

PORÓWNANIE WARTOŚCI CEP (Circular Error Probably) OBLICZONYCH WEDŁUG RÓŻNYCH ZALEŻNOŚCI PODAWANYCH W LITERATURZE

W artykule przedstawiono porównanie wyników wartości CEP, uzyskanych w pewnej rzeczywistej próbie pomiarowej, obliczonych na podstawie różnych zależności podawanych w literaturze.

1. Wprowadzenie

Parametr określany w literaturze polskojęzycznej jako CEP, czasem z dodaniem jego nazwy angielskiej *circular error probably* (lub *circular error probability*), nie ma ugruntowanego nazewnictwa polskiego. W polskim tłumaczeniu Rozporządzenia Rady (WE) Nr 1334/2000 z dnia 22 czerwca 2000r.[1], oraz w Rozporządzeniu Rady (WE) NR 149/2003 z dnia 27 stycznia 2003 r. zmieniające i aktualizujące rozporządzenie (WE) nr 1334/2000 ustanawiające wspólnotowy system kontroli wywozu produktów i technologii podwójnego zastosowania [2], w spisie akronimów i skrótów, **CEP** przetłumaczono jako **krag równego prawdopodobieństwa**. Parametr ten czasem jest nazywany zastępczym promieniem błędu lub promieniem błędu pięćdziesięcioprocentowego.

Stosowany jest przy ocenach (sprawdzeniach) dokładności określenia położenia np. przy wykorzystaniu odbiorników GPS, systemów nawigacji lądowej lub też celności (skupienia) pocisków. Praktycznie CEP określa promień okręgu, w którym z prawdopodobieństwem $p=0,5$ uzyskane wyniki są wewnątrz tego okręgu. CEP stosuje się do dwuwymiarowego układu współrzędnych. Czasem po skrócie CEP dodaje się dwucyfrowy zapis oznaczający dla jakiego prawdopodobieństwa liczony jest promień okręgu (błędu). Np. CEP95 oznacza promień okręgu, wewnątrz którego z prawdopodobieństwem $p=0,95$ znajdują się wyniki z uzyskanych pomiarów. Jeśli nie ma cyfr lub jest zapis CEP50, dotyczy to prawdopodobieństwa $p=0,5$.

W artykule przedstawiono jedynie zależności końcowe, wg których można wyliczyć wartość CEP. Wyprowadzenia, a przynajmniej założenia wyprowadzeń można znaleźć w przywoływanej literaturze. Ograniczono się do przedstawienia i porównania wyników CEP wyliczonych wg różnych zależności, dla pewnej rzeczywistej serii pomiarów.

2. Zależności wg których wylicza się wartość CEP

Pełne wyprowadzenie wyliczenia CEP przedstawiono w [3]. Wynikiem końcowym jest zależność:

$$CEP = \sqrt{\ln 2} \cdot RMS(R) = 0,833 \cdot RMS(R) \quad (1)$$

gdzie: R – jest błędem określenia położenia równym $R_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$,

gdzie z kolei $x_i = X_i - X_o$ oraz $y_i = Y_i - Y_o$;

X_i – pomierzona kolejna współrzędna X danego punktu pomiarowego;

X_o – współrzędna wzorcowa (odniesienia, uznana za prawdziwą);

Y_i, Y_o – odpowiednio współrzędne Y ;

$RMS(R)$ – błąd średniokwadratowy R , wyliczany jako pierwiastek kwadratowy z sumy kwadratów wartości średniej \bar{R} i odchylenia standardowego σ :

$$RMS(R) = \sqrt{(\bar{R})^2 + \sigma^2}$$

W przypadku równych odchyżeń standardowych obu współrzędnych $\sigma_x = \sigma_y$, w literaturze [6] podano, że:

$$CEP = 1,1774 \cdot RMS(X) \quad (2)$$

W literaturze z pozycji [4] (bez wyprowadzenia), przedstawiono inną zależność dla wyliczenia CEP, jako średnia arytmetyczną RMS , obu współrzędnych X i Y pomnożonych przez współczynnik $1,1774 (\sqrt{-2\ln(1-0,5)})$:

$$CEP = 0,589 \cdot [RMS(X) + RMS(Y)] \quad (3)$$

Z kolei w pracy [5], podana jest jeszcze inna zależność:

$$CEP = 0,62 \cdot RMS(Y) + 0,56 \cdot RMS(X) \quad (4)$$

określając, że jest ona dokładna (*Accurate*) dla $\sigma_y/\sigma_x > 0,3$.

Bardzo interesująca jest praca [7], w której autorzy wyprowadzają zależności pozwalające na wyliczenie wartości CEP, stosując różne estymatory. I tak, wykorzystując estymator największej wiarygodności (*maximum likelihood estimator -mle*), przedstawiają zależność:

$$CEP_{mle} = 1,1774 \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (y_i^2 + x_i^2)} \quad (5)$$

gdzie: y_i i x_i – są różnicami zmierzonych współrzędnych oraz odniesienia ($y_i = Y_i - Y_o$,
 $x_i = X_i - X_o$);

n – ilość pomiarów.

Dla nieobciążonego estymatora minimum wariancji (*minimum variance unbiased estimator – unb*), powyższa zależność ma postać:

$$\text{CEP}_{\text{unb}} = \frac{1,1774}{K_{(n,2,1)}} \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i^2 + x_i^2)} \quad (6)$$

gdzie: $K_{(n,2,1)}$ – jest funkcją: $K_{(n,2,1)} = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}$;

Γ – funkcja gamma.

Dla estymatora, wg kryterium minimum błędu średniokwadratowego (*minimum mean squared error – mms*):

$$\text{CEP}_{\text{mms}} = 1,1774 \frac{K_{(n,2,1)}}{n} \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i^2 + x_i^2)} \quad (7)$$

Wyrażając wielkości CEP, w funkcji wartości średniokwadratowych y_i , x_i ($\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^2 + x_i^2)}$), zależności (5), (6) i (7) sprowadzają się do postaci:

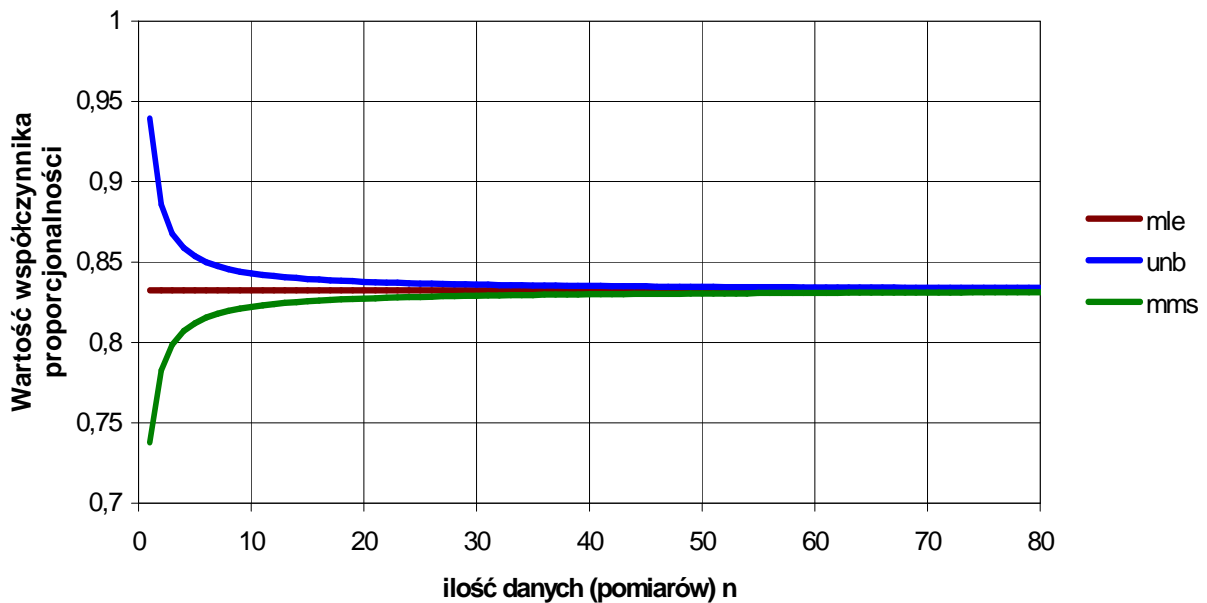
$$\text{CEP}_{\text{mle}} = \frac{1,1774}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^2 + x_i^2)} \quad (8)$$

$$\text{CEP}_{\text{unb}} = \frac{1,1774}{K_{(n,2,1)}} \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^2 + x_i^2)} \quad (9)$$

$$\text{CEP}_{\text{mms}} = 1,1774 \frac{K_{(n,2,1)}}{\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^2 + x_i^2)} \quad (10)$$

Na Rys.1 przedstawiono wykres obrazujący wielkość zmian współczynnika proporcjonalności, wiążącego wartości CEP z wartościami średniokwadratowymi y_i , x_i , i wyodrębnionych w zależnościach (8), (9) i (10), obliczonych w funkcji ilości danych (ilości pomiarów) n .

Rys.1 Współczynnik proporcjonalności estymatorów CEP dla kryteriów: mle, unb i mms



Rysunek pokazuje, iż wybór rodzaju estymatora ma istotne znaczenie dla pomiarów o niewielkiej liczności. Dla liczby pomiarów większej niż 30, można przyjąć, że wyliczone wielkości CEP nie różnią się istotnie między sobą i są bliskie wartości 0,832548, tzn. wartości $\sqrt{\ln 2} = 0,832555$, tak jak w zależności (1).

Jak wynika z przedstawionego przeglądu, parametr CEP można wyliczać wg różnych zależności matematycznych. Wykorzystywane jest to głównie przez producentów odbiorników GPS i systemów nawigacji lądowej

Interesujące jest porównanie, na ile wyniki CEP, różnią się między sobą. W tym celu, dla rzeczywistych pomiarów, wykonano obliczenia CEP wg zależności (1), (3) i (4) oraz (5), (6) i (7).

3. Obliczenia CEP

Obliczenia wykonano dla danych uzyskanych przy badaniach systemu nawigacji lądowej zamontowanym na pojeździe, w którym CEP określono jako funkcję przebytej drogi. Wykonano przejazdy i w określonych punktach pomiarowych, o znanych współrzędnych, rejestrowano położenia punktów określanych przez badany system nawigacyjny. Wyniki różnic współrzędnych y_i i x_i oraz wyliczonych błędów położenia R_i oraz CEP przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

**Wyniki różnic współrzędnych na poszczególnych punktach pomiarowych
[w metrach] oraz wyliczone wartości CEP wg zależności z rozdziału 2**

i	pkt A			pkt B			pkt C			pkt D			pkt E		
	y _i	x _i	R _i	y _i	x _i	R _i	y _i	x _i	R _i	y _i	x _i	R _i	y _i	x _i	R _i
1	-4	4	5,66	-2	0	2,00	-3	-1	3,16	-11	0	11,00	-16	-18	24,08
2	-3	6	6,71	-2	2	2,83	-4	0	4,00	-11	0	11,00	-15	14	20,52
3	-5	3	5,83	-4	1	4,12	-4	0	4,00	-11	-1	11,05	-13	10	16,40
4	-4	1	4,12	-2	1	2,24	-4	-1	4,12	-13	2	13,15	-17	16	23,35
5	-4	2	4,47	-2	0	2,00	-3	0	3,00	-10	0	10,00	-16	7	17,46
6	-1	7	7,07	-2	1	2,24	-2	1	2,24	-6	-4	7,21	-8	-6	10,00
7	-5	1	5,10	-2	1	2,24	-8	2	8,25	-16	3	16,28	-20	19	27,59
8	-7	-2	7,28	-3	2	3,61	-2	1	2,24	-8	0	8,00	-9	5	10,30
9	-4	2	4,47	-5	3	5,83	0	1	1,00	-6	-2	6,32	-11	2	11,18
10	-6	8	10,00	-1	1	1,41	0	2	2,00	-7	-1	7,07	-11	4	11,70
11				0	2	2,00									
12				0	2	2,00									
CEP obliczony wg zależności ():															
(1)	5,246			2,463			3,235			8,764			15,236		
(3)	5,244			2,403			2,858			7,200			15,171		
(4)	5,263			2,435			2,942			7,470			15,276		
(5)	5,245			2,463			3,235			8,763			15,235		
(6)	5,312			2,488			3,276			8,874			15,427		
(7)	5,181			2,437			3,195			8,655			15,047		

4. Wnioski

Analizując wyliczone wartości parametru CEP, można stwierdzić:

1. Wartości wyliczone na podstawie różnych zależności przedstawianych w literaturze są zbliżone do siebie.
2. Najniższą wartość CEP uzyskuje się stosując zależność (3) (średnią arytmetyczną RMS różnic współrzędnej Y i współrzędnej X).
3. Wartość CEP obliczona wg zależność (1) jest najbliższa wynikom uzyskanym wg estymatora wyprowadzonego z kryterium największej wiarygodności – zależność (5).
4. Przy dużej liczbie pomiarów ($n > 30$), nie ma istotnego znaczenia z jakiej zależności korzysta się do wyliczenia wartości tego parametru.

Literatura

- [1] ROZPORZĄDZENIE RADY (WE) NR 1334/2000 z dnia 22 czerwca 2000 r. ustanawiające wspólnotowy system kontroli eksportu produktów i technologii podwójnego zastosowania.
<http://europe.eu.int/eur-lex/pl/dd/docs/2000/32000R1334-PL.doc>
- [2] ROZPORZĄDZENIE RADY (WE) NR 149/2003 z dnia 27 stycznia 2003 r. zmieniające i aktualizujące rozporządzenie (WE) nr 1334/2000 ustanawiające wspólnotowy system kontroli wywozu produktów i technologii podwójnego zastosowania.
<http://europa.eu/eur-lex/pl/dd/docs/2003/32003R0149-PL.doc>
- [3] David L. Wilson's GPS Accuracy Web Page. "ASSORTED MATHEMATICS"
<http://users.erols.com/dlwilson/gpseqtns.htm>
- [4] The Global Positioning System: A Shared National Asset (1995). Commission on Engineering and Technical Systems (CETS).
- [5] Appendix D. "Accuracy Definitions And Mathematical Relationships".
<http://www.nap.edu/books/0309052831/html/177.html>
- [6] NovAtel. Positioning Leadership. APN-029 Rev 1. December 03,2003. GPS "Position Accuracy Measures".
<http://www.novatel.com/Documents/Bulletins/apn029.pdf>
- [7] Logan Scott Consulting. Logan Scott, Principal. "Linear, Circular and Spherical Error Probability Manifolds".
http://home.earthlink.net/~loganscott53/Circular_Error_Probable.htm
- [8] Sharad Saxena, Housila P. Singh "Some Estimators of the Dispersion Parameter of a Chi-distributed Radial Error with Applications to Target Analysis". AUSTRIAN JOURNAL OF STATISTICS. Volume 34 (2005), Number 1, 51–63.
<http://www.stat.tugraz.at/AJS/ausg051/051Saxena&Singht.pdf>