



**PRZEMYSŁAW
GÓRNAŚ**

Politechnika Poznańska
przemyslaw.gornas@put.
poznan.pl



ANDRZEJ POŻARYCKI

Politechnika Poznańska
andrzej.pozarycki@put.
poznan.pl

Funkcje celu w procedurze analizy odwrotnej opartej na wynikach pomiaru ugięć nawierzchni jezdni

Z definicji, obliczenia odwrotne są procedurą wyznaczenia parametrów dowolnego modelu fizycznego, który wykorzystuje się do matematycznego opisu zachowania się rzeczywistego obiektu. Najczęściej procedurą obliczeniową opiera się na iteracyjnej formule wyznaczenia określonych wartości parametrów modelu, dla których otrzymuje się zadowalającą dokładność aproksymacji zarejestrowanych odpowiedzi modelowanego obiektu [1] odpowiednio dostosowaną funkcją matematyczną. Na algorytm obliczeniowy

realizujący iteracyjną procedurę składa się zbiór procedur analityczno-numerycznych, dla których wyróżnia się podział na trzy elementy:

- 1) model matematyczny obiektu,
- 2) zarejestrowana odpowiedź obiektu na zadane obciążenie,
- 3) algorytm optymalizacyjny.

Dobór poszczególnych elementów jest ściśle zależny od zagadnienia. W tym artykule zagadnienie dotyczy wyznaczenia wartości parametrów modeli nawierzchni jezdni metodą obliczeń odwrotnych na podstawie wyników pomiarów w formie, jaką się uzyskuje przy użyciu urządzeń typu FWD [2], [3]. Wybrane zagadnienie precyzuje elementy procedury obliczeń odwrotnych do:

- 1) mechanicznych modeli systemów wielowarstwowych,
- 2) wyników pomiarów ugięć nawierzchni,
- 3) algorytmów optymalizacji dyskretnej.

W literaturze, można znaleźć relatywnie dużo przykładów dotyczących pierwszego elementu, zarówno w odniesieniu do nawierzchni jezdni, jak i nawierzchni lotniskowych [19]. Ograniczając się tylko do rozwiązań bazujących na równaniach równowagi Burmistera [4], w wielu pracach przedstawiono ich modyfikacje [5], [6], [7], [8]. Drugi z wymienionych elementów ma silnie empiryczny charakter wynikający z metody pomiaru ugięcia nawierzchni, a więc odpowiedzi analizowanego ośrodka na zadane obciążenie. Inspirującą natomiast częścią algorytmów optymalizacyjnych stosowanych do wyznaczenia parametrów modelu nawierzchni jezdni, w szczególności tej opartej na wartościach ugięć oznaczonych na powierzchni najwyższej usytuowanej w przekroju poprzecznym warstwy, jest funkcja celu. Dla obliczeń odwrotnych funkcje celu wykorzystuje się jako kryterium oceny dopasowania teoretycznej odpowiedzi modelu na-

wierzchni do odpowiedzi znanej a priori (np. z pomiarów in situ). Powszechnie stosowaną miarą tego dopasowania jest zależność w postaci RMSE (z ang. *Root-Mean-Squared Error*) [9]. W odniesieniu jednak do analizy odwrotnej dla modeli nawierzchni jezdni taka podstawowa postać funkcji celu podlega ciągłej weryfikacji. W pracy [10] postać RMSE zastąpiono definicją MAE (z ang. *Mean Approximation Error*), a w [12], [13] zastosowano postać AVCF (z ang. *Area Value with Correction Factor*). Na podstawie wyników eksperymentu numerycznego z wykorzystaniem MAE [10] stwierdzono, że warunkiem koniecznym dla akceptacji wyników procedury obliczeń odwrotnych jest uzyskanie wartości błędu MAE mniejszego lub równego 0.1%. Natomiast dla wyników obliczeń z zastosowaniem kryterium AVCF [12], [13] ustalono mniejszą wrażliwość uzyskanych wyników na błędy pomiaru ugięć nawierzchni niż dla obliczeń przeprowadzonych z kryterium RMSE. Istotność uzyskanych w pracach wyników i wniosków jest niepodważalna, jednak jednoznaczne wytypowanie wiodącego kryterium dla obliczeń odwrotnych jest ograniczone, dlatego stanowi ciekawy wątek badawczy.

Motywacja i cel analizy

Odnosząc się do wyników oceny wrażliwości procedury obliczeń odwrotnych na niewielkie zmiany parametrów modelu nawierzchni [14], [15], można dojść do wniosku, że trudno w tym zakresie o uniwersalny algorytm obliczeniowy. Zagadnienie jest jeszcze bardziej niejednoznaczne, gdy do obliczeń włącza się wyniki badań eksperymentów in situ. W przeciwieństwie do analiz bazujących na danych teoretycznych, wyniki eksperymentu obarczone są błędami pomiarowymi, co utrudnia uzyskanie wiarygodnych wartości obliczeń. W artykule przedstawione są wyniki porównania oznaczenia wartości parametrów modeli nawierzchni jezdni dla trzech różnych funkcji celu: RMSE, MAE i AVCF. Podstawę porównania stanowił eksperyment teoretyczny uwzględniający błędy pomiarowe rejestrowane w trakcie testów urządzeniami FWD.

Analizowane funkcje celu

RMSE

Funkcję celu RMSE (z ang. *Root Mean Squared Error*) [9] wyraża wzór nr 1.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{d_i^c - d_i^m}{d_i^m} \right)^2} \cdot 100 [\%] \quad (1)$$

w którym:

- n – liczba niezależnych wartości składających się na linię przemieszczeń,
- d_i – wartość przemieszczenia w i -tym punkcie pomiaru (odległość geofonu od osi obciążenia) ugięciomierzem typu FWD,
- m, c – indeksy wskazujące odpowiednio na zmierzone i obliczone wartości przemieszczeń.

MAE

Funkcję celu MAE (z ang. Mean approximation error) [10], [11] wyrażają wzory nr 2 i 3.

$$\delta_{MAE} = \frac{\sqrt{F}}{\sum_{i=1}^n d_i^c} \cdot n \cdot 100 [\%] \quad (2)$$

$$F = \sum_{i=1}^n (d_i^c - d_i^m)^2 \quad (3)$$

w których:

- n – liczba niezależnych wartości składających się na linię przemieszczeń,
- d_i – wartość przemieszczenia w i -tym punkcie pomiaru (odległość geofonu od osi obciążenia) ugięciomierzem typu FWD,
- m, c – indeksy wskazujące odpowiednio na zmierzone i obliczone wartości przemieszczeń.

AVCF

Funkcję celu AVCF (z ang. Area Value with Correction Factor) [12], [13] wyrażają wzory nr 4 i 5.

$$\delta_{AVCF} = \left\{ \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{A_k^c - A_k^m}{A_k^m} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left| \frac{d_1^c - d_1^m}{d_1^m} \right| [-] \quad (4)$$

$$A_k = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (d_i + d_{i+1}) \cdot (r_{i+1} - r_i)}{2 \cdot d_1}, k \leq n \quad (5)$$

w których:

- n – liczba niezależnych wartości składających się na linię przemieszczeń,

d_i – wartość przemieszczenia w i -tym punkcie pomiaru (odległość geofonu od osi obciążenia) ugięciomierzem FWD,

r_i – odległość i -tego punktu pomiaru/obliczeniowego przemieszczenia od osi obciążenia,

A_i – parametr skalujący dla i -tego punktu pomiaru/obliczeniowego przemieszczenia,

m, c – indeksy wskazujące odpowiednio na zmierzone i obliczone wartości przemieszczeń.

Założenia eksperymentu numerycznego

Danymi wejściowymi dla przeprowadzonego eksperymentu numerycznego były wyniki obliczeń dla modelu nawierzchni jezdni opartego na teorii warstw sprężystych, spoczywających na półprzestrzeni sprężystej, nazywanych w dalszej części pracy modelami LET (z ang. *Layers Elastic Theory models*) [16]. Parametry modelu nawierzchni dobrano tak, aby w swoim zakresie odpowiadały warunkom w trakcie wykonywania pomiaru ugięciomierzem dynamicznym typu FWD. Jako model obciążenia przyjęto obciążenie równomiernie rozłożone na powierzchni kołowej o promieniu równym 0,15 m i wartości 50 kN. W celu złagodzenia niekorzystnych skutków założenia dla poszczególnych warstw modelu stałej wartości współczynników Poissona ($\nu = 0, 3$) [10], do obliczeń zaadoptowano statyczny model obciążenia nawierzchni jezdni. Założenie statycznego modelu dla definicji jego poszczególnych warstw, wiązało się z określeniem dla jednej warstwy modelu wartości trzech parametrów: grubości (h), modułu sprężystości (E), współczynnika Poissona (ν). Do obliczeń przyjęto numerację warstw i ich parametrów (np. E_1, E_2, \dots, E_i), zaczynając od najwyższej usytuowanej, do której bezpośrednio przyłożone jest obciążenie. Usytuowanie punktów obliczeniowych wartości ugięć modelu przyjęto tożsame z lokalizacją geofonów (punktów pomiaru ugięć), jaką stosuje się powszechnie w ugięciomierzach dynamicznych typu FWD. Do analizy wybrano przypadek krzywej ugięć zbudowanej na podstawie 7 punktów oddalonych od osi obciążenia o dystans, kolejno: $U_0 = 0,0$; $U_{30} = 0,3$; $U_{60} = 0,6$; $U_{90} = 0,9$; $U_{120} = 1,2$; $U_{150} = 1,5$; $U_{180} = 1,8$ [m].

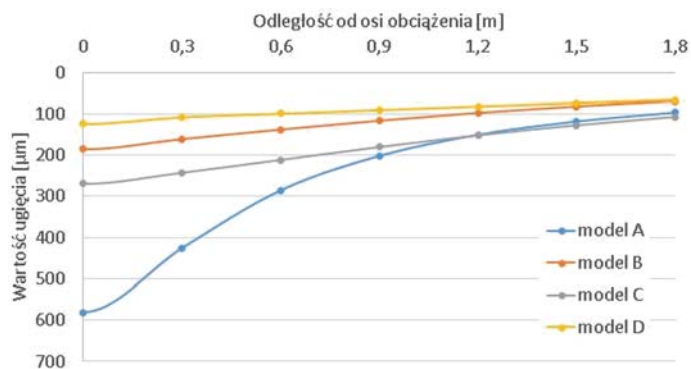
W pierwszym kroku eksperymentu wykonano obliczenia dla czterech modeli nawierzchni, których wartości przyjętych parametrów odpowiadały w swoim zakresie czterem różnym typowym konstrukcjom górnych warstw nawierzchni podanym w katalogu [17]. Parametry modeli obliczeniowych zebrano w tabeli 1. Wyniki obliczeń dla analizowanych modeli zebrano w tabeli 2 oraz przedstawiono na rysunku nr 1.

Tabela 1. Zebranie parametrów obliczeniowych analizowanych modeli nawierzchni

Model	Typowa konstrukcja		Modelowana warstwa			E1	E2	E3	h1	h2
	TYP	Kategoria ruchu	[-]			[MPa]			[m]	
A	A1	KR 1	pakiet warstw asfaltowych	warstwa kruszywa C90/3	Dolne warstwy konstrukcji nawierzchni	8400	400	80	0,09	0,20
B	A1	KR 7				9800	400	120	0,30	0,20
C	C	KR 1		warstwa związana spoiwem hydraulicznym		8400	15100	80	0,09	0,18
D	C	KR 7				9800	15100	120	0,24	0,24

Tabela 2. Zbiorcze zestawienie wartości przemieszczeń obliczonych dla analizowanych modeli nawierzchni

Model	U_0	U_{30}	U_{60}	U_{90}	U_{120}	U_{150}	U_{180}
	[μm]						
A	580,9	425,4	285,1	201,4	150,1	117,7	96,4
B	185,5	160,7	137,8	116,5	97,9	82,4	69,8
C	269,0	242,0	211,3	180,2	152,1	128,0	108,0
D	124,0	107,5	99,0	90,4	81,8	73,7	66,1



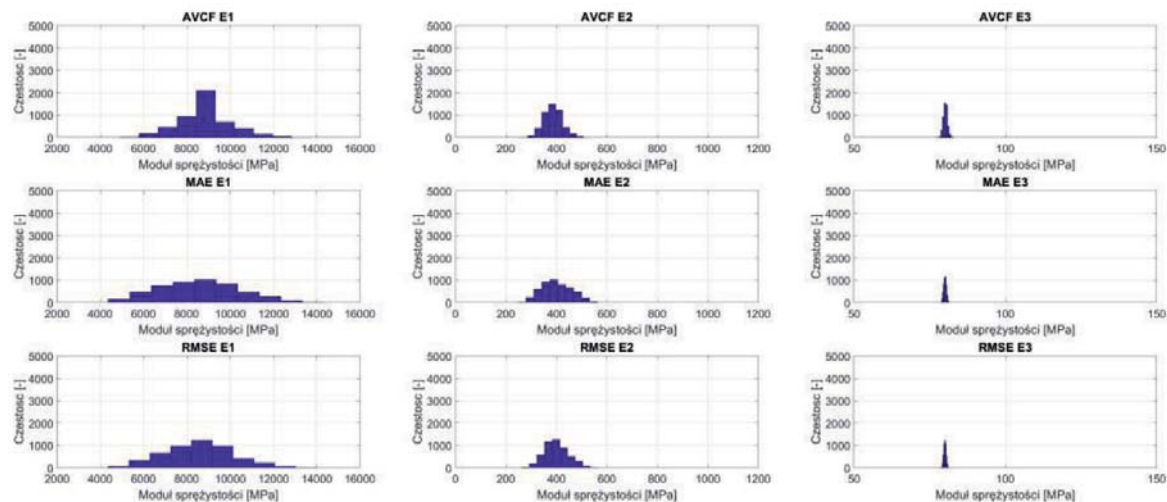
Rys. 1. Krzywe zbudowane w oparciu o obliczone wartości przemieszczeń

Następnie, mając na celu uwzględnienie w eksperymencie numerycznym błędów pomiarowych rejestrowanych w trakcie testów urządzeniami typu FWD, wartości linii przemieszczeń zmieniono w zakresie $\pm 2\%$ (w nawiązaniu do dokładności pomiaru przemieszczeń deklarowanych przez producentów urządzeń typu FWD). Proces ten wykonano poprzez dodanie do wartości linii przemieszczeń tzw. białego szumu, czego następstwem było opracowanie bazy wyników po 5000 liniach przemieszczeń dla każdego z analizowanych modeli.

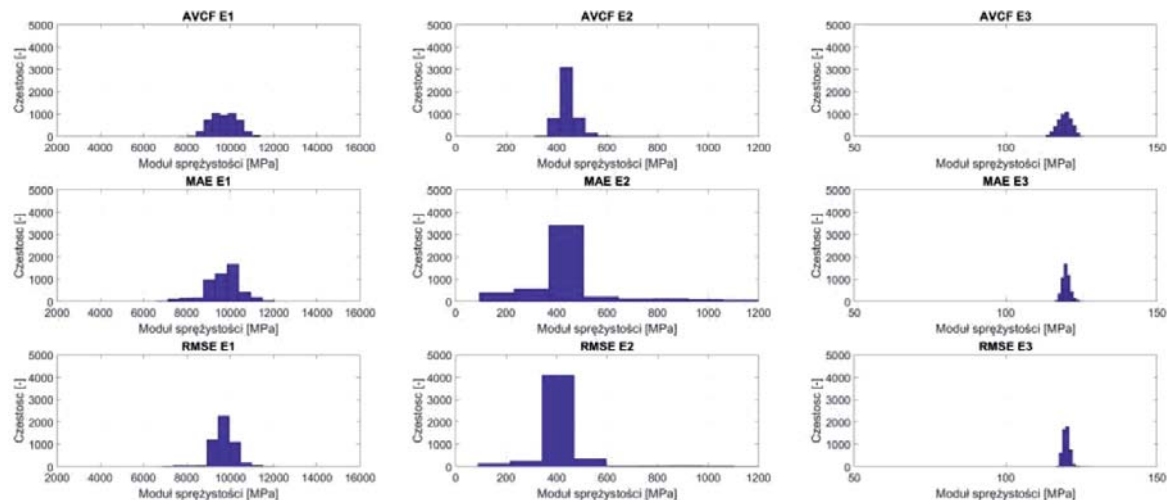
Dla wszystkich 20000 (4 modele \times 5000) linii przemieszczeń, przeprowadzono obliczenia wykorzystując kolejno funkcje celu RMSE, MAE i AVCF. Wynikiem obliczeń były wartości modułów sprężystości poszczególnych warstw modeli. Do obliczeń odwrotnych wykorzystano algorytm optymalizacyjny *Nelder Mead* [18], a za tzw. wartości startowe w algorytmie przyjęto wartości modułów odpowiadające modelom wyjściowym. Z założenia chodziło o ograniczenie wpływu wartości startowych na uzyskane rezultaty, a więc ograniczenie wpływu czynników, które nie podlegały rozważaniom.

Wyniki eksperymentu numerycznego

Wynikiem eksperymentu numerycznego były obliczone wartości modułów sprężystości warstw, które przedstawiono kolejno na rysunkach 2, 3, 4, 5.

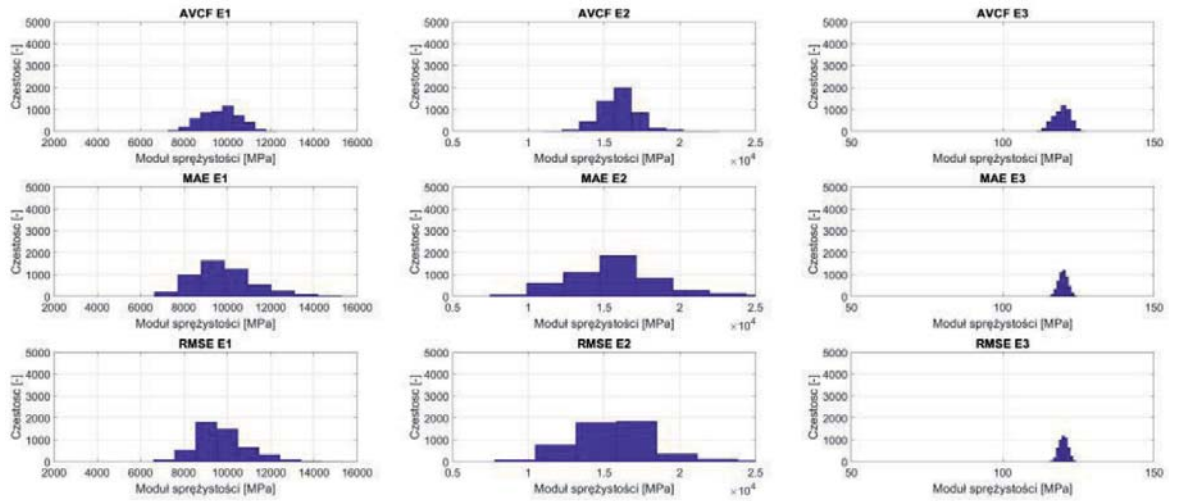


Rys. 2. Histogramy zidentyfikowanych wartości w procedurze obliczeń odwrotnych dla bazy linii przemieszczeń odpowiadających modelowi A

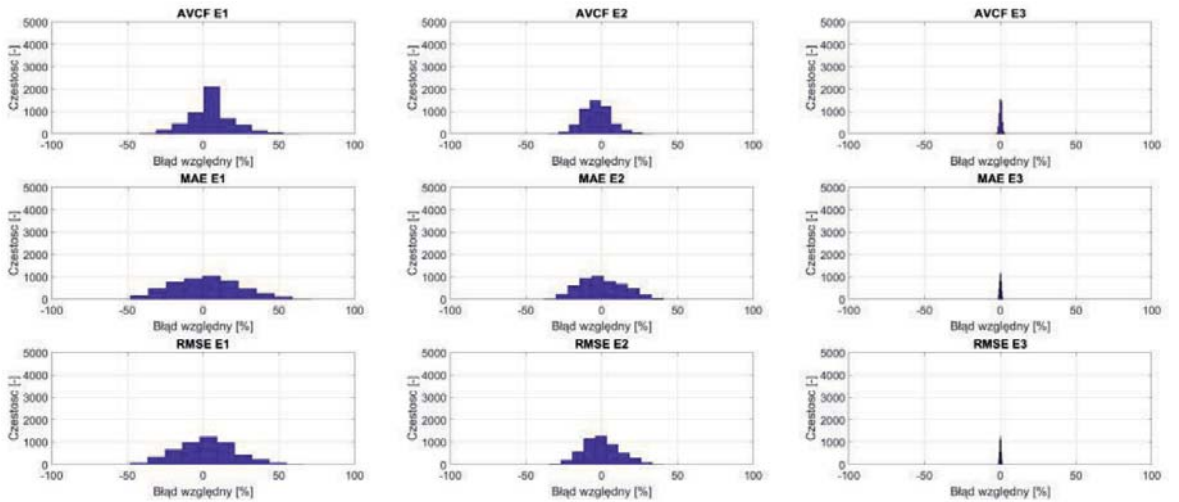


Rys. 3. Histogramy zidentyfikowanych wartości w procedurze obliczeń odwrotnych dla bazy linii przemieszczeń odpowiadających modelowi B

Rys. 4. Histogramy zidentyfikowanych wartości w procedurze obliczeń odwrotnych dla bazy linii przemieszczeń odpowiadających modelowi C



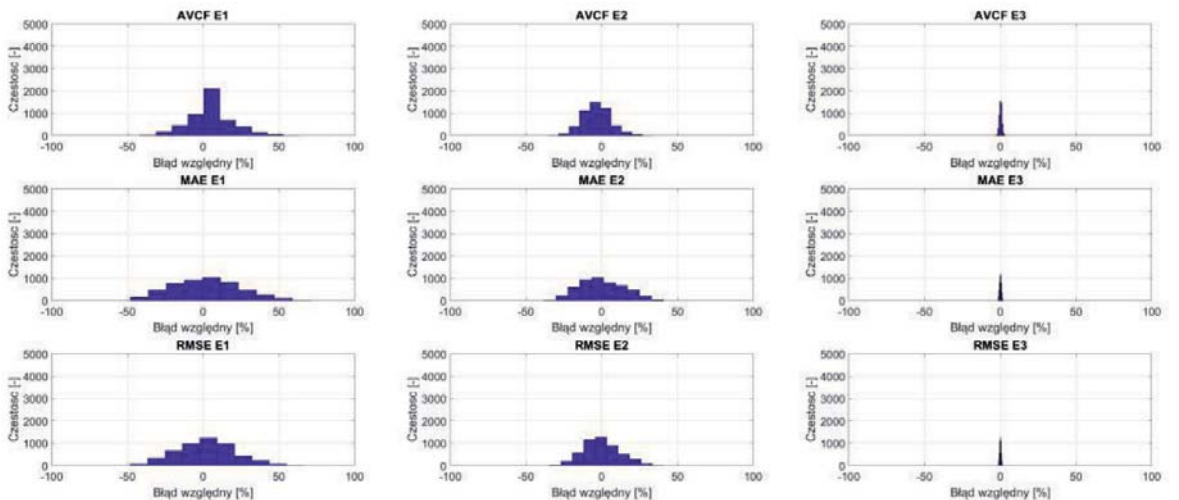
Rys. 5. Histogramy zidentyfikowanych wartości w procedurze obliczeń odwrotnych dla bazy linii przemieszczeń odpowiadających modelowi D



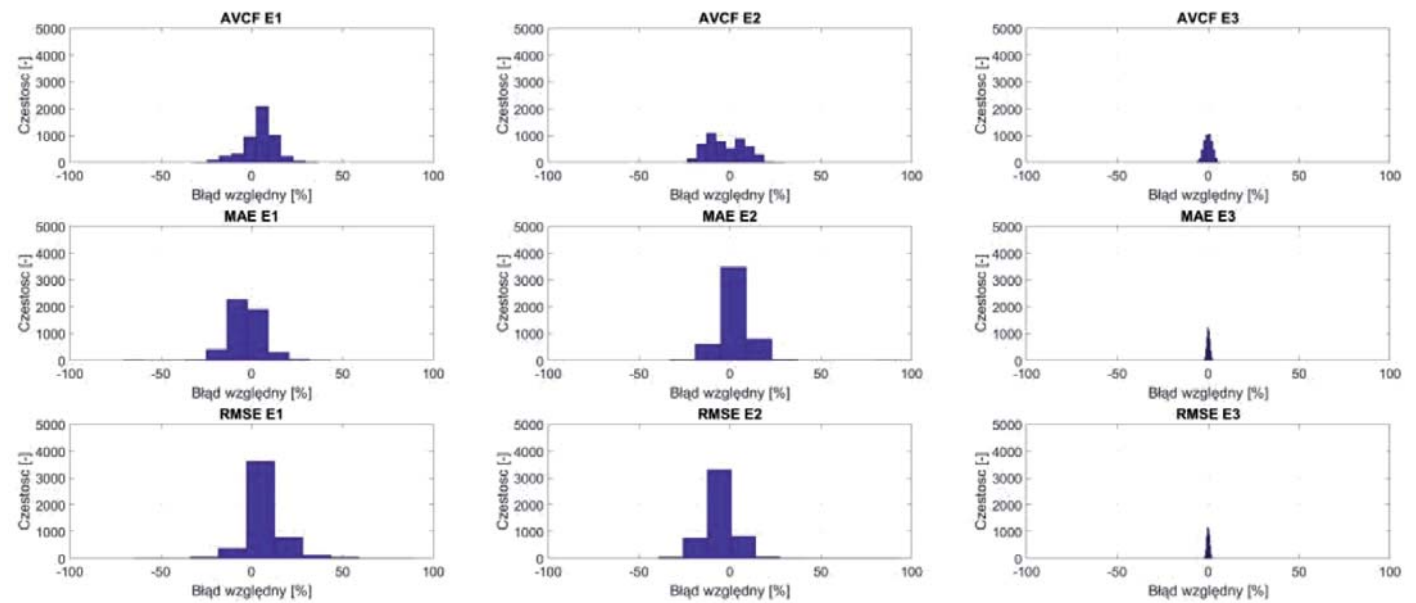
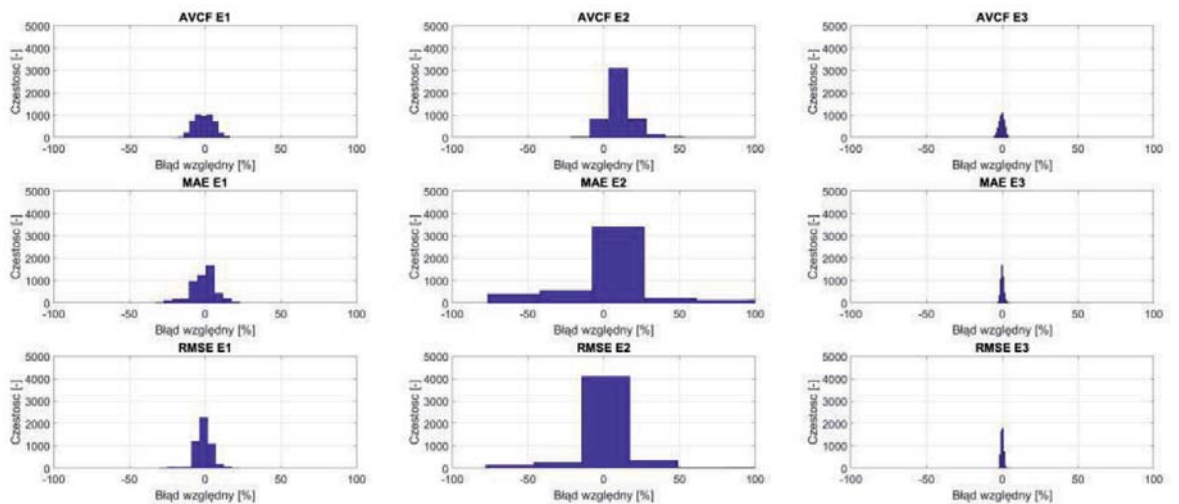
Zastosowane w procedurze odwrotnej funkcje celu, ocenione zostały pod kątem wartości błędów względnych obliczonych w odniesieniu do wartości modułów dla wyjścio-

wych modeli nawierzchni (wartości referencyjnych). Wyniki obliczeń są przedstawione na rysunkach 6, 7, 8, 9.

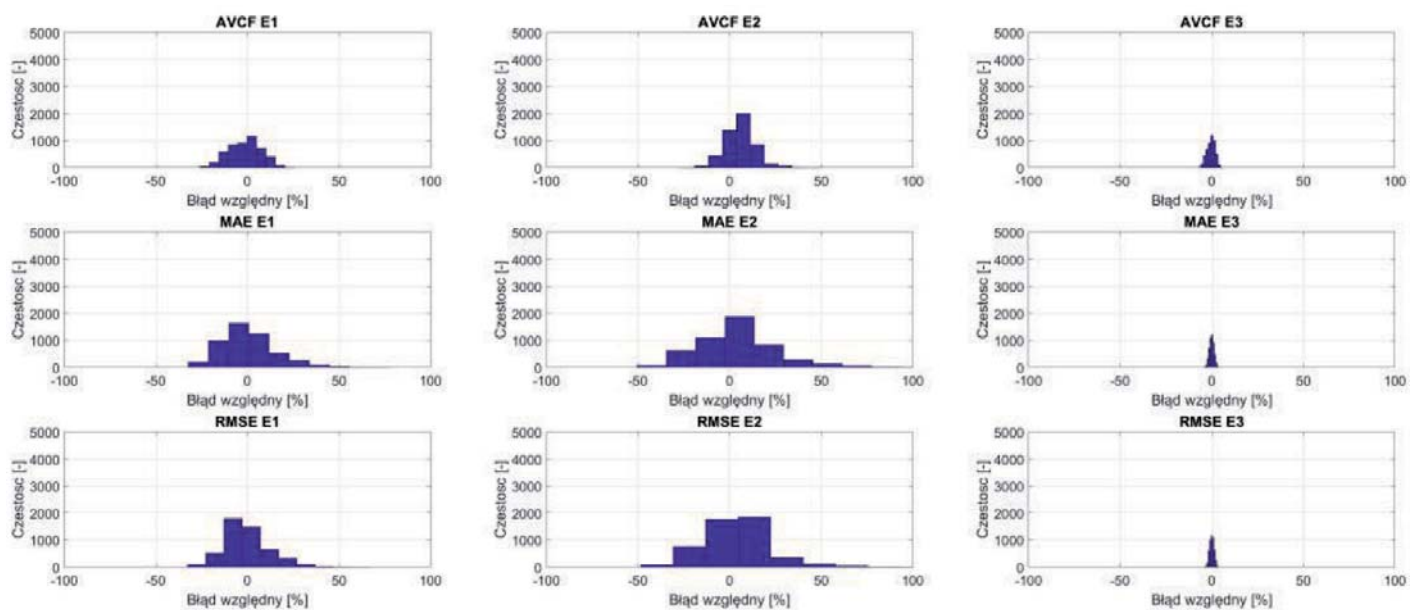
Rys. 6. Rozkłady empiryczne wartości błędów względnych dla obliczonych wartości modułów sprężystości warstw odpowiadających modelowi A



Rys. 7. Rozkłady empiryczne wartości błędów względnych dla obliczonych wartości modułów sprężystości warstw odpowiadających modelowi B



Rys. 8. Rozkłady empiryczne wartości błędów względnych dla obliczonych wartości modułów sprężystości warstw odpowiadających modelowi C



Rys. 9. Rozkłady empiryczne wartości błędów względnych dla obliczonych wartości modułów sprężystości warstw odpowiadających modelowi D

Podsumowanie

W artykule opisano analizę wyników obliczeń odwrotnych, które zmierzały do porównania wartości identyfikowanych parametrów modeli nawierzchni jezdni uzyskiwanych przy użyciu trzech różnych funkcji celu: RMSE, MAE i AVCF. Z przeglądu literatury wiadomo, że w przypadku wykorzystania procedury obliczeń odwrotnych bazujących na rzeczywistych wynikach pomiaru ugięć nawierzchni (a nie tych uzyskanych na podstawie modeli numerycznych), kryterium AVCF cechuje mniejsza wrażliwość na błędy pomiarowe w porównaniu np. do kryterium RMSE. Podstawę weryfikacji tej hipotezy w tym artykule, stanowi wprawdzie eksperyment teoretyczny, jednak wszystkie wartości ugięć, które zostały obliczone na podstawie modeli numerycznych, zostały poddane procesowi zaszumienia. W procesie zaszumienia wykorzystany został tzw. biały szum, którego parametry ustalone zostały na podstawie rzeczywistego zbioru wyników z pomiarów ugięć nawierzchni jezdni urządzeniami typu FWD. Uzyskane wartości odchyłeń standardowych opisujących zmienność i rozrzuty wokół wartości średnich arytmetycznych obliczonych dla błędów względnych identyfikowanych wielkości zebrano w tabeli 3.

Tabela 3. Obliczone wartości odchyłeń standardowych dla błędów względnych modułów sprężystości warstw analizowanych modeli

Model	Postać funkcji celu	Odchylenie standardowe błędów względnych [MPa]		
		E1	E2	E3
A	AVCF	14,1	9,0	0,9
	MAE	21,8	14,5	0,6
	RMSE	18,9	11,9	0,5
B	AVCF	6,1	9,2	1,8
	MAE	8,1	42,9	1,1
	RMSE	5,5	26,6	0,9
C	AVCF	8,7	10,0	2,1
	MAE	10,2	10,4	0,8
	RMSE	10,4	8,7	0,7
D	AVCF	8,7	8,0	2,2
	MAE	14,6	21,1	1,2
	RMSE	12,5	18,4	1,2

Z analizy ograniczonej do klasycznej miary zróżnicowania wyniku, że najbardziej ustabilizowane wartości odchyłeń standardowych w zbiorze wyników uzyskanych na podstawie procedury obliczeń odwrotnych zwraca kryterium AVCF. Dla analizowanego zakresu przypadków, 95% wartości jest mniejsza niż 14 MPa. Dla kryteriów MAE i RMSE wartości są odpowiednio równe 49 i 26 MPa. Z praktycznego punktu widzenia zaobserwowane różnice nie są duże. Jednak w konfrontacji z typowym zachowaniem się algorytmów optymalizacyjnych w tego typu zagadnieniach (gdzie często małym zmianom wartości startowych towarzyszą duże zmiany wartości obliczonych), kryterium AVCF warto wziąć pod uwagę w praktycznej realizacji obliczeń przy wykorzystaniu metod mechanistycznych na potrzeby projektów wzmocnienia nawierzchni jezdni. Należy podkreślić, że kryterium AVCF jest domyślnym wyborem przy realizacji procedur oblicze-

niowych [20] w technologii ZiSPON wdrażanej w Polsce za sprawą prac zrealizowanych w ramach grantu NCBiR [21].

Literatura

- [1] Górnaś P., Pożarycki A., Selected properties of FEM numerical models for inverse analysis of road pavement structures, *Roads and Bridges – Drogi i Mosty*, 13 (3), 203–222, 2014
- [2] Sebaaly B., Davis T. G., Mamlouk M. S., Dynamics of Falling Weight Deflectometer, *Journal of Transportation Engineering*, 111(6), 618-632, 1985
- [3] Nega A., Nikraz H., Al-Qadi I. L., Dynamic analysis of falling weight deflectometer, *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 3(5), 427-437, 2016
- [4] Burmister D. M., The theory of stresses and displacements in layered systems and applications to the design of airport runways, *Proceedings Highway Research Board*, 23, 126-148, 1943
- [5] Ullidtz P., Pavment analysis, *Development in Civil Engineering*, 19, 1987
- [6] Van Cauwelaert F., Pavement Design And Evaluation The Required Mathematics And Its Applications, Federation of the Belgian Cement Industry B-1170 Brussels, Rue Volta 9, 2003
- [7] Maina J., Matsui K., Elastic Multi-layered Analysis Using DE-Integration, 41, 853-867, 2005
- [8] Firlej S., Wyznaczenie parametrów modelu nawierzchni drogowej z dynamicznych badań FWD, *Monografie – Politechnika Lubelska*, Lublin, 2015
- [9] EVERSERIES User's Guide, Washington State Department of Transportation, 2005
- [10] Szydło A., Static identification of the parameters of air field pavement models, *Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, Oficyna wydawnicza Politechniki Wrocławskiej*, 47(17), 1995
- [11] Szydło A., Krawczyk B., Ruttmar I., Rozrzuty wyników pomiarów przemieszczeń nawierzchni rejestrowanych za pomocą ugięciomierza dynamicznego FWD, *Międzynarodowa Konferencja Nowoczesne Technologie w Budownictwie Drogowym*, Poznań, 2009
- [12] Pan E., Sangghaleh A., Molavi A., Zhao Y., Yi P., An efficient and accurate genetic algorithm for backcalculation of flexible pavement layer moduli, *The University of Akron*, 2012
- [13] Sangghaleh A., Pan E., Green R., Wang R., Liu X., Cai Y., Backcalculation of pavement layer elastic modulus and thickness with measurement errors, *International Journal of Pavement Engineering*, 6(15), 521-531, 2013
- [14] Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M., Tarantola S., *Global Sensitivity Analysis*, John Wiley & Sons, 2008
- [15] Garbowski T., Pożarycki A., Study on sensitivity of enhanced FWD testing data to pavement model parameters, 11th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI), Session on Industrial Applications of Computational Solid Mechanics and Related Techniques III, July, 2014
- [16] Firlej S., *Mechanika nawierzchni drogowej*, Petit s.c., Lublin, 2007
- [17] Judycki J., Jaskuła P., Pszczoła M., Alenowicz J., Dołycki B., Jaczewski M., Rys D., Stiens M., *Katalog typowych konstrukcji nawierzchni podatnych i półsztywnych*, GDDKiA, czerwiec 2014
- [18] Fuchang G., Lixing H., Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameters, *Computational Optimization and Applications*, 51(1), 259-277, 2012
- [19] Wesołowski Mariusz, APCI Evaluation Method for Cement Concrete Airport Pavements in the Scope of Air Operation Safety and Air Transport Participants Life, *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 2020-03-04 | journal-article, DOI: 10.3390/ijerph17051663
- [20] Pożarycki A., Górnaś P., Turkot A., Oprogramowanie komputerowe elementów elektronicznych systemu ZiSPON, *Instytut Inżynierii Lądowej, Politechnika Poznańska*, 2020
- [21] Pożarycki A., Górnaś P., Raport cząstkowy z realizacji projektu naukowego PBS3/B6/38/2015 finansowanego przez Narodowe Centrum Badań i Rozwoju. Część inżyniersko-badawcza. Zadanie nr 4. Część B1. Precyzyjny system identyfikacji parametrów nośności konstrukcji jezdni w prognozowaniu czasu życia nawierzchni drogowych, r512052/2017, *Politechnika Poznańska*, 2017