

## PRZELICZANIE I TRANSFORMACJA WSPÓLRZĘDNYCH POMIĘDZY UKŁADAMI ODNIESIENIA

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono zagadnienia związane przeliczaniem i transformacją współrzędnych w odwzorowaniach kartograficznych. Zamieszczono gotowe wzory i algorytmy służące do realizacji zadań związanych z przeliczaniem i transformacją współrzędnych. Objąsniiono również podstawowe pojęcia używane w geodezji i kartografii.

## CONVERSION AND TRANSFORMATION OF COORDINATES BETWEEN REFERENCE SYSTEMS

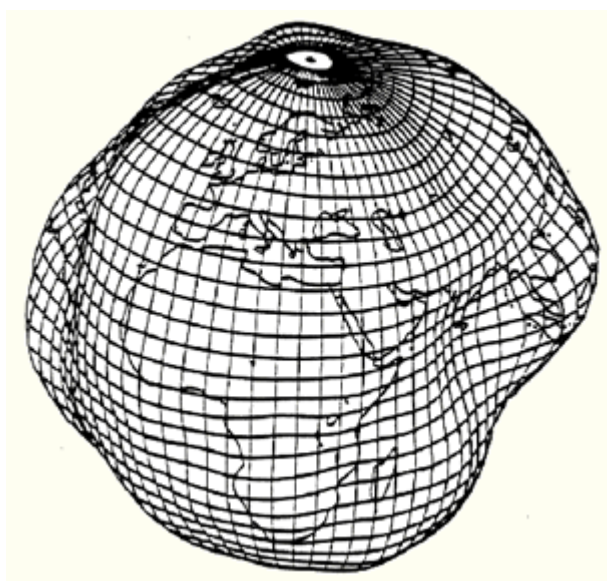
**Abstract.** In the paper the issues concerning conversion and transformation of coordinates in map projections were presented. The formulae and the algorithms for carrying out the tasks connected with the conversion and the transformation of coordinates were quoted. The basic terms used in geodesy and cartography were also explained.

### 1. Wstęp

W czasie, gdy Polska wchodziła do struktur Układu Warszawskiego powszechnie stosowano mapy w układzie odniesienia 1942 (rok przyjęcia w ZSRR elipsoidy Krasowskiego do wszystkich odwzorowań kartograficznych). Były one bazą do dokumentowania ćwiczeń taktycznych, badań poligonowych, planowania operacji wojskowych i wszędzie tam, gdzie potrzebne były współrzędne punktów terenowych. Obecnie stosowane są mapy w układzie UTM (Universal Transverse Mercator), a w Polsce często spotykane są mapy w układzie 1992 (lokalny dla Polski układ odniesienia dla map topograficznych w skali 1:10 000 i mniejszych w systemie GRS 80.). Ponadto odbiorniki GPS (Global Positioning System) dostarczają współrzędne w układzie UTM lub współrzędne geodezyjne w elipsoidzie WGS-84 (World Geodetic System opracowany w 1984r., w którym parametry elipsoidy są identyczne z parametrami elipsoidy GRS-80) zwanej też GRS-80 (Geodetic Reference System 1980). Wobec tego, że w wojsku stosowane są jeszcze mapy odwzorowane w różnych układach odniesienia oraz na wyposażeniu znajdują się systemy nawigacji w tym GPS, zachodzi potrzeba przeliczania współrzędnych pomiędzy różnymi układami odniesienia. Zadanie to nie jest skomplikowane, szczególnie gdy w tym celu zastosujemy komputer z odpowiednim oprogramowaniem. Aby napisać takie oprogramowanie wystarczy znać potrzebne wzory i algorytmy, które zawarte są w niniejszym artykule.

## 2. Podstawowe pojęcia

**Geoida** - bryła, której powierzchnia w każdym miejscu jest prostopadła do pionu wyznaczonego przez siłę ciężkości (rys.2.1). Geoida jest teoretyczną powierzchnią, na której potencjał siły ciężkości Ziemi jest stały, równy potencjałowi siły ciężkości na średnim poziomie mórz otwartych i przedłużoną umownie pod powierzchnią lądów. Ponieważ zawiera ona lustro wody w morzach i oceanach dodatkowo określana jest jako Geoida Zerowa. Jako powierzchnia ekwipotencjalna, geoida w każdym swym punkcie jest prostopadła do kierunku siły ciężkości (pionu). Ponieważ 78% powierzchni naszej planety stanowią oceany, dlatego najbardziej reprezentatywne przybliżenie figury Ziemi stanowi geoida. Jednak pod lądami przebieg geoidy jest skomplikowany ze względu na bardzo urozmaicony rozkład przestrzenny gęstości, głównie w przypowierzchniowych warstwach skorupy ziemskiej. Henri Poincare (1854-1912) wykazał, że jest niemożliwe wyrażenie w sposób ścisły równania geoidy na obszarze lądów i oceanów jedną funkcją analityczną.

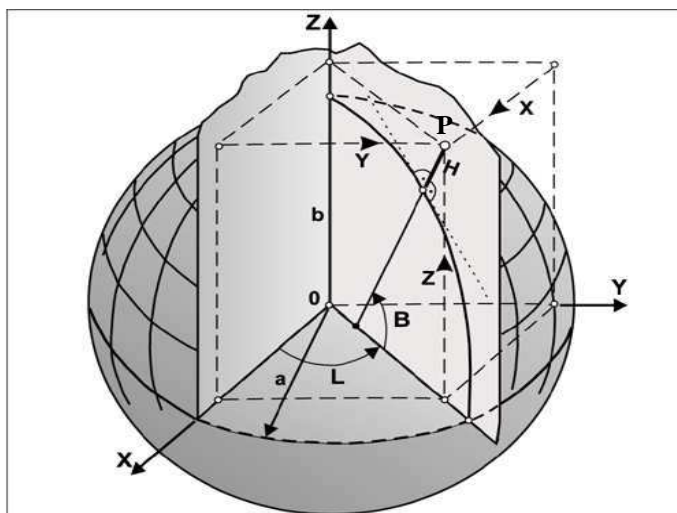


Rys. 2.1. Geoida

**Odwzorowanie kartograficzne** jest to sposób przedstawiania powierzchni kuli ziemskiej na mapie. Polega na tym, że każdemu punktowi na mapie odpowiada określony punkt na poziomej powierzchni Ziemi. Odwzorowanie wykonuje się na bazie siatki kartograficznej, czyli układzie południków i równoleżników przedstawionych na mapie. Siatka ta jest obrazem siatki geograficznej, czyli rzeczywistego układu południków i równoleżników na kuli ziemskiej.

### **Współrzędne geodezyjne (elipsoidalne) i kartezyjańskie centryczne.**

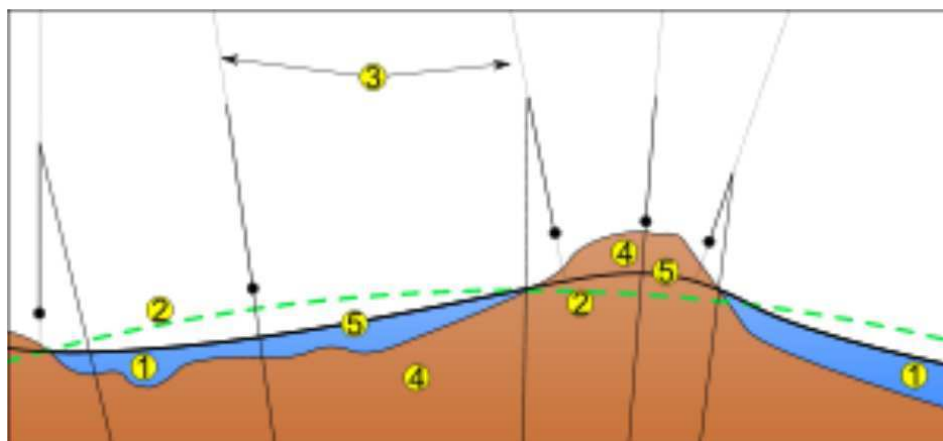
Dla celów odwzorowań kartograficznych jako przybliżenie bryły Ziemi przyjęto elipsoidę obrotową, utworzoną przez obrót elipsy wokół małej półosi b elipsy (rys. 2.2). Położenie każdego punktu jest jednoznacznie opisywane za pomocą współrzędnych geodezyjnych (elipsoidalnych) BLH lub współrzędnych kartezyjańskich centrycznych XYZ (rys. 2.2).



**Rys. 2.2** Współrzędne geodezyjne (elipsoidalne) BLH i kartezjańskie centryczne XYZ

Gdzie:

- początek kartezjańskiego układu współrzędnych OXYZ znajduje się w środku elipsoidy, a oś OX leży w płaszczyźnie równika (OXY) i przecina południk zeroowy (Greenwich);
- L - długość geodezyjna (skierowany kąt pomiędzy płaszczyzną OXZ i pionową płaszczyzną zawierającą punkt P);
- B - szerokość geodezyjna (skierowany kąt pomiędzy płaszczyzną OXY i prostą prostopadłą do powierzchni elipsoidy i zawierającą punkt P);
- H - wysokość geodezyjna (odległość punktu P od powierzchni elipsoidy; dodatnia, gdy punkt leży nad powierzchnią, a ujemna w przeciwnym wypadku);



1. Ocean, 2. Elipsoida, 3. Pion lokalny, 4. Kontynent, 5. Geoida

**Rys. 2.3** Wzajemne położenie powierzchni Ziemi, elipsoidy i geoidy

### Powierzchnie geoidy, elipsoidy i Ziemi

W związku z tym, że powierzchnie Ziemi i geoidy są nieregularne, wzajemne położenie powierzchni geoidy, Ziemi i elipsoidy w różnych obszarach zmienia się (rys. 2.3).

**Przeliczanie** polega na obliczeniach prowadzących do wyznaczenia współrzędnych geodezyjnych lub kartezjańskich centrycznych punktu w danej elipsoidzie na podstawie współrzędnych geodezyjnych lub kartezjańskich centrycznych tego punktu wyznaczonych w innej elipsoidzie. W historii odwzorowań przyjmowano różne elipsoidy i wykonywano na ich bazie odwzorowania tworząc mapy, co doprowadziło do tego, że ten sam punkt był opisywany różnymi współrzędnymi. W celu poprawnego zlokalizowania punktu często potrzebne jest wykonanie przeliczenia pomiędzy elipsoidami.

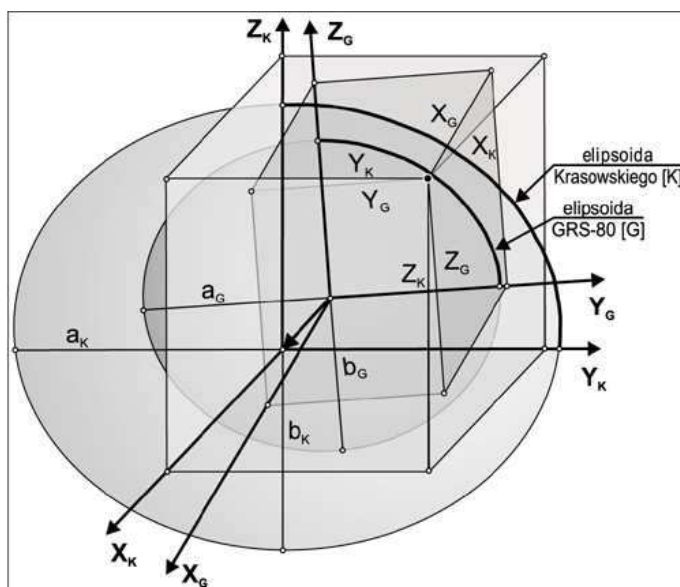
$$\begin{array}{ccc} & \text{Pr zeliczanie} & \\ B_1 L_1 H_1 & \Leftrightarrow & B_2 L_2 H_2 \\ \\ X_1 Y_1 Z_1 & \Leftrightarrow & X_2 Y_2 Z_2 \\ & \text{Pr zeliczanie} & \end{array}$$

**Transformacja** polega na wyznaczeniu współrzędnych kartezjańskich centrycznych XYZ punktu na podstawie współrzędnych geodezyjnych BLH w określonej elipsoidzie. Przejście w przeciwną stronę nazywamy transformacją odwrotną.

**Układ odniesienia** to zbiór punktów na powierzchni Ziemi, w których wykonano precyzyjne pomiary geodezyjne (tzw. osnowa geodezyjna) i elipsoida będąca przybliżeniem kształtu Ziemi związana z tymi punktami.

### 3. Wybrane układy współrzędnych stosowane w Polsce

W Polsce prawie wszystkie mapy są wykonane na bazie elipsoidy Krasowskiego lub elipsoidy GRS-80 (WGS-84). Środki tych elipsoid są względem siebie przesunięte, układy kartezjańskie obrócone wokół wszystkich osi (rys. 3.1, tabela 3.1). Ponadto długości półosi tych elipsoid są różne (tabela 3.1). Wynikiem tego jest to, że określony punkt na Ziemi ma różne współrzędne kartezjańskie na mapie, w zależności od elipsoidy odniesienia.



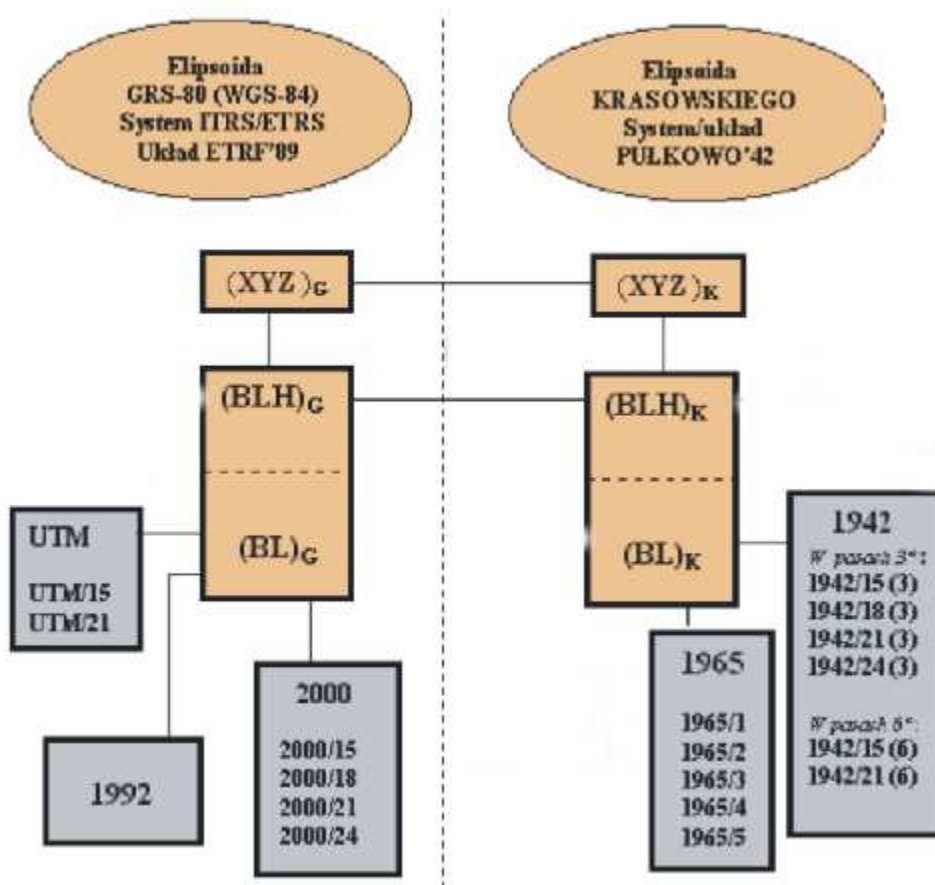
Rys. 3.1 Ilustracja wzajemnego położenia układów kartezjańskich w elipsoidach Krasowskiego i GRS-80 (WGS-84).

Tabela 3.1.

## Parametry elipsoid stosowanych w odwzorowaniach w Polsce

Parametr	Elipsoida Krasowskiego	Elipsoida GRS-80 (WGS-84)
duża półoś a	6378245m	6378137m
mała półoś b	6356863.01877m	6356752.31414m
Przesunięcia elipsoidy GRS-80 w układzie elipsoidy Krasowskiego	$\Delta X = -33.4297\text{m}$ , $\Delta Y = 146.5746\text{m}$ , $\Delta Z = 76.2865\text{m}$	
Obroty układu kartezjańskiego elipsoidy GRS-80 wokół poszczególnych osi	$\varepsilon_x = -1.7388854e-6$ [rad] = $-0.35867''$ , $\varepsilon_y = -0.2561460e-6$ [rad] = $-0.05283''$ $\varepsilon_z = 4.0896031e-6$ [rad] = $0.84354''$	

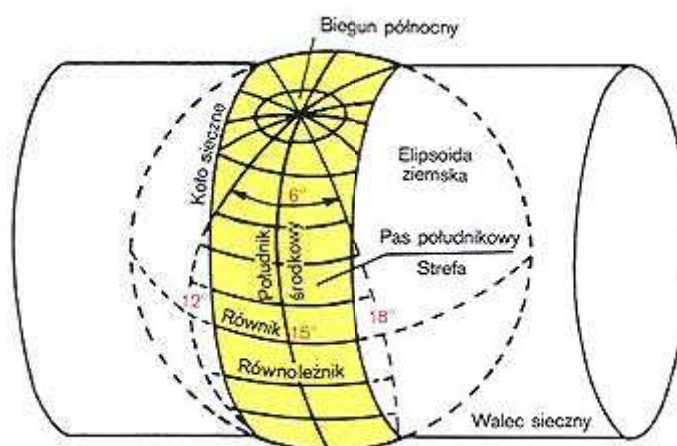
Aby jednoznacznie zlokalizować punkt na mapie na podstawie znanych współrzędnych w określonym układzie odniesienia często trzeba wykonać przeliczenie i transformację do innego układu odniesienia. Na rys.3.2 pokazano dostępne przeliczenia i transformacje pomiędzy różnymi układami współrzędnych stosowanymi w Polsce.



Rys. 3.2 Układy odniesienia (elipsoidy), odwzorowania i układy współrzędnych na mapach stosowane w Polsce.

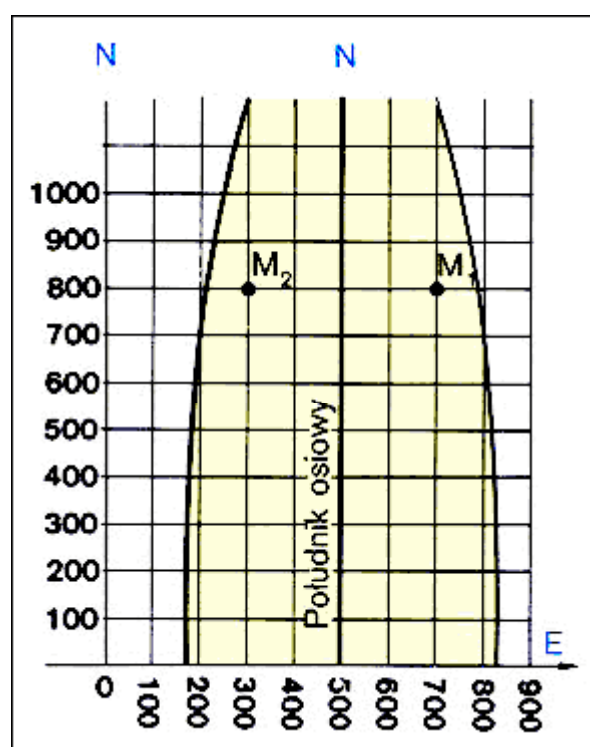
W Polsce stosowane są mapy wykonane w różnych odwzorowaniach dla elipsoid odniesienia GRS-80 i Krasowskiego. Układy odniesienia 1965, 1992 i 2000 widoczne na rys. 3.2

stosowane są tylko w Polsce dla map o małej skali używanych w zastosowaniach cywilnych. Dla wojska mają drugorzędne znaczenie.



**Rys. 3.3 Odwzorowania walcowe poprzeczne Mercatora**

Najpopularniejszymi odwzorowaniami są odwzorowania Gausa-Krügera i Mercatora. Oba te odwzorowania oparte są o te same zasady matematyczne, a różnica współrzędnych wynika z różnych współczynników skali. Dla potrzeb odwzorowania powierzchnię elipsoidy podzielono na 60 sześciostopniowych stref wzdłuż równika. Każda z tych stref jest odwzorowana na płaszczyznę metodą Mercatora (rys. 3.3) lub Gausa-Krügera. Różnica tych metod polega na tym, że w metodzie Gausa-Krügera walec jest styczny do elipsoidy.



**Rys. 3.4 Układ współrzędnych w strefie.**

W każdej strefie określono prostokątny układ współrzędnych OXY (O North East), w którym:

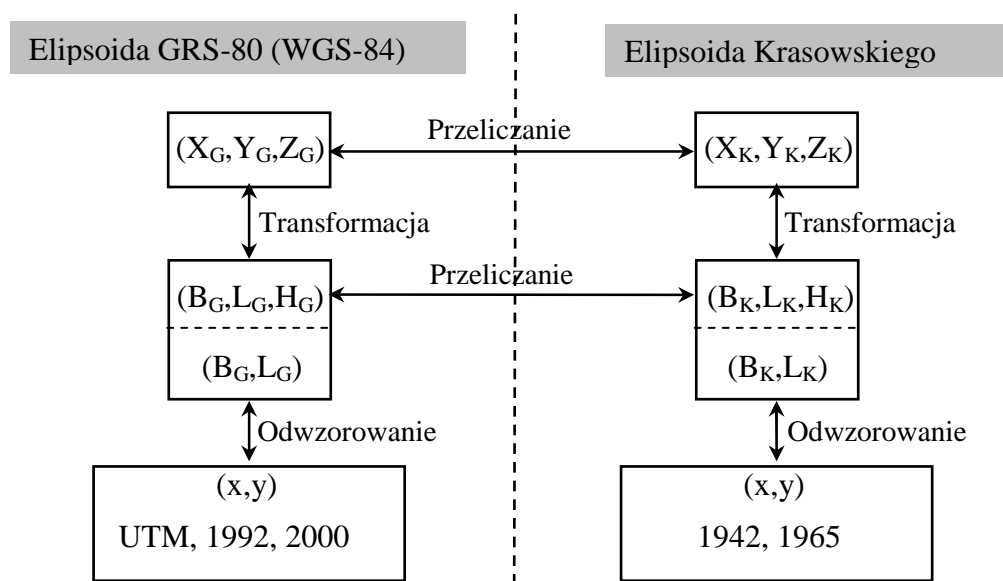
- oś OX (ON) stanowi południk środkowy (osiowy) strefy,

– oś OY (OE) stanowi równik, początek układu ma współrzędne  $(X, Y) = (N, E) = (0\text{km}, 500\text{km})$ . Wobec powyższego dowolny punkt na kuli ziemskiej ma różne współrzędne geodezyjne dla różnych elipsoid odniesienia oraz różne współrzędne na mapie dla różnych elipsoid odniesienia lub (i) różnych odwzorowań.

#### 4. GPS a lokalne układy współrzędnych

Obecnie na całym świecie powszechnie stosuje się systemy nawigacji korzystające z danych GPS (Global Positioning System). Odbiorniki GPS dostarczają współrzędne geodezyjne, prostokątne (kartograficzne) w układzie UTM i prostokątne w wojskowej siatce odniesienia MGRS (Military Grid Reference System) dla elipsoidy GRS-80 (WGS-84). Możliwe jest więc zobrazowanie pozycji tylko na mapach w układzie UTM. W praktyce bardzo często dysponujemy mapami wykonanymi w innych układach współrzędnych, a potrzebujemy nanieść na nich pozycję wskazywaną przez odbiornik GPS. Zdarza się, że dysponujemy współrzędnymi punktów geodezyjnych (wieże obserwacyjne, stanowiska pomiarowe, itp.) w określonym układzie współrzędnych i potrzebujemy z nich skorzystać w innym układzie współrzędnych. Takie przypadki mają miejsce wobec powszechnie stosowanych do niedawna map w układzie 1942, a obecnie popularne są mapy w układzie 1992 i UTM. Problemy te są bardzo łatwo rozwiązywalne poprzez odpowiednie przeliczenia matematyczne z zastosowaniem nawet najprostszych komputerów.

#### 5. Przeliczanie i transformacja współrzędnych



Rys. 5.1. Schemat przeliczeń i transformacji współrzędnych.

Na rys. 5.1 przedstawiono możliwe przeliczenia współrzędnych pomiędzy układami odniesienia i transformacje współrzędnych w ramach jednego układu odniesienia. Odwzorowanie jest szczególnym przypadkiem transformacji. W dalszej części zostaną przedstawione algorytmy przeliczeń i transformacji.



## 5.1. Transformacja (B,L,H) → (X,Y,Z)

Transformację współrzędnych geodezyjnych (B,L,H) na współrzędne kartezjańskie centryczne realizuje się wg wzorów:

$$\begin{aligned} X &= (R_N + H) * \cos(B) * \cos(L) \\ Y &= (R_N + H) * \cos(B) * \sin(L) \\ Z &= (R_N + H) * \sin(B) - q \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

gdzie:

$R_N$  - jest długością odcinka normalnej, mierzoną od punktu  $P_o$  (rzut punktu  $P$  na powierzchnię elipsoidy) do punktu  $S$  przecięcia z osią obrotu elipsoidy – jest to zarazem promień krzywizny przekroju poprzecznego (pierwszego wertykału) elipsoidy w punkcie  $P_o$  (dla szerokości  $B$ ), wyrażający się wzorem:

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 * \sin^2(B)}}, \quad (5.1.2)$$

gdzie:

$a$  - duża półoś elipsoidy,

$e^2$  - pierwszy mimośród elipsoidy wyrażający się wzorem:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad (5.1.3)$$

gdzie:

$b$  - mała półoś elipsoidy,

$q$  - pionowe przesunięcie środka krzywizny przekroju poprzecznego względem środka elipsoidy wyraża się wzorem:

$$q = R_N * e^2 * \sin(B) \quad (5.1.4)$$

## 5.2. Transformacja odwrotna (X,Y,Z) → (B,L,H)

Aby dokonać transformacji odwrotnej należałoby odwrócić zależności (5.1.1), wyznaczając z nich  $B$ ,  $L$  i  $H$  w oparciu o  $X, Y, Z$ . Mając na uwadze to, że w definicji promienia  $R_N$  oraz w wielkości  $q$  kryje się również szerokość  $B$ , odwrócenie formuł (5.1.1) nie jest proste. Dlatego posługujemy się metodami kolejnych przybliżeń. Jedną z prostych metod polega na wykorzystaniu następującej zależności, którą można otrzymać z (5.1.1):

$$B = \arctg\left(\frac{Z+q}{r}\right); \quad r = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad (5.2.1)$$

gdzie:

$r$  – odległość punktu  $P$  od osi obrotu elipsoidy.

Ponieważ wielkość  $q$  jest istotną funkcją  $B$ , formułę (5.2.1) używa się do tworzenia kolejnych przybliżeń  $B_o, B_1, B_2, \dots$  niewiadomej  $B$  (stosownie do tego parametr  $q$  jako funkcja  $B$  przyjmuje wartości kolejnych przybliżeń  $q_o, q_1, q_2, \dots$ ).



Algorytm: (X,Y,Z) → B:

Krok 0: przyjmujemy  $q = q_0 = 0$  i obliczamy B wg wzoru (5.2.1) notując je jako  $B_0$  (przybliżenie początkowe).

Krok 1: obliczamy przybliżoną wartość  $q_1$  zgodnie ze wzorami (5.1.2 i 5.1.4) jako funkcję  $B_0$ , a następnie nowe przybliżenie  $B_1$  szerokości B według wzoru (5.2.1).

Krok 2: obliczamy przybliżenie  $q_2$  zgodnie z wzorem (5.1.2 i 5.1.4) jako funkcję  $B = B_1$ , a następnie aktualne przybliżenie  $B_2$  szerokości B według wzoru (5.2.1).

itd.

Proces zatrzymujemy, jeśli różnica kolejnych przybliżeń jest mniejsza niż założony dopuszczalny błąd numeryczny wyznaczenia B. Zwykle konieczną dokładność otrzymuje się po kilku krokach.

Obliczenie brakujących współrzędnych L, H nie przedstawia już trudności:

$$L = \arccos (X/r) = \arcsin (Y/r), \quad (5.2.2)$$

Jeżeli  $\Delta z < 0$  lub  $\Delta r < 0$ , to

$$H = -\sqrt{\Delta r^2 + \Delta z^2}, \text{ a w przeciwnym wypadku}$$

$$H = \sqrt{\Delta r^2 + \Delta z^2}, \quad (5.2.3)$$

przy czym przyrosty  $\Delta r$ ,  $\Delta z$  obliczamy ze wzorów:

$$\Delta r = r - R_N * \cos (B),$$

$$\Delta z = Z - R_N * (1-e^2) * \sin(B).$$

### 5.3. Transformacja (odwzorowanie) Gausa-Krügera (B,L) → (x,y)

Metodę odwzorowania opracował Gauss w 1820r., którą w 1912r. udoskonalili Krüger przystosowując wzory do praktycznych obliczeń. Metoda pod nazwą Gausa-Krügera jest powszechnie stosowana do dziś.

Współrzędne prostokątne (x,y) na mapie oblicza się korzystając z wzorów:

$$x = s(B) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{d^{2n}F}{dq^{2n}} \frac{l^{2n}}{(2n)!} \quad (5.3.1)$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{d^{2n-1}F}{dq^{2n-1}} \frac{l^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

gdzie:

$s(B)$  - długość łuku południka,

$F = x + iy$ ,

$l = L - L_0$ , a  $L_0$  - długość geodezyjna południka środkowego,

$q$  - szerokość geodezyjna izometryczna powierzchni elipsoidy:

$$q = \int_0^B \frac{M}{N \cos B} dB = \ln \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \right] \left( \frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{\frac{e}{2}}, \quad (5.3.2)$$

gdzie:

$e$  - mimośród elipsoidy,

$M$  - przekrój południkowy (podłużny),

$$M = M(B) = \frac{a(1 - e^2)}{\left( \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \right)^3}, \quad (5.3.3)$$

$a$  - duża półoś elipsoidy,

$N$  - przekrój pierwszego wertykału (poprzeczny),

$$N = N(B) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (5.3.4)$$

$$s(B) = A_0 B + \sum_{r=1}^{\infty} A_r \sin 2rB. \quad (5.3.5)$$

gdzie:

$$A_0 = a(1 - e^2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( -\frac{3}{2} \right) \binom{2k}{k} \left( \frac{e}{2} \right)^{2k}, \quad (5.3.6)$$

$$A_r = a(1 - e^2) \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(-1)^{k+r}}{r} \left( -\frac{3}{2} \right) \binom{2k}{k-r} \left( \frac{e}{2} \right)^{2k}, \quad r=1, 2, 3, \dots \quad (5.3.7)$$

Poszukiwanie wartości współrzędnych  $(x, y)$  Gaussa-Krügera ze związków (5.3.1) sprowadza się do obliczenia pochodnych:

$$\frac{d^n F}{dq^n} = N \cos^n B \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{r=0}^{n-2} n_k^r \xi^r \right) t^k, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.3.8)$$

gdzie:

$$t = \operatorname{tg} B,$$

$$\xi = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 B, \quad (5.3.9)$$

$$(n+1)_k^r = n_{k-1}^r (k - 2r - n - 1) + n_{k-1}^{r-1} (k - 2r - n + 2) + (k+1)(n_{k+1}^r + n_{k+1}^{r-1}), \quad (5.3.10)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

oraz:

$$1_0^0 = 0, 2_0^0 = 0, 2_1^0 = -1.$$

#### 5.4. Transformacja odwrotna Gaussa-Krügera (x,y) → (B,L)

Obliczenie współrzędnych geodezyjnych (B,L) tą metodą na podstawie lokalnych współrzędnych prostokątnych w strefie (x,y) jest możliwe tylko wtedy, gdy odwzorowanie było wykonane metodą Gaussa-Krügera.

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x}{R} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} l_{2\lambda} \sin\left(2\lambda \frac{x}{R}\right) \cosh\left(2\lambda \frac{y}{R}\right) \\ \eta &= \frac{y}{R} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} l_{2\lambda} \cos\left(2\lambda \frac{x}{R}\right) \sinh\left(2\lambda \frac{y}{R}\right)\end{aligned}\tag{5.4.1}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}l_2 &= -\frac{1}{2}n + \frac{2}{3}n^2 - \frac{37}{96}n^3 + \frac{1}{360}n^4 + \dots \\ l_4 &= -\frac{1}{48}n^2 - \frac{1}{15}n^3 + \frac{437}{1440}n^4 + \dots \\ l_6 &= -\frac{17}{480}n^3 + \frac{37}{840}n^4 + \dots\end{aligned}\tag{5.4.2}$$

$$l_8 = -\frac{4397}{161280}n^4 + \dots$$

$$R = \frac{a}{1+n} \left( 1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \frac{n^6}{256} + \frac{25n^8}{16384} + \dots \right)\tag{5.4.3}$$

n oznacza trzecie spłaszczenie elipsoidy i wyraża się wzorem:

$$n = \frac{a-b}{a+b}$$

Współrzędne azymutalne h i  $\alpha$  otrzymujemy ze związków:

$$\alpha = \xi,$$

$$h = 2 \operatorname{arctg} e^n - \frac{\pi}{2}, \text{ gdzie } e \text{ jest liczbą Nepera } (e = 2,7182\dots)$$

$$\sin \varphi = \cos h \sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg} l = \frac{\sin h}{\cos h \cos \alpha},$$

Długość geodezyjną obliczamy ze wzoru:

$$L = L_0 + l;$$

Szerokość geodezyjną B uzyskuje się z szeregu:

$$B = \varphi + \sum_{\lambda=1}^{\infty} k_{2\lambda} \sin 2\lambda\varphi$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
k_2 &= 2n - \frac{2}{3}n^2 - 2n^3 + \frac{116}{45}n^4 + \dots \\
k_4 &= \frac{7}{3}n^2 - \frac{8}{5}n^3 - \frac{227}{45}n^4 + \dots \\
k_6 &= \frac{56}{15}n^3 - \frac{136}{35}n^4 + \dots \\
k_8 &= \frac{4279}{630}n^4 + \dots
\end{aligned}
\tag{5.4.4}$$

### 5.5. Przeliczenie kartezjańskich centrycznych ( $X_G, Y_G, Z_G$ ) elipsoidy WGS-84 na współrzędne kartezjańskie centryczne ( $X_K, Y_K, Z_K$ ) elipsoidy Krasowskiego

Elipsoidy WGS-84 i Krasowskiego są względem siebie przesunięte i obrócone dlatego w celu obliczenia współrzędnych kartezjańskich centrycznych w elipsoidzie Krasowskiego na podstawie współrzędnych kartezjańskich centrycznych w elipsoidzie WGS-84 stosuje się przekształcenie:

$$\begin{bmatrix} 1+0.84076440 \text{ E}-6 & 4.08960694 \text{ E}-6 & 0.25613907 \text{ E}-6 \\ -4.08960650 \text{ E}-6 & 1+0.84076292 \text{ E}-6 & -1.73888787 \text{ E}-6 \\ -0.25614618 \text{ E}-6 & 1.73888682 \text{ E}-6 & 1+0.84077125 \text{ E}-6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -33.4297 \\ 146.5746 \\ 76.2865 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_K \\ Y_K \\ Z_K \end{bmatrix}$$

### 5.6. Przeliczenie kartezjańskich centrycznych ( $X_K, Y_K, Z_K$ ) elipsoidy Krasowskiego na współrzędne kartezjańskie centryczne ( $X_G, Y_G, Z_G$ ) elipsoidy WGS-84

Z tych samych powodów, co w punkcie 5.5 stosuje się przekształcenie:

$$\begin{bmatrix} 1-0.84078048 \text{ E}-6 & -4.08959962 \text{ E}-6 & -0.25614575 \text{ E}-6 \\ 4.08960007 \text{ E}-6 & 1-0.84078196 \text{ E}-6 & 1.73888389 \text{ E}-6 \\ 0.25613864 \text{ E}-6 & -1.73888494 \text{ E}-6 & 1-0.84077363 \text{ E}-6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_K + 33.4297 \\ Y_K - 146.5746 \\ Z_K - 76.2865 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix}$$

## 6. Wnioski

W NATO obowiązującymi systemami współrzędnych są: UTM, MGRS i geodezyjne w elipsoidzie WGS-84 (GRS-80). Wobec tego, że w Wojsku Polskim pozostała po Układzie Warszawskim dokumentacja kartograficzna wykonana jest w systemie 1942, nadal stosowane są mapy wykonane w systemach UTM i 1942 oraz powszechnie używane się systemy nawigacji, przeliczenie i transformacja współrzędnych jest nieunikniona. oraz powszechnego używania systemów nawigacji

Wyżej przedstawione wzory i algorytmy umożliwiają przeliczenie i transformacje współrzędnych pomiędzy:

- elipsoidami WGS-84 (GRS-80) i Krasowskiego,
- układami współrzędnych: UTM, 1992 i 1942,

- współrzędnymi geodezyjnymi (elipsoidalnymi) i układami współrzędnych: UTM, 1992 i 1942.

Obliczenia ręczne mogą być uciążliwe ale po napisaniu odpowiedniego oprogramowania, proces ten staje się bardzo prosty. Autor tego artykułu oferuje udostępnienie takiego oprogramowania.

## **Literatura**

- [1] Jan Panasiuk, Jerzy Balcerzak, Urszula Pokrowska: Wybrane zagadnienia z podstaw teorii odwzorowań kartograficznych.
- [2] Roman J. Kadaj: Polskie układy współrzędnych, formuły transformacyjne, algorytmy i programy.
- [3] Idzi Gajderowicz: Kartografia matematyczna dla Geodetów.