole prędkości w przewodzie prostoosiowym o przekroju równoległoboku wyznaczone metodą MES przez zastosowaniu płaskich siatek ($\xi\varnothing = 1$)

Fig.8. FEM solution with two-dimensional grid - velocity in parallelogram channel ($\xi\varnothing = 1$)



Rys. 9. Pole prędkości w przewodzie prostoosiowym o przekroju trapezu wyznaczone metodą MES przez zastosowaniu płaskich siatek ($\xi\varnothing = 1$)

Fig.9. FEM solution with two-dimensional grid - velocity in trapezium channel ($\xi\varnothing = 1$)



Rys. 10. Pole prędkości w przewodzie prostoosiowym o przekroju sześciokąta wyznaczone metodą MES przez zastosowaniu płaskich siatek ($\zeta = 1$)

Fig.10. FEM solution with two-dimensional grid - velocity in hexagon channel ($\zeta = 1$)

5 Podsumowanie

Wyprowadzona metoda MES, którą oparto na budowie dwuwymiarowych siatek w przekroju przewodu znacznie upraszcza klasyczny algorytm MES dla przepływu w przewodach prostoosiowych, w których wymagana jest budowa pracochłonnych, przestrzennych siatek. Eliminacja siatek trójwymiarowych znacznie przyspiesza budowę modelu i skraca czas komputerowych obliczeń. Zaprezentowany algorytm charakteryzuje się dużą dokładnością również dla niewielkich gęstości siatek. Główną zaletą przedstawionej numerycznej metody w stosunku do metody elementów brzegowych jest brak błędów ze względu na osobliwości funkcji podcałkowych metody MEB. Metoda szczególnie może być stosowana do dynamicznie rozwijanych metod symulacji w mikrokanalach, gdzie przepływy są zgodne z mechanizmem makroprzepływów [5,6].

Literatura

1. Batchelor G.K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press 2000
2. Teleszewski T.J., Sorko S.A.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczania jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, *Acta Mechanica et Automatica*, s. 124-132, Vol.5, nr 3, 2011
3. Reddy J.N., Gartling D.K.: *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. CRC Press 2010
4. Chung T.J.: *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, Mc-Graw-Hill, New York 1978

5. Celata, G.P.; Cumo, M.; McPhail, S.; Zummo, G., Characterization of fluid dynamic behaviour and channel wall effects in microtube, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 27, Issue 1, 135-143, 2006
6. Wibel, W.; Ehrhard, P., Experiments on the laminar/turbulent transition of liquid flows in rectangular microchannels, *Heat Transfer Engineering*, Vol. 30, Issue 1-2, pp. 70-77, 2009

Streszczenie

W pracy przedstawiono rozwiązanie jednokierunkowego laminarnego przepływu w przewodach prostoosiowych metodą elementów skończonych (MES) dla różnych kształtów przekroju poprzecznego przy zastosowaniu płaskich siatek. W publikacji wykonano walidację wyprowadzonej metody oraz przedstawiono przykłady zastosowania algorytmu. W celu wykonania walidacji metody oraz symulacji napisano autorski program obliczeniowy FEM 1D DUCT FLOW w języku Fortran.

Słowa kluczowe: metoda elementów skończonych, przepływy laminarne, przewody prostoosiowe

Implementation of the Finite Element Method for the solution of unidirectional flow through straight pipes

Summary

The work contains the implementation of the Finite Element Method for the solution of unidirectional flow through straight pipes using a two-dimensional grid. The algorithm was verified by numerical tests and compared with analytical solution. A numerical examples are presented. The computer program FEM 1D DUCT FLOW was written in Fortran programming languages.

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy własnej nr W/WBiŚ/8/2011.