

Jakub WOJTURSKI, Andrzej RYLSKI

POLITECHNIKA RZESZOWSKA, KATEDRA METROLOGII I SYSTEMÓW DIAGNOSTYCZNYCH,
ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów

Analiza dokładności wyznaczenia zmian wartości pojemności w mostku dwuparametrowym za pomocą symulacji Monte Carlo

Dr inż. Jakub WOJTURSKI



Ukończył studia w 1995 roku na Wydziale Elektrycznym Politechniki Rzeszowskiej. W 2004 roku uzyskał stopień doktora nauk technicznych na Wydziale Elektrotechniki i Informatyki PRZ. Od 2004 roku jest adiunktem w Katedrze Metrologii i Systemów Diagnostycznych Politechniki Rzeszowskiej. Praca naukowa dotyczy pomiarów wielkości elektrycznych i nieelektrycznych, pomiarów temperatury oraz pomiarów współczynnika zawartości harmoniczných.

e-mail: wojtur@prz.edu.pl

Dr inż. Andrzej RYLSKI



Ukończył studia w 1974 roku na wydziale Elektroniki Politechniki Wrocławskiej. W roku 1986 uzyskał stopień doktora w Instytucie Metrologii Politechniki Wrocławskiej. Od roku 1989 jest adiunktem w Katedrze Metrologii i Systemów Diagnostycznych Politechniki Rzeszowskiej. Praca naukowa dotyczy wyodrębnienia informacji o właściwościach obiektów technicznych i biologicznych zawartej w ich sygnałach wyjściowych, pomiarów mostkowych oraz biomedycznych.

e-mail: rylski@prz.edu.pl

Streszczenie

W artykule zamieszczono podstawowe informacje dotyczące nierównoważonego mostka RC do jednoczesnego pomiaru zmiany wartości pojemności dwóch przetworników pojemnościowych. Przedstawiono założenia projektowe, niezbędne podczas analizy rzeczywistych warunków pracy mostka. Omówiono wyniki analizy dokładności wyznaczenia parametrów wyjściowych mostka metodą symulacji Monte Carlo. Przedstawiono kształty rozkładów zmian wartości pojemności czujników w zależności od wartości i znaku zmian pojemności obu czujników.

Słowa kluczowe: mostek nierównoważony, mostek pojemnościowy, mostek dwuparametrowy, symulacja Monte Carlo.

Accuracy analysis of capacity change calculation in two-parameter bridge by the use of Monte Carlo simulation

Abstract

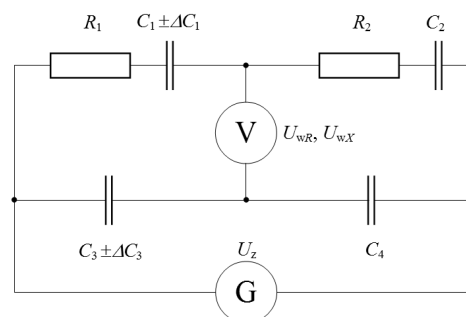
In the paper the basic information concerning an unbalanced RC bridge for simultaneous measuring the capacity change of two capacitance sensors is presented. The bridge measurement circuit is shown in Fig. 1. The output voltage components are described by Eqs. (1), (2). In Section 2 there are given the simplifying assumptions (see Eq. (3)). The bridge output parameters are described by Eqs. (4), (5). During measurements, both output voltage components are calculated based on RMS voltage and phase angle measurements – Eqs. (6), (7). For determination of the output parameter accuracy the method of Monte Carlo simulation is proposed (Section 3). The view of the spreadsheet Excel application used for calculations is shown in Fig. 2. The modeled sensor capacitance changes are defined and the bridge output voltage parameters are calculated (Tab. 1). The shapes and parameters of the probability distributions of input variables are assumed (Tab. 2). Then the parameters of output variables are calculated – Eqs. (7), (8) and Tab. 3. In Tab. 4 the exemplary shapes of the probability distributions of capacity changes for both sensor are presented. In the summary (Section 4) the bridge output parameters and the probability distributions for all the analyzed cases are compared.

Keywords: unbalanced bridge, capacitance bridge, two-parameters bridge, Monte Carlo simulation.

1. Mostek do pomiaru zmiany wartości dwóch parametrów tego samego rodzaju

Układy mostków wieloparametrowych wykorzystywane są często w pomiarach, wymagających monitorowania wielu parametrów obiektu jednocześnie. Aplikacje mostków wieloparametrowych zostały przedstawione w monografii [1]. Mostek prądu przemiennego, który umożliwia jednoczesny pomiar zmiany wartości dwóch parametrów, opisany został w patencie [2].

Na rysunku 1 przedstawiono schemat mostka RC do jednoczesnego pomiaru zmiany wartości pojemności ΔC_1 i ΔC_3 dwóch przetworników pojemnościowych C_1 i C_3 .



Rys. 1. Dwuparametrowy mostek RC z czujnikami pojemnościowymi
Fig. 1. Two-parameter RC bridge with capacitance sensors

Mostek zasilany jest napięciem sinusoidalnym o wartości skutecznej U_z i częstotliwości f . Składowe napięcia nierównowagi U_{wR} , U_{wX} na przekątnej wyjściowej mostka opisane są następującymi równaniami:

$$U_{wR} = U_z \left[\frac{1 + \frac{C_1 + \Delta C_1}{C_2} + [2\pi f R_1 (C_1 + \Delta C_1)]^2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}{\left(1 + \frac{C_1 + \Delta C_1}{C_2}\right)^2 + [2\pi f R_1 (C_1 + \Delta C_1)]^2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2} - \frac{1}{1 + \frac{C_3 + \Delta C_3}{C_4}} \right], \quad (1)$$

$$U_{wX} = U_z \frac{2\pi f R_1 (C_1 + \Delta C_1) \left(\frac{C_1 + \Delta C_1}{C_2} - \frac{R_2}{R_1} \right)}{\left(1 + \frac{C_1 + \Delta C_1}{C_2}\right)^2 + [2\pi f R_1 (C_1 + \Delta C_1)]^2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2}. \quad (2)$$

Informacja o wartościach składowej czynnej U_{wR} oraz składowej biernej U_{wX} napięcia nierównowagi umożliwia wyznaczenie zmiany wartości pojemności obu przetworników C_1 i C_3 . Opis działania mostka oraz szczegółową analizę warunków pracy przedstawiono w [3].

2. Założenia projektowe

W celu modelowania rzeczywistych warunków pracy mostka oraz analizy dokładności wyznaczenia zmiany wartości ΔC_1 oraz ΔC_3 obu pojemności przyjęto następujące założenia:

$$R_1 = R_2 = R, \quad C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C, \quad f = (2\pi RC)^{-1}. \quad (3)$$

Po spełnieniu założeń (3), wzory (1) oraz (2) można przekształcić do postaci umożliwiającej wyznaczenie wartości ΔC_1 oraz ΔC_3 :

$$\Delta C_1 = C \sqrt{\frac{U_z^2 + 8U_{wX}U_z - 16U_{wX}^2 + 12U_{wX} - U_z}{2(U_z - 5U_{wX})}}, \quad (4)$$

$$\Delta C_3 = C \left(\frac{U_z \sqrt{U_z^2 + 8U_{wX}U_z - 16U_{wX}^2}}{2(2U_{wR}^2 - 3U_{wR}U_z + 2U_{wX}^2 - U_{wX}U_z + U_z^2)} \right) + C \frac{-8U_{wR}^2 + 8U_{wR}U_z - 8U_{wX}^2 + 4U_{wX}U_z - U_z^2}{2(2U_{wR}^2 - 3U_{wR}U_z + 2U_{wX}^2 - U_{wX}U_z + U_z^2)} \quad (5)$$

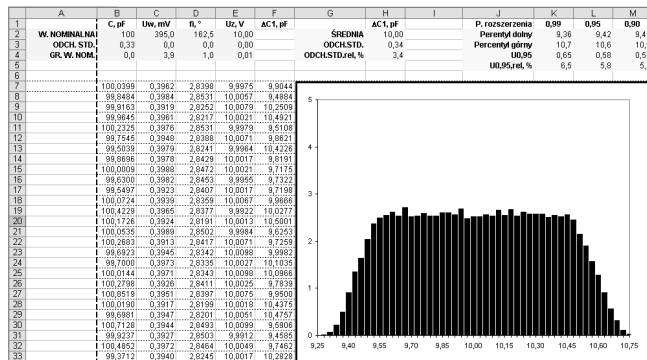
Założono, że w trakcie eksperymentu pomiarowego wartości składowej czynnej U_{wR} oraz biernej U_{wX} napięcia nierównowagi mostka obliczane będą na podstawie pomiaru wartości skutecznej napięcia U_w oraz wartości kąta przesunięcia fazowego φ pomiędzy napięciem zasilającym mostek U_z a napięciem U_w :

$$U_{wR} = U_w \cos \varphi, \quad (6)$$

$$U_{wX} = U_w \sin \varphi. \quad (7)$$

3. Analiza dokładności mostka

Ze względu na silnie nieliniową postać wyrażeń (4) oraz (5) zaproponowano wykorzystanie metody Monte Carlo do wyznaczenia miar dokładności pomiaru zmian wartości ΔC_1 oraz ΔC_3 . Podstawowe informacje, dotyczące zastosowania metody Monte Carlo w analizie dokładności można znaleźć w literaturze, m.in. [4, 5, 6], natomiast wykorzystanie arkusza kalkulacyjnego Excel jako narzędzia obliczeniowego w tej metodzie, opisane jest m.in. w [7, 8]. Na potrzeby analizy dokładności mostka wykonano aplikację (rys. 2), pozwalającą na modelowanie rzeczywistych warunków pracy mostka, uzyskanie graficznego rozkładu wartości ΔC_1 i ΔC_3 oraz wyznaczenie parametrów tych rozkładów.



Rys. 2. Aplikacja do modelowania pracy mostka dwuparametrowego
Fig. 2. Application for modeling operation of the two-parameter bridge

Zmiennymi wejściowymi, zgodnie z (4), (5), (6), (7), są wartości: pojemności nominalnej C czujników, napięcia U_z zasilającego mostek, napięcia nierównowagi U_w na przekątnej mostka, kąta przesunięcia fazowego φ pomiędzy napięciem nierównowagi a napięciem zasilającym. Zmiennymi wyjściowymi są wartości ΔC_1 i ΔC_3 . Modelowana jest sytuacja, w której:

a) oba czujniki zmieniają jednocześnie pojemność o tę samą wartość i ten sam znak,

b) oba czujniki zmieniają jednocześnie pojemność o tę samą wartość, ale ze znakiem przeciwnym.

Przyjęto, że w trakcie eksperymentu pomiarowego woltomierz mierzy napięcie U_w z rozdzielczością 0,1 mV, natomiast fazomierz mierzy kąt przesunięcia fazowego φ z rozdzielczością 0,1°. W tabeli 1 przedstawiono wartości napięcia U_w oraz kąta φ , odpowiadające przykładowej, 1, 5 oraz 10% zmianie wartości ΔC_1 oraz ΔC_3 względem wartości C . Wartości wyznaczono po podstawieniu wyrażeń (6) i (7) do zależności (4) oraz (5) i przyjęciu przedstawionych założeń (3).

Tab. 1. Parametry napięcia nierównowagi mostka
Tab. 1. Parameters of the bridge unbalance voltage

Przypadek	U_w , mV	φ , °
1a: $\Delta C_1 = 0,01C$ $\Delta C_3 = 0,01C$	17,6	44,9
1b: $\Delta C_1 = 0,01C$ $\Delta C_3 = -0,01C$	39,5	161,7
2a: $\Delta C_1 = 0,05C$ $\Delta C_3 = 0,05C$	87,3	44,3
2b: $\Delta C_1 = 0,05C$ $\Delta C_3 = -0,05C$	197,4	162,0
3a: $\Delta C_1 = 0,1C$ $\Delta C_3 = 0,1C$	172,2	43,7
3b: $\Delta C_1 = 0,1C$ $\Delta C_3 = -0,1C$	395,0	162,5

Dla zmiennych wejściowych przyjęto wartości nominalne, graniczne wartości błędów wartości nominalnych oraz założono kształty rozkładów prawdopodobieństwa błędów w zakresie wartości granicznych (tabela 2).

Tab. 2. Parametry rozkładów zmiennych wejściowych
Tab. 2. Parameters of input variable distributions

Zmienna wejściowa	Wartość nominalna zmiennej wejściowej	Graniczna wartość błędu określenia w zmiennej we.	Kształt rozkładu wartości błędów zmiennej we.
C , pF	100	$\pm 1\%$ w. nominalnej	normalny
U_z , V	10,00	$\pm 0,1\%$ w. wskazania	jednostajny
U_w , mV	wg tabeli 1	$\pm 1\%$ w. wskazania	jednostajny
φ , °	wg tabeli 1	$\pm 1^\circ$	jednostajny

Względnie duża graniczna wartość błędu pomiaru kąta fazowego wynika z faktu, iż podczas rzeczywistych pomiarów fazomierz pracuje w niekorzystnych warunkach, porównując napięcia różniące się o dwa-trzy rzędy wartości. Założono, że w trakcie eksperymentu pomiarowego napięcie U_z mierzone będzie przyrządem o dokładności dziesięciokrotnie lepszej niż dokładność woltomierza mierzącego U_w . Przyjęto wartość częstotliwości f zasilającego mostek 15,9155 kHz i założono, że jest to wartość dokładna. Dla tej częstotliwości, zgodnie z (3), wartość nominalna rezystancji R wynosi 100 k Ω z tolerancją $\pm 1\%$.

W tabeli 3 przedstawiono wyniki modelowania rzeczywistej pracy mostka. Parametrami rozkładów zmiennych wyjściowych są: wartości średnie $\overline{\Delta C_1}$, $\overline{\Delta C_3}$ oraz wartości niepewności standardowych (względnych) $u_{rel}(\Delta C_1)$, $u_{rel}(\Delta C_3)$ rozkładu wartości ΔC_1 i ΔC_3 . Jako miary dokładności wyznaczenia wartości średnich przyjęto niepewności rozszerzone (względne)

$U_{0,95,rel}(\Delta C_1)$, $U_{0,95,rel}(\Delta C_3)$ dla prawdopodobieństwa rozszerzenia $p = 0,95$, wyznaczone jako połowa szerokości przedziału, będącego różnicą wartości kwantyli rzędu 0,975 i 0,025 rozkładu wartości ΔC_1 i ΔC_3 względem wartości średnich:

$$U_{0,95,rel}(\Delta C_1) = \frac{1}{2} \frac{G^{-1}(0,975) - G^{-1}(0,025)}{|\overline{\Delta C_1}|}, \quad (8)$$

$$U_{0,95,rel}(\Delta C_3) = \frac{1}{2} \frac{G^{-1}(0,975) - G^{-1}(0,025)}{|\overline{\Delta C_3}|}, \quad (9)$$

gdzie: $G^{-1}(0,025)$, $G^{-1}(0,975)$ - kwantyle rzędu 0,025 i 0,975.

Tab. 3. Parametry rozkładów zmiennych wyjściowych
Tab. 3. Parameters of output variable distributions

Przypadek	$\overline{\Delta C_1}$,	$u_{rel}(\Delta C_1)$,	$U_{0,95,rel}(\Delta C_1)$,
	$\overline{\Delta C_3}$,	$u_{rel}(\Delta C_3)$,	$U_{0,95,rel}(\Delta C_3)$,
	pF	%	%
1a	1,0	1,2	2,3
	1,0	0,67	1,2
1b	1,0	3,1	5,3
	-1,0	2,1	3,7
2a	5,0	1,3	2,3
	5,0	0,68	1,2
2b	5,0	3,2	5,5
	-5,0	1,9	3,4
3a	10	1,3	2,4
	10	0,68	1,3
3b	10	3,4	5,8
	-10	1,8	3,2

W tabeli 4 przedstawiono przykładowe kształty rozkładu wartości ΔC_1 i ΔC_3 dla wszystkich omawianych przypadków. Na osi odciętych umieszczono wartości zmian pojemności, na osi rzędnych wartości częstości względnej, wyrażonej w procentach.

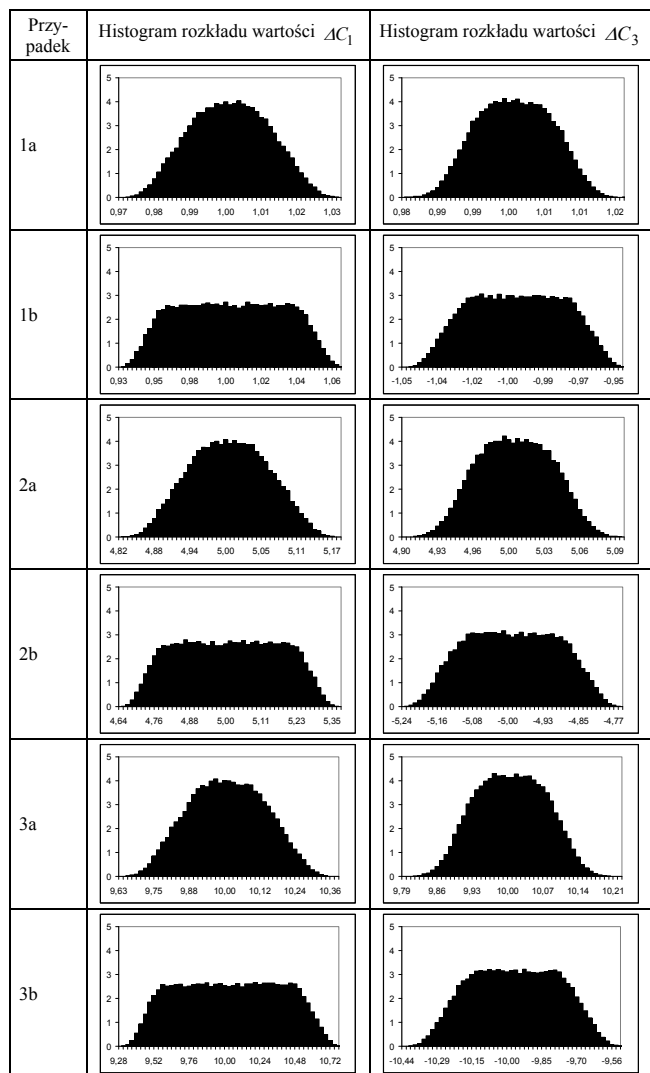
4. Podsumowanie

Wykorzystując metodę symulacji Monte Carlo można wyznaczyć zarówno kształty rozkładów wartości zmian pojemności ΔC_1 i ΔC_3 , jak i podstawowe parametry tych rozkładów.

Analizując wartości otrzymane w tabeli 3 oraz kształty histogramów w tabeli 4 można wyciągnąć następujące wnioski:

- Dla przypadków, w którym oba czujniki zmieniają wartość pojemności z tym samym znakiem, kształt rozkładu wartości ΔC_1 i ΔC_3 zbliżony jest do rozkładu normalnego (1a, 2a, 3a).
- Dla przypadków, w którym wartość pojemności jednego czujnika rośnie a drugiego maleje, kształt rozkładu wartości ΔC_1 i ΔC_3 zbliżony jest do rozkładu trapezowego (1b, 2b, 3b).
- Dla wszystkich przypadków wartości niepewności standardowych rozkładu wartości ΔC_1 są około 1,5-2 razy większe niż wartości niepewności standardowej rozkładu wartości ΔC_3 .
- Dla przypadków 1a, 2a, 3a wartości niepewności standardowych rozkładów wartości ΔC_1 oraz ΔC_3 , wraz ze wzrostem wartości ilorazu $\Delta C/C$, nieznacznie rosną.
- Dla przypadków 1b, 2b, 3b wartości niepewności standardowych rozkładów wartości ΔC_1 , wraz ze wzrostem ilorazu $\Delta C/C$, nieznacznie rosną natomiast wartości niepewności standardowych rozkładów wartości ΔC_3 nieznacznie maleją.

Tab. 4. Rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych wyjściowych
Tab. 4. Probability distributions of output variables



5. Literatura

- Warsza Z. L.: Immitacyjne układy czterobiegunowe (4T) w pomiarach wieloparametrowych. Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów, Warszawa, 2004.
- Rylski A.: Układ elektroniczny z mostkiem do jednoczesnego pomiaru dwóch wartości tego samego rodzaju wielkości. Patent nr 205417, Urząd Patentowy Rzeczypospolitej Polskiej, Warszawa, 2010.
- Rylski A., Wojturski J.: Analiza pracy mostka do jednoczesnego pomiaru zmiany pojemności dwóch czujników pojemnościowych. Przegląd Elektrotechniczny, R. 88, s. 104-106, 2012.
- Fotowicz P.: Nowe podejście w dziedzinie wyrażania niepewności pomiaru. Pomiary Automatyka Robotyka, nr 7-8, s. 34-37, 2006.
- Willink R.: On using the Monte Carlo method to calculate uncertainty intervals. Metrologia, vol. 43, s. L39-L42, 2006.
- Zakharov I. P., Vodotyka S. V.: Application of Monte Carlo simulation for the evaluation of measurement uncertainty. Metrology and Measurement Systems, vol. XV, s. 117-123, 2008.
- Fotowicz P.: Obliczenia niepewności pomiaru metodą Monte Carlo w arkuszu kalkulacyjnym. Metrologia. Biuletyn GUM, vol. 17, s. 15-18, 2010.
- Chew G., Walczyk T.: A Monte Carlo approach for estimating measurement uncertainty using standard spreadsheet software. Analytical and Bioanalytical Chemistry, 402, s. 2463-2469, 2012.