

prof. dr hab. inż. Edward WŁODARCZYK *
mjr dr inż. Jacek JANISZEWSKI *
kpt. dr inż. Mariusz MAGIER **
* Wojskowa Akademia Techniczna
** Wojskowy Instytut Techniczny Uzbrojenia

DYNAMIKA TYLNEJ CZĘŚCI RDZENIA WYDŁUŻONEGO POCISKU PODKALIBROWEGO PODCZAS STRZAŁU cz. II

W pracy wyprowadzono zamknięte analityczne wzory, które identyfikują stan naprężenia osiowego i prędkości masowej w tylnej części rdzenia wydłużonego pocisku podkalibrowego podczas strzału. Z analizy tych wzorów wynika, że naprężenie osiowe w rdzeniu zmienia się w sposób pulsacyjny. Koncentracja naprężeń występuje na styku rdzenia z tylną półką sabotu. Uzyskane wzory analityczne mogą służyć do obliczeń komputerowych.

1. Wstęp

W niniejszej części wyprowadzono zamknięte analityczne wzory, które identyfikują stan naprężenia osiowego i prędkości masowej w tylnej części rdzenia wydłużonego pocisku podkalibrowego podczas strzału. Wyprowadzone wzory pozwoliły stwierdzić pulsację stanu naprężenia w tylnej części rdzenia, na przemian, od wartości ujemnych (ściskanie) do wartości dodatnich (rozciąganie). Zjawisko to szczególnie nasila się w przekroju kontaktu rdzenia z tylną półką sabotu. Ponadto wzory te stanowią test do szacowania dokładności obliczeń komputerowych.

Niniejszy referat jest integralnie związany z pracą [1] - „Dynamika tylnej części rdzenia wydłużonego pocisku podkalibrowego podczas strzału cz. I” i dlatego w dalszym ciągu rozważań będziemy powoływać się na podane tam rysunki i numerację wzorów.

2. Analityczne wzory na naprężenia $\sigma_i(z,t)$ i prędkości $v_i(z,t)$ w poszczególnych obszarach płaszczyzny (z, t)

Obszar 0: ($n = 0, 2n = 0$); $0 \leq z \leq l_1, 0 \leq ct \leq z$ (rys.6, [1]).

Obszar 0 jest strefą bezruchu (pręt niezaburzony) i dlatego:

$$\sigma_0(z,t) \equiv 0 \text{ i } v_0(z,t) \equiv 0. \quad (2.1)$$

Obszar 1: ($n = 0, 2n + 1 = 1$); $0 \leq z \leq l_1, z \leq ct \leq 2l_1 - z$ (rys. 6, [1]).

Zgodnie z wzorami (3.9) i (3.10) oraz (2.1), pola naprężenia $\sigma_1(z,t)$ i prędkości $v_1(z,t)$ w obszarze 1 mają postać:

$$\begin{aligned}\sigma_1(z,t) &\equiv -p_1 = \text{const}, \\ v_1(z,t) &\equiv \frac{p_1}{\rho c} = \text{const}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Obszar 2: ($n = 1$, $2n - 1 = 1$, $2n = 2$); $0 \leq z \leq l_1$, $2l_1 - z \leq ct \leq 2l_1 + z$ (rys.6, [1]).
Z rozwiązania w obszarze **1** i oznaczeń (3.20) wynika, że:

$$v_1\left(0, t_2 - \frac{l_1}{c}\right) = \frac{p_1}{\rho c},\tag{2.3}$$

$$Q(t_2) = \frac{s+1}{m_z} p_1 + \frac{\rho c}{m_z} \frac{p_1}{\rho c} = \frac{s+2}{m_z} p_1.$$

Po podstawieniu (2.3)₂ do wzoru (3.21) i scałkowaniu otrzymuje się:

$$v_2(l_1, t_2) = (s+2) \frac{p_1}{\rho c} + C_2 e^{-Pt_2}.\tag{2.4}$$

Dla $t_2 = l_1/c$ będzie:

$$v_2\left(l_1, \frac{l_1}{c}\right) = v_1\left(l_1, \frac{l_1}{c}\right) = 0.\tag{2.5}$$

Z (2.4) i (2.5) wynika, że:

$$C_2 = -(s+2) \frac{p_1}{\rho c} e^{\frac{\rho l_1}{m_z}}.\tag{2.6}$$

Po podstawieniu (2.6) do (2.4) i przekształceniach jest:

$$v_2(l_1, t_2) = (s+2) \frac{p_1}{\rho c} \left[1 - e^{\frac{\rho l_1}{m_z} \left(1 - \frac{ct_2}{l_1}\right)} \right].\tag{2.7}$$

Dalej, z wzorów (3.26), (2.7) i rozwiązania w obszarze **1**, po wykorzystaniu relacji (3.13) otrzymuje się:

$$v_2(z, t) = (s+2) \frac{p_1}{\rho c} \left[1 - e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 2\right)} \right].\tag{2.8}$$

Naprężenie $\sigma_2(z, t)$, zgodnie z wzorami (3.25), (2.2) i (2.8) oraz (3.13) ma postać:

$$\sigma_2(z, t) = p_1 \left[s - (s+2) e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 2\right)} \right].\tag{2.9}$$

W ten sposób uzyskano zamknięte analityczne wzory identyfikujące naprężenie $\sigma_2(z, t)$ i prędkość $v_2(z, t)$ w obszarze 2.

Obszar 3: ($n = 1, 2n = 2, 2n + 1 = 3$); $0 \leq z \leq l_1, 2l_1 + z \leq ct \leq 4l_1 - z$ (rys.6, [1]).

Ze wzorów (2.8) i (2.9) wynika, że:

$$\left. \begin{aligned} v_2(l_1, t_2) &= (s+2) \frac{p_1}{\rho c} \left[1 - e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_2}{l_1} - 1 \right)} \right], \\ v_2(l_1, t_2') &= (s+2) \frac{p_1}{\rho c} \left[1 - e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_2'}{l_1} - 1 \right)} \right], \\ \sigma_2(l_1, t_2) &= p_1 \left[s - (s+2) e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_2}{l_1} - 1 \right)} \right], \\ \sigma_2(l_1, t_2') &= p_1 \left[s - (s+2) e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_2'}{l_1} - 1 \right)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Po podstawieniu wyrażeń (2.10) do wzorów rekurencyjnych (3.9) i (3.10) oraz uwzględnieniu faktu, że zgodnie z relacjami (3.11) otrzymuje się:

$$\frac{ct_2}{l_1} - 1 = \frac{z + ct}{l_1} - 2, \quad \frac{ct_2'}{l_1} - 1 = -\left(\frac{z - ct}{l_1} + 2 \right), \quad (2.11)$$

czyli zamknięte wzory na naprężenie $\sigma_3(z, t)$ i prędkość $v_3(z, t)$ w obszarze 3 w następującej postaci:

$$\sigma_3(z, t) = -p_3 + (2+s)p_1 \left[e^{\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z-ct}{l_1} + 2 \right)} - e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 2 \right)} \right], \quad (2.12)$$

$$v_3(z, t) = \frac{1}{\rho c} \left\{ p_3 + 2(s+1)p_1 - (s+2)p_1 \left[e^{\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z-ct}{l_1} + 2 \right)} + e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 2 \right)} \right] \right\}. \quad (2.13)$$

Obszar 4: ($n = 2, 2n = 4, 2n - 1 = 3$), $0 \leq z \leq l_1, 4l_1 - z \leq ct \leq 4l_1 + z$ (rys.6, [1]).

Zgodnie z metodyką obliczeń opisaną w punkcie 3.3 [1], jako pierwszą w kolejności należy określić prędkość $v_4(l_1, t_4)$. W tym celu należy zidentyfikować funkcję $Q_4(t_4)$. Z wzoru (3.20) wynika, że:

$$Q_4(t_4) = \frac{s+1}{m_z} p_3 + \frac{\rho c}{m_z} v_3 \left(0, t_4 - \frac{l_1}{c} \right). \quad (2.14)$$

Z kolei, wykorzystując rozwiązanie w obszarze **3** (4.13) uzyskuje się zależność:

$$v_3 \left(0, t_4 - \frac{l_1}{\rho c} \right) = \frac{1}{\rho c} \left[p_3 + 2(s+1)p_1 - 2(s+2)p_1 e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4}{l_1} - 3 \right)} \right]. \quad (2.15)$$

Po podstawieniu (2.15) do (2.14) i przekształceniach otrzymuje się ostateczną postać funkcji $Q_4(t_4)$:

$$Q_4(t_4) = \frac{2(s+1)}{m_z} p_1 + \frac{s+2}{m_z} p_3 - \frac{2(s+2)}{m_z} p_1 e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4}{l_1} - 3 \right)}. \quad (2.16)$$

Dalej, wykorzystując wzory (2.16) i (3.21), po scałkowaniu otrzymuje się:

$$v_4(l_1, t_4) = \frac{1}{\rho c} \left\{ (s+2)p_3 + 2(s+1)p_1 - 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \frac{ct_4}{l_1} e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4}{l_1} - 3 \right)} + C_4 e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \frac{ct_4}{l_1}} \right\}. \quad (2.17)$$

Z warunku ciągłości prędkości przemieszczania się masy M_z (3.22), tj.:

$$v_4(l_1, 3l_1/c) = v_2(l_1, 3l_1/c)$$

i zależności (2.17) oraz (2.8) wynika, że:

$$C_4 = \left[-(s+2)p_3 - sp_1 + 6(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \right] e^{3\frac{\rho l_1}{m_z}} - (s+2)p_1 e^{\frac{\rho l_1}{m_z}}. \quad (2.18)$$

Z wzorów (2.17) i (2.18) otrzymuje się ostateczną postać funkcji $v_4(l_1, t_4)$:

$$v_4(l_1, t_4) = \frac{1}{\rho c} \left\{ (s+2)p_3 + 2(s+1)p_1 - \left[(s+2)p_3 + sp_1 - 6(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 + 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \frac{ct_4}{l_1} \right] e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4}{l_1} - 3 \right)} - (s+2)p_1 e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4}{l_1} - 1 \right)} \right\}, \quad (2.19)$$

natomiast z wzoru (2.13) uzyskuje się:

$$v_3(0, t_3) = \frac{1}{\rho c} \left[p_3 + 2(s+1)p_1 - 2(s+2)p_1 e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_3}{l_1} - 2 \right)} \right], \quad (2.20)$$

$$v_3\left(0, t_4 - \frac{l_1}{c}\right) = \frac{1}{\rho c} \left[p_3 + 2(s+1)p_1 - 2(s+2)p_1 e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4}{l_1} - 3 \right)} \right].$$

Po podstawieniu wyrażeń (2.19) i (2.20) do wzorów (3.25) i (3.26) oraz uwzględnieniu faktu, że:

$$\begin{aligned} \frac{ct_4}{l_1} = \frac{z+ct}{l_1} - 1, \quad \frac{ct_4}{l_1} - 1 = \frac{z+ct}{l_1} - 2, \\ \frac{ct_4}{l_1} - 3 = \frac{z+ct}{l_1} - 4, \quad \frac{ct_3}{l_1} - 2 = -\left(\frac{z-ct}{l_1} + 2 \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

otrzymuje się końcową postać analitycznych wzorów, które identyfikują jednoznacznie pola naprężenia i prędkości w obszarze **4**:

$$\begin{aligned} \sigma_4(z, t) = sp_3 + (s+2)p_1 \left[e^{\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z-ct}{l_1} + 2 \right)} - e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 2 \right)} \right] + \\ + \left[2p_1 - (s+2)p_3 - 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{z+ct}{l_1} - 4 \right) \right] e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 4 \right)}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} v_4(z, t) = \frac{1}{\rho c} \left\{ (s+2)p_3 + 2(s+1)p_1 + \left[2p_1 - (s+2)p_3 - 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{z+ct}{l_1} - 4 \right) \right] e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 4 \right)} + \right. \\ \left. - (s+2)p_1 \left[e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 2 \right)} + e^{\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z-ct}{l_1} + 2 \right)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Obszar 5: ($n = 2$, $2n = 4$, $2n + 1 = 5$); $0 \leq z \leq l_1$, $4l_1 + z \leq ct \leq 6l_1 - z$ (rys.6, [1]).
Postępując analogicznie jak w obszarze **3.**, otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
v_4(l_1, t_4) &= \frac{1}{\rho c} \left\{ (s+2)p_3 + 2(s+1)p_1 - (s+2)p_1 e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4}{l_1} - 1 \right)} + \right. \\
&\quad \left. + \left[-sp_1 - (s+2)p_3 - 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{ct_4}{l_1} - 3 \right) \right] e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4}{l_1} - 3 \right)} \right\}, \\
v_4(l_1, t_4') &= \frac{1}{\rho c} \left\{ (s+2)p_3 + 2(s+1)p_1 - (s+2)p_1 e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4'}{l_1} - 1 \right)} + \right. \\
&\quad \left. + \left[-sp_1 - (s+2)p_3 - 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{ct_4'}{l_1} - 3 \right) \right] e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4'}{l_1} - 3 \right)} \right\}, \\
\sigma_4(l_1, t_4) &= sp_3 - (s+2)p_1 e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4}{l_1} - 1 \right)} + [(s+4)p_1 - (s+2)p_3 - \\
&\quad - 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{ct_4}{l_1} - 3 \right)] e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4}{l_1} - 3 \right)}, \\
\sigma_4(l_1, t_4') &= sp_3 - (s+2)p_1 e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4'}{l_1} - 1 \right)} + [(s+4)p_1 - (s+2)p_3 - \\
&\quad - 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{ct_4'}{l_1} - 3 \right)] e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_4'}{l_1} - 3 \right)}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Zgodnie z równaniami charakterystyk (3.11), dla $n = 2$ mamy:

$$\begin{aligned}
\frac{ct_4}{l_1} = \frac{z+ct}{l_1} - 1, \quad \frac{ct_4}{l_1} - 1 = \frac{z+ct}{l_1} - 2, \quad \frac{ct_4}{l_1} - 3 = \frac{z+ct}{l_1} - 4, \\
\frac{ct_4'}{l_1} = -\left(\frac{z-ct}{l_1} + 1 \right), \quad \frac{ct_4'}{l_1} - 1 = -\left(\frac{z-ct}{l_1} + 2 \right), \quad \frac{ct_4'}{l_1} - 3 = -\left(\frac{z-ct}{l_1} + 4 \right),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Po podstawieniu wyrażeń (2.24) do wzorów (3.9) i (3.10) dla $n = 2$ i wykorzystaniu relacji (2.25) otrzymuje się analityczną postać pól naprężenia i prędkości w obszarze **5.**:

$$\begin{aligned}
\sigma_5(z,t) = & -p_3 + (s+2)p_1 \left[e^{\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z-ct}{l_1} + 2 \right)} - e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 2 \right)} \right] + \\
& + \left[-2p_1 + (s+2)p_3 - 2(s+2) \frac{\rho l}{m_z} p_1 \left(\frac{z-ct}{l_1} + 4 \right) \right] e^{\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z-ct}{l_1} + 4 \right)} + \\
& + \left[2p_1 - (s+2)p_3 - 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{z+ct}{l_1} - 4 \right) \right] e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 4 \right)}. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_5(z,t) = & \frac{1}{\rho c} \left\{ p_5 + 2(s+1)(p_1 + p_3) - (s+2)p_1 \left[e^{\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z-ct}{l_1} + 2 \right)} + e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 2 \right)} \right] + \right. \\
& + \left[2p_1 - (s+2)p_3 + 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{z-ct}{l_1} + 4 \right) \right] e^{\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z-ct}{l_1} + 4 \right)} + \\
& \left. + \left[2p_1 - (s+2)p_3 - 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{z+ct}{l_1} - 4 \right) \right] e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 4 \right)} \right\}. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Obszar 6: ($n = 3$, $2n - 1 = 5$, $2n = 6$); $0 \leq z \leq l_1$, $6l_1 - z \leq ct \leq 6l_1 + z$ (rys.6, [1]).

Zgodnie z wzorami (3.20) i (2.27), funkcja Q_6 przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
Q_6(t_6) = & \frac{1}{m_z} \left\{ (s+2)p_5 + 2(s+1)(p_3 + p_1) - 2(s+2)p_1 e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_6}{l_1} - 3 \right)} + \right. \\
& \left. + 2 \left[2p_1 - (s+2)p_3 - 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{ct_6}{l_1} - 5 \right) \right] e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_6}{l_1} - 5 \right)} \right\}. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Po podstawieniu funkcji $Q_6(t_6)$ do wzoru (3.21) i scałkowaniu otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
v_6(l_1, t_6) = & \frac{1}{\rho c} \left\{ (s+2)p_5 + 2(s+1)(p_3 + p_1) - \right. \\
& - 2(s+2)p_1 \frac{\rho l_1}{m_z} \frac{ct_6}{l_1} e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_6}{l_1} - 3 \right)} + \\
& + 2 \left[\left(2p_1 - (s+2)p_3 + 10(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \right) \frac{\rho l_1}{m_z} \frac{ct_6}{l_1} - \right. \\
& \left. \left. - (s+2) \left(\frac{\rho l_1}{m_z} \right)^2 \left(\frac{ct_6}{l_1} \right)^2 p_1 \right] e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{ct_6}{l_1} - 5 \right)} + C_6 e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \frac{ct_6}{l_1}} \right\}. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Z warunku ciągłości prędkości przemieszczania się masy M_z , tj.: $v_4(l_1, 5l_1/c) = v_6(l_1, 5l_1/c)$ wynika, że:

$$\begin{aligned}
C_6 = & \left[- (s+2)p_5 - sp_3 + 10(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} \left(p_3 - 5 \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \right) - 20p_1 \right] e^{5 \frac{\rho l_1}{m_z}} + \\
& + \left[(s+2) \left(6 \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 - p_3 \right) - sp_1 \right] e^{3 \frac{\rho l_1}{m_z}} - (s+2)p_1 e^{\frac{\rho l_1}{m_z}}. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Ostatecznie, w oparciu o wyrażenia (3.25) i (3.26) - cz. I oraz (2.27), (2.29) i (2.30), pola naprężenia i prędkości masowej w obszarze **6** można wyrazić następującymi analitycznymi wzorami:

$$\begin{aligned}
\sigma_6(z, t) = & sp_5 + (s+2)p_1 \left[e^{\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z-ct}{l_1} + 2 \right)} - e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 2 \right)} \right] - \\
& - \left[2p_1 - (s+2)p_3 + 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{z-ct}{l_1} + 4 \right) \right] e^{\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z-ct}{l_1} + 4 \right)} + \\
& + \left[2p_1 - 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{z+ct}{l_1} - 1 \right) + (s+2) \left(6 \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 - p_3 \right) \right] e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 4 \right)} + \\
& + \left\{ - (s+2)p_5 + 2(p_3 - p_1) - 20 \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 + 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{z+ct}{l_1} - 6 \right) \right\} + \\
& + \left[4p_1 - 2(s+2)p_3 + 20(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \right] \frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 1 \right) - \\
& - 2(s+2) \left(\frac{\rho l_1}{m_z} \right)^2 p_1 \left(\frac{z+ct}{l_1} - 1 \right)^2 + 10(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} \left(p_3 - 5 \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \right) \left\} e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 6 \right)}. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_6(z,t) = & \frac{1}{\rho c} \left\{ (s+2)p_5 + 2(s+1)(p_3 + p_1) - (s+2)p_1 \left[e^{\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z-ct}{l_1} + 2 \right)} + e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 2 \right)} \right] + \right. \\
& + \left[2p_1 - (s+2)p_3 + 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{z-ct}{l_1} + 4 \right) \right] e^{\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z-ct}{l_1} + 4 \right)} + \\
& + \left[-2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{z+ct}{l_1} - 1 \right) + 6(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 - (s+2)p_3 + 2p_1 \right] e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 4 \right)} + \\
& + \left\{ 2(p_3 - p_1) + 2(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \left(\frac{z+ct}{l_1} - 6 \right) + \right. \\
& + \left[4p_1 - 2(s+2)p_3 + 20(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \right] \frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 1 \right) - \\
& - 2(s+2) \left(\frac{\rho l_1}{m_z} \right)^2 p_1 \left(\frac{z+ct}{l_1} - 1 \right)^2 - (s+2)p_5 + \\
& \left. + 10(s+2) \frac{\rho l_1}{m_z} \left(p_3 - 5 \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \right) - 20 \frac{\rho l_1}{m_z} p_1 \right\} e^{-\frac{\rho l_1}{m_z} \left(\frac{z+ct}{l_1} - 6 \right)} \Bigg\}. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

itd.

3. Wstępna analiza naprężenia osiowego i prędkości masowej w przekroju rdzenia $z = l_1$

W przedstawiony wyżej sposób można wyprowadzić analityczne wzory określające pola osiowego naprężenia i prędkości masowe w kolejnych obszarach płaszczyzny (z,t) . W szczególności można określić explicite zmianę w czasie prędkości przemieszczenia się masy zredukowanej M_z i naprężenia osiowego w przekroju rdzenia $z = l_1$. Okazuje się, że przekrój ten jest najbardziej obciążony podczas strzału. Zgodnie z wyprowadzonymi wzorami (2.8), (2.9), (2.22) i (2.23) w przekroju $z = l_1$ mamy:

$$\sigma_2(\eta) = [s - (s+2)e^{-\delta(\eta-1)}] p_1, \tag{3.1}$$

$$v_2(\eta) = (s+2) [1 - e^{-\delta(\eta-1)}] \frac{p_1}{\rho c},$$

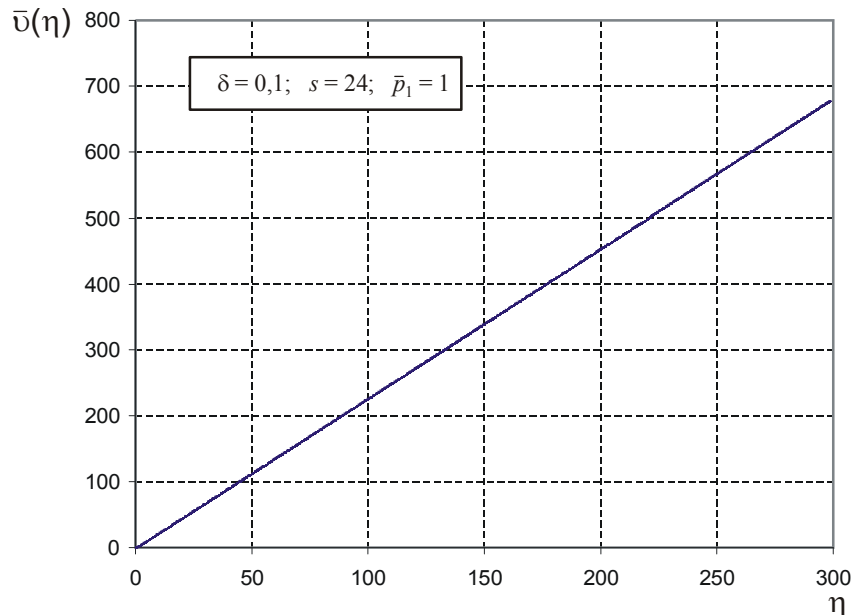
dla $1 \leq \eta = \frac{ct}{l_1} \leq 3$ oraz

$$\begin{aligned}
\sigma_4(\eta) = & sp_3 - (s+2)p_1 e^{-\delta(\eta-1)} + \\
& + [(s+4)p_1 - (s+2)p_3 - 2(s+2)\delta(\eta-3)p_1] e^{-\delta(\eta-3)}, \tag{3.2}
\end{aligned}$$

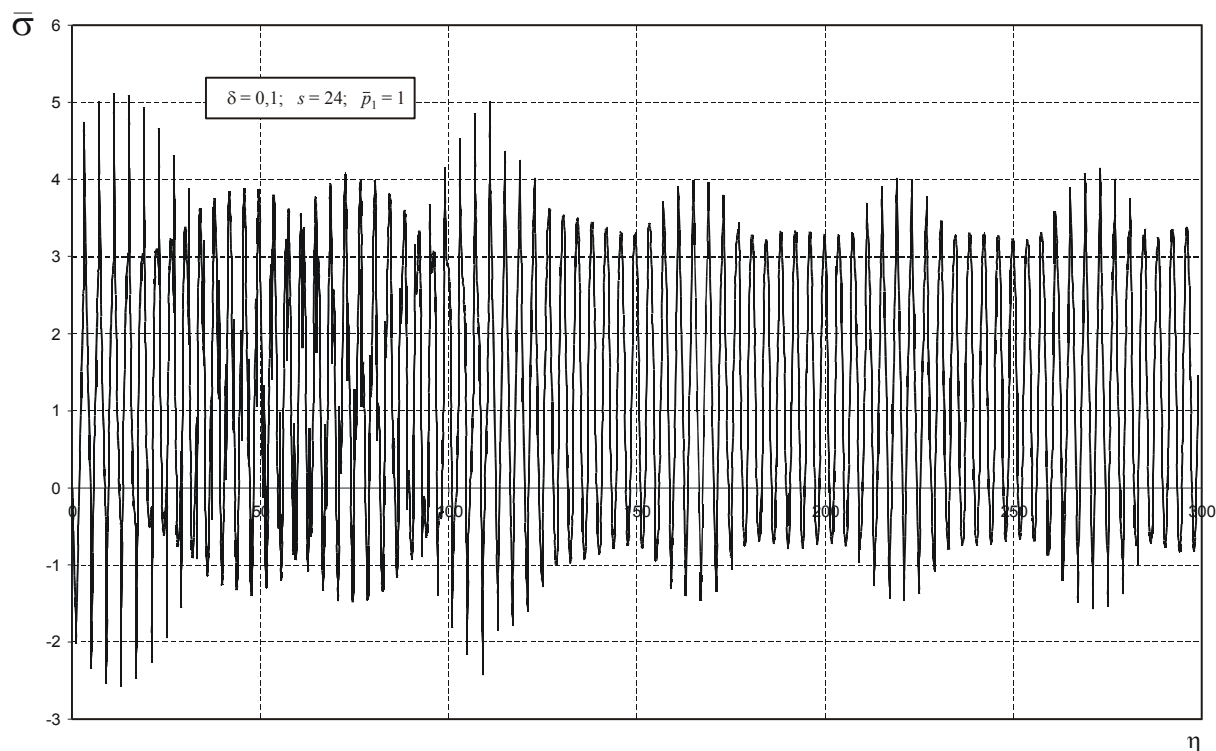
$$v_4(\eta) = \left\{ (s+2)p_3 + (s+1)p_1 \left[2 - e^{-\delta(\eta-1)} \right] - \left[(s+2)p_3 + sp_1 + 2(s+2)\delta(\eta-3)p_1 \right] e^{-\delta(\eta-3)} \right\} \frac{1}{\rho c},$$

dla $3 \leq \eta \leq 5$, itd.

Przykładowe zmiany prędkości przemieszczania się zredukowanej masy M_z i naprężenia osiowego w przekroju $z = l_1$ w funkcji czasu pokazano w wielkościach bezwymiarowych: $\bar{v}(\eta) = \rho c v(l_1, t) / p_m$, $\bar{\sigma}(\eta) = \sigma(l_1, t) / p_m$, $\eta = ct / l_1$, $\xi = z / l_1$, odpowiednio na rysunkach 1 i 2. Przedstawione wykresy uzyskano dla następujących danych liczbowych: $s = 24$, $\delta = 0,1$, $p(t) \equiv p_m = 400 \text{ MPa}$ (p_m – oznacza maksymalne ciśnienie działające na pocisk podczas strzału). Stałe obciążenie p_m , nagle przyłożone, przyjęto w celu uzyskania tła porównawczego dla obciążenia zmiennego w czasie $p(t)$.



Rys. 1. Zmiana prędkości przemieszczania się masy zredukowanej w funkcji zmiennej $\eta = ct/l_1$ dla $\xi = (z/l_1) = 1$



Rys. 2. Pulsacyjny charakter zmian naprężenia osiowego $\bar{\sigma}(\eta) = \sigma(t)/p_m$ w przekroju $\xi = (z/l_1) = 1$

Przedstawione wykresy uzyskano dla następujących danych liczbowych: $s = 24$, $\delta = 0,1$, $p(t) \equiv p_m = 400 \text{ MPa}$ (p_m – oznacza maksymalne ciśnienie działające na pocisk podczas strzału). Stałe obciążenie p_m , nagle przyłożone, przyjęto w celu uzyskania tła porównawczego dla obciążenia zmiennego w czasie $p(t)$.

Z rysunku 1 wynika, że prędkość przemieszczania się masy M_z , dla przyjętych danych liczbowych rośnie z upływem czasu w przybliżeniu w sposób liniowy. Należy jednak zwrócić uwagę na istotny fakt, że na krzywej $\bar{v}(\eta)$ występują ostrza (załamania) w chwilach odbić kolejnych fal naprężenia od masy, które na krzywej $\bar{v}(\eta)$ w skali (rys. 1) są niewidoczne. Świadczą one o skokowej zmianie przyspieszenia masy M_z . Przykładowe wartości skoków przyspieszenia, zgodnie z wzorami (3.1)₂ i (3.2)₂ wynoszą:

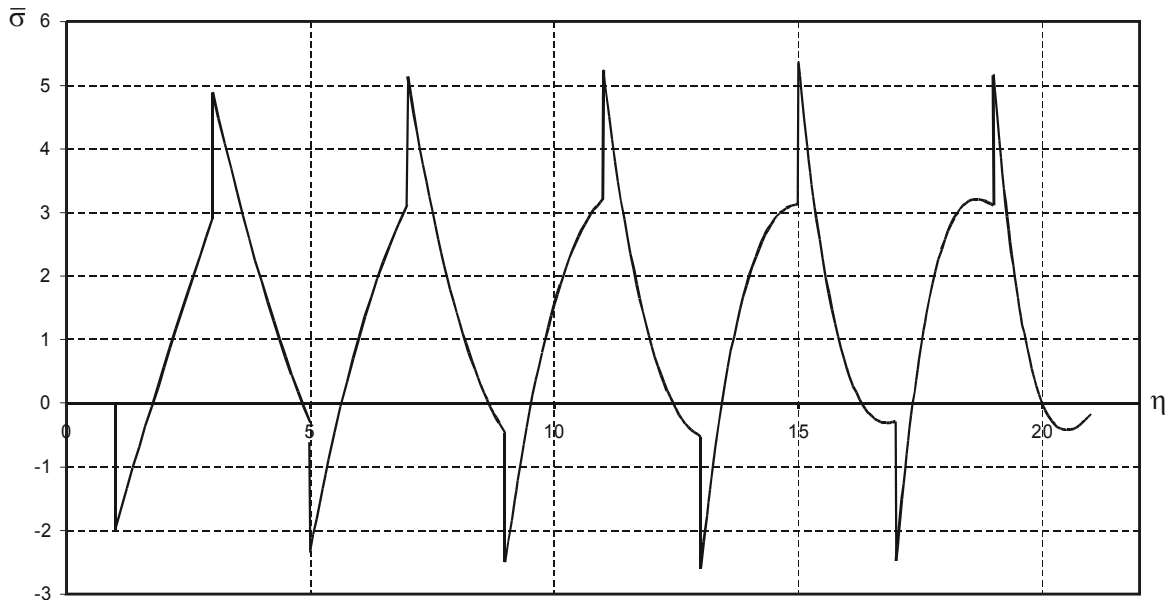
$$\Delta \bar{a}_{2-0}(\eta = 1) = \left. \frac{d\bar{v}_2}{d\eta} \right|_{\eta=1} - \left. \frac{d\bar{v}_0}{d\eta} \right|_{\eta=1} = \delta(s + 2),$$

$$\Delta \bar{a}_{4-2}(\eta = 3) = \left. \frac{d\bar{v}_4}{d\eta} \right|_{\eta=3} - \left. \frac{d\bar{v}_2}{d\eta} \right|_{\eta=3} = -2\delta,$$

itd.

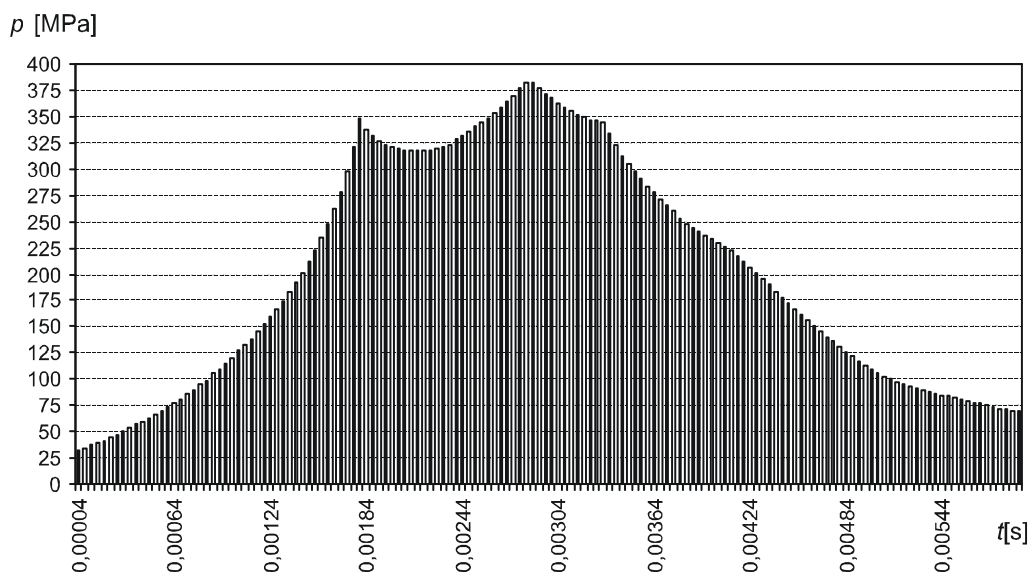
Naprężenie w przekroju $z = l_1$ zmienia się w funkcji czasu w sposób pulsacyjny, na przemian, od wartości ujemnych (ściskanie) do dodatnich (rozciąganie). Maksymalne wartości naprężeń rozciągających, w rozpatrywanym przypadku, są dominujące. Przeważający wpływ na ich wartość ma ciśnienie działające na tylną powierzchnię sabotu. Pulsacje naprężenia są powodowane kolejnymi odbiciami fal naprężenia, na przemian, od masy i od swobodnego końca tylnej części rdzenia. W chwilach odbicia

fal od masy, tj. dla $\eta_1 = (ct/l_1) = 1, \eta = 3, \eta = 5$ itd., następują skokowe zmiany wartości naprężenia spowodowane nagłym przyłożeniem stałego ciśnienia $p_m = \text{const.}$ Charakter zmiany w czasie poszczególnych impulsów naprężenia pokazany jest w powiększonej skali na rys. 3.

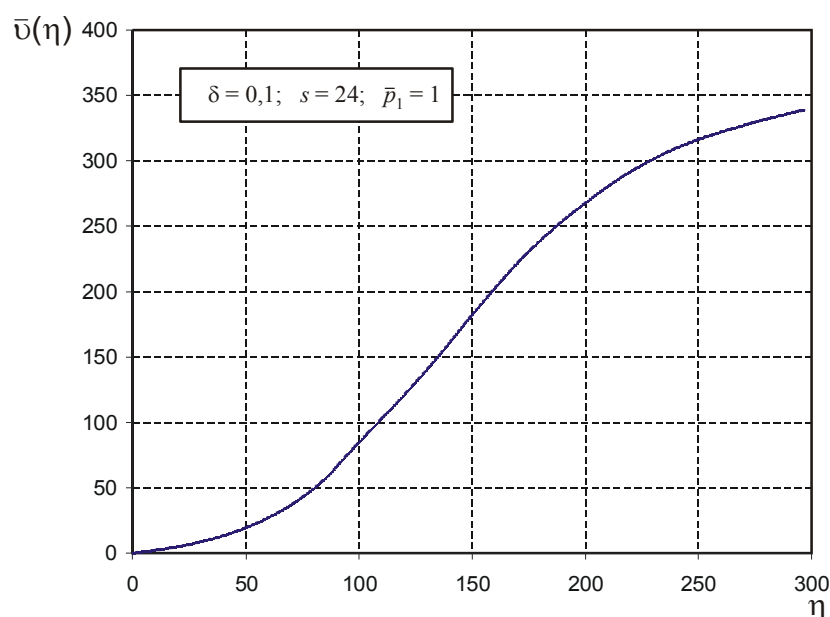


Rys. 3. Fragmentaryczny wykres pulsacji naprężenia osiowego w funkcji zmiennej $\eta = ct/l_1$ w przekroju $z = l_1$ tylnej części rdzenia

Przykładową aproksymację ciśnienia $p(t)$, określonego metodą gazodynamiczną dla pocisku APFSDS (amerykański pocisk *Terminator* kalibru 120 mm), krzywą schodkową zgodnie z przedstawionym wcześniej algorytmem (punkt 3.1) pokazano na rys. 4. Z kolei, zmiany prędkości przemieszczania się masy M_z i naprężenia osiowego w przekroju $z = l_1$, wywołane tak zaaprosymowanym ciśnieniem, pokazano w wielkościach bezwymiarowych odpowiednio na rysunkach 5 i 6.



Rys. 4. Aproksymacja ciśnienia $p(t)$ dla pocisku APFSDS (*Terminator* - 120 mm) krzywą schodkową



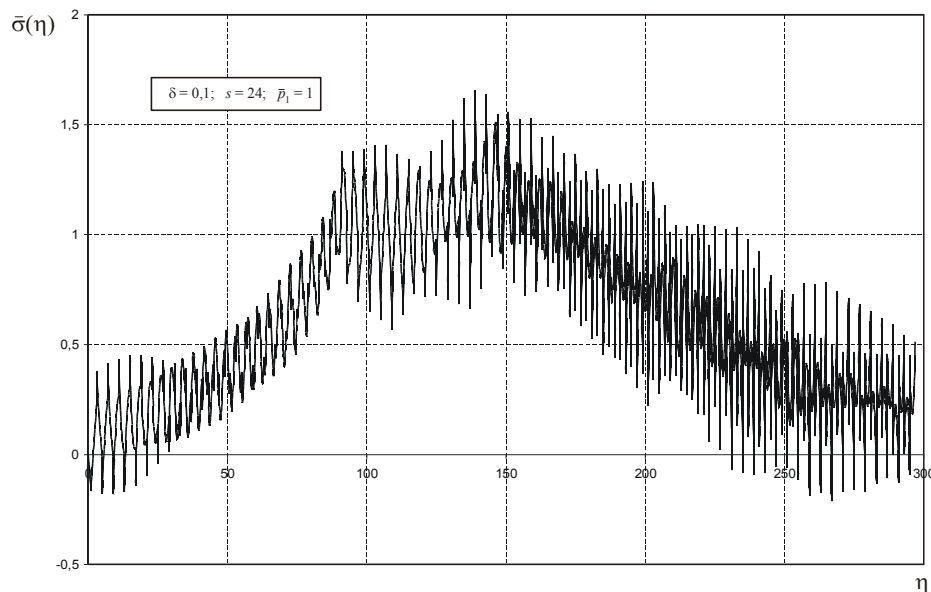
Rys. 5. Zmiana wielkości $\bar{v}(\eta)$

Z przebiegu wielkości $\bar{v}(\eta)$ (rys. 5) wynika, że $\bar{v}_{\max} = \bar{v}_w \approx 340$. Zatem wartość prędkości wylotowej rozpatrywanego pocisku (Terminator) z lufy w przybliżeniu wynosi:

$$v_w = \frac{p_m}{\rho c} \bar{v}_w = \frac{400 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2}{17500 \text{ kg} \cdot 5000 \text{ m/s}} \cdot 340 \approx 1554 \text{ m/s}$$

Wartość prędkości początkowej tego pocisku wynosi $v_0 = 1585 \text{ m/s}$. Ponieważ $v_0 > v_w$, zatem otrzymany wynik jest dobrym przybliżeniem rzeczywistości. Potwierdza to przydatność zaproponowanego modelu do wstępnych obliczeń inżynierskich podczas projektowania pocisków podkalibrowych.

Na rys. 6 pokazana jest zmiana wielkości $\bar{\sigma}(\eta)$ w przekroju $\xi = (z/l_1) = 1$ dla ciśnienia zmieniającego się według algorytmu zilustrowanego na rys.4. Z porównania wykresów zamieszczonych na rys.2 (nagle przyłożone stałe ciśnienie p_m) i rys.6 (zmiennie ciśnienie stopniowo narastające od wartości ciśnienia forsowania do wartości maksymalnej i następnie malejące) wynika, że stopniowa zmiana ciśnienia w sposób istotny obniża amplitudę pulsacji naprężenia, co jest zgodne z rzeczywistością. Brak tłumienia pulsacji podczas strzału wynika z przyjętego modelu opartego na liniowej teorii sprężystości, który nie uwzględnia wewnętrznej i zewnętrznej dyssypacji energii mechanicznej. Problem ten będzie przedstawiony w oddzielnym artykule.



Rys. 6. Zmiana wielkości $\bar{\sigma}(\eta)$

Naprzemienne pulsacje osiowego naprężenia w przekroju $z = l_1$ rdzenia mogą powodować zmęczenie jego materiału.

4. Zakończenie

W pracy uzyskano zamknięte rozwiązanie problemu dynamicznych obciążeń tylnej części rdzenia wydłużonego pocisku podkalibrowego, narażonej na ekstremalne warunki wytrzymałościowe podczas strzału. Problem rozwiązano za pomocą interferencji bieżących fal naprężeń w rdzeniu, wymuszonych ciśnieniem $p(t)$ działającym na pocisk podczas strzału. Tego typu rozwiązanie dobrze aproksymuje zjawiska przebiegające w rdzeniu pocisku.

Wyprowadzone w pracy analityczne wzory pozwoliły stwierdzić pulsację stanu naprężenia w tylnej części rdzenia, na przemian, od wartości ujemnych (ściskanie) do dodatnich (rozciąganie). Okres pulsacji wynosi $T = 2l_1 / c$, gdzie l_1 jest długością tylnej części rdzenia, a c oznacza prędkość propagacji sprężystej fali podłużnej w materiale rdzenia. Zjawisko to szczególnie nasila się w przekroju kontaktu rdzenia z tylną powierzchnią sabotu ($z = l_1$).

Konstrukcja rozwiązań analitycznych problemu Picarda w poszczególnych obszarach płaszczyzny (z, t) jest bardzo pracochłonna. Okazuje się jednak, że wyprowadzone w cz. I rekurencyjne wzory (3.9), (3.10), (3.25) i (3.26), określające pola naprężenia osiowego w rdzeniu $\sigma(z, t)$ i prędkości masowej jego elementów $v(z, t)$, można przystosować do obliczeń komputerowych, co znakomicie upraszcza rozwiązanie problemu. Wyprowadzone w niniejszym artykule wzory analityczne mogą posłużyć jako test do szacowania dokładności obliczeń komputerowych.

Szczegółowa analiza wpływu parametrów konstrukcyjnych pocisku podkalibrowego typu APFSDS i charakteru obciążenia na dynamikę jego rdzenia, z zastosowaniem obliczeń komputerowych będzie przedstawiona w oddzielnym artykule.

W referacie przedstawiono wyniki badań naukowych realizowanych w ramach projektu badawczego Nr OT00B 02826 finansowanego przez MNiI w latach 2004-2005

