

RADIALNE DRGANIA WYMUSZONE GRUBOŚCIENNEJ OSŁONY KULISTEJ

Zbadano problem radialnych drgań grubościennej osłony kulistej, obciążonej udarowo wewnętrznym ciśnieniem impulsowym. Założono, że materiał osłony jest sprężysto nieściśliwy. Przy takim uproszczeniu uzyskano zamknięte analityczne rozwiązanie zagadnienia dynamiki osłony kulistej w ramach liniowej teorii sprężystości. Okazuje się, że osłona kulista wykonana z materiału nieściśliwego, podobnie jak rura [5], obciążona wewnątrz udarowo, zachowuje się jak układ o jednym stopniu swobody. Częstotliwość kołowa drgań własnych osłony kulistej jest kilkakrotnie większa od częstotliwości rury o tej samej średnicy wewnętrznej i grubości ścianki.

Przedstawione rozwiązanie można wykorzystać do szacowania wytrzymałości kulistych osłon balistycznych stosowanych przy wybuchowym napędzaniu cienkościennych pierścieni używanych w badaniach dynamicznych właściwości materiałów. Poza tym przedstawione wyniki badań dają dodatkowy wkład wiedzy do teorii drgań technicznych układów ciągłych.

1. Wprowadzenie

Jednym z doświadczalnych sposobów badania mechanicznych właściwości materiałów obciążonych dynamicznie jest metoda pierścieniowa [1, 2]. Metoda ta polega na rejestracji radialnego ruchu lub promieniowej prędkości rozszerzania się cienkiego pierścienia, wykonanego z badanego materiału i napędzanego produktami detonacji ładunku wysokoenergetycznego materiału wybuchowego (MW) lub silnym, impulsowym polem elektromagnetycznym.

W celu wyeliminowania wpływu zaburzeń w procesie napędzania pierścienia, pochodzących od produktów detonacji MW, używa się do tego celu grubościennych osłon metalowych o symetriach kulistej lub cylindrycznej. Pierścień nakłada się na zewnętrzną powierzchnię tych osłon, a ich wnętrze wypełnione jest całkowicie lub częściowo MW. Po detonacji MW w ściance obudowy propaguje się uderzeniowa fala ściskania, która odbija się od powierzchni kontaktowej z pierścieniem i powoduje skokowe jego napędzenie. Oddziaływanie produktów spalania materiałów wybuchowych na obudowy o różnej geometrii występuje również w pociskach artyleryjskich, granatach i bombach oraz w lufach urządzeń miotających [3, 4]. Zagadnienia te są przedmiotem różnorodnych badań doświadczalnych i teoretycznych.

W pracy [5] zbadano analitycznie zagadnienie radialnych drgań grubościennej rury wymuszonych wewnętrznym ciśnieniem nagle wytworzonym i równomiernie rozłożonym wzdłuż jej długości. Materiał rury modelowano liniowo – sprężystym ośrodkiem nieściśliwym. Dla takiego materiału uzyskano zamknięte analityczne rozwiązanie zagadnienia dynamiki grubościennej rury. Okazuje się, że rura wykonana z materiału nieściśliwego,

obciążona wewnętrznie udarowo, zachowuje się jak układ o jednym stopniu swobody. Na przykład rura obciążona nagle stałym wewnętrznym ciśnieniem drga ze stałą częstotliwością kołową ω_0 wokół stanu określonego przez statyczne rozwiązanie zagadnienia Lamé'go.

W niniejszej pracy rozpatrzmy analogiczne zagadnienie dla grubościennej osłony kulistej. Porównanie analitycznych wyników, określających dynamiczne stany obydwóch obiektów ma istotne znaczenie praktyczne i daje dodatkowo wkład wiedzy do teorii drgań obiektów ciągłych.

2. Sformułowanie problemu

Określimy dynamiczne stany: radialnego przemieszczenia, naprężenia i odkształcenia w grubościennej osłonie kulistej, obciążonej udarowo wewnętrznym ciśnieniem $p(t)$.

Oznaczmy przez a i b wewnętrzny i zewnętrzny promień osłony. Zagadnienie będziemy rozwiązywać w sferycznym układzie współrzędnych Lagrange'a r, φ, θ . Ze względu na kulistą symetrię problem jest przestrzennie jednowymiarowy. W związku z tym stany naprężenia i odkształcenia w materiale osłony reprezentowane są przez następujące składowe:

$$\begin{aligned} \sigma_r & - \text{naprężenie promieniowe (radialne),} \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta & - \text{naprężenia obwodowe (styczne),} \\ \varepsilon_r & - \text{odkształcenie promieniowe (radialne),} \\ \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta & - \text{odkształcenia obwodowe (styczne).} \end{aligned}$$

Pozostałe składowe tensorów naprężenia i odkształcenia w tym układzie współrzędnych są równe zeru.

Problem rozwiązujemy w ramach liniowej teorii sprężystości, zgodnie z którą mamy następujące relacje [6]:

$$\varepsilon_r(r, t) = \frac{\partial u(r, t)}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi(r, t) = \varepsilon_\theta(r, t) = \frac{u(r, t)}{r}, \quad (2.1)$$

$$\sigma_r(r, t) = 2\mu\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi) = (2\mu + \lambda)\varepsilon_r + 2\lambda\varepsilon_\varphi, \quad (2.2)$$

$$\sigma_\varphi(r, t) = 2\mu\varepsilon_\varphi + \lambda(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi) = 2(\mu + \lambda)\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_r,$$

gdzie u i r są odpowiednio przemieszczeniem radialnym elementu osłony i współrzędną Lagrange'a, λ i μ oznaczają stałe Lamégo:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.3)$$

Z kolei symbole E i ν oznaczają odpowiednio moduł Younga i liczbę Poissona.

Z prawa zachowania masy zapisanego dla elementu osłony we współrzędnej Lagrange'a r dla symetrii kulistej, otrzymuje się:

$$(r + u)^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\rho_0}{\rho} r^2, \quad (2.4)$$

gdzie symbole ρ_0 i ρ oznaczają gęstości materiału osłony: początkową i bieżącą.

Dla umiarkowanych ciśnień nie przekraczających kilku tysięcy MPa, w przypadku metali można przyjąć, że $\rho \approx \rho_0 = \text{const}$. Dyskusję tego uproszczenia przedstawiono w [5]. Popełniany przy tym błąd nie przekracza kilku procent. Po uwzględnieniu tego założenia, dla małych odkształceń, ($\varepsilon_\varphi \varepsilon_r = \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \approx 0$, $\varepsilon_\varphi^2 = \left(\frac{u}{r}\right)^2 \approx 0$) równanie (2.4) można zredukować do postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} = 0. \quad (2.5)$$

Z dynamicznej równowagi elementu osłony, zapisanej we współrzędnej Lagrange'a r , po przekształceniach otrzymuje się ogólne równanie ruchu tego elementu w następującej postaci:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(1 + \frac{u}{r}\right)^2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \left(1 + \frac{u}{r}\right) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r}. \quad (2.6)$$

Dla małych odkształceń, po pominięciu małych wyższego rzędu, równanie (2.6) można zredukować do postaci:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Zlinearyzowany układ równań (2.5) i (2.7) rozwiążemy dla następujących warunków granicznych:

$$\sigma_r(a, t) = -p(t) \quad \text{dla} \quad r = a, \quad (2.8)$$

$$\sigma_r(b, t) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad r = b, \quad (2.9)$$

$$u(r, 0) \equiv 0 \quad \text{i} \quad v(r, 0) = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv 0. \quad (2.10)$$

Obecnie przejdziemy do konstrukcji analitycznego rozwiązania tak sformułowanego problemu.

3. Szkic analitycznego rozwiązania problemu

Rozwiązanie ogólne równania (2.5) ma postać:

$$u(r, t) = \frac{C(t)}{r^2}, \quad (3.1)$$

gdzie $C(t)$ jest ciągłą, dwa razy różniczkowalną funkcją czasu.

Po podstawieniu wyrażenia (3.1) do (2.1) i (2.2), wykorzystaniu równań (2.7), (2.9) i (2.8) oraz wprowadzeniu następujących oznaczeń:

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad (3.2)$$

$$\omega_0^2 = 4 \frac{\mu}{\rho_0} \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2 b^2} = 4 \left(\frac{c}{a}\right)^2 \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\beta^2},$$

otrzymuje się:

$$\ddot{C}(t) + \omega_0^2 C(t) = \frac{a}{\rho_0} \frac{\beta}{\beta - 1} p(t), \quad (3.3)$$

gdzie c oznacza prędkość propagacji fali poprzecznej w materiale osłony, a ω_0 jest kołową częstością drgań własnych osłony. Okazuje się, że podobnie jak rura nieściśliwa [5], grubościenna osłona kulista charakteryzuje się jedną częstością drgań własnych i zachowuje się podobnie jak układ o jednym stopniu swobody.

Zakładając jednorodne warunki początkowe:

$$C(0) = 0 \quad \text{i} \quad \dot{C}(0) = \left. \frac{dC(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (3.4)$$

rozwiązanie równania (3.3) ma postać [7]:

$$C(t) = \frac{a}{\rho_0 \omega_0} \frac{\beta}{\beta - 1} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Jak widać, dla zadanego ciśnienia $p(t)$, za pomocą całki (3.5) jednoznacznie określa się funkcję $C(t)$, która determinuje wszystkie parametry problemu, a mianowicie:

$$u(r, t) = \frac{C(t)}{r^2}, \quad (3.6)$$

$$v(r, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\dot{C}(t)}{r^2}, \quad \dot{C}(t) = \frac{dC(t)}{dt}, \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_r(r, t) = \frac{\partial u}{\partial r} = -2 \frac{C(t)}{r^3}, \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_\varphi(r, t) = \varepsilon_\theta(r, t) = \frac{u}{r} = \frac{C(t)}{r^3}, \quad (3.9)$$

$$\sigma_r(r, t) = \frac{1}{\beta - 1} \left(1 - \frac{b}{r}\right) p(t) + 4 \frac{\mu}{b^3} \left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^3 - \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)\right) C(t), \quad (3.10)$$

$$\sigma_\varphi(r, t) = \frac{1}{\beta - 1} \left(1 - \frac{b}{r}\right) p(t) + 2 \frac{\mu}{b^3} \left(2 + \left(\frac{b}{r}\right)^3 - 2 \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right)\right) C(t). \quad (3.11)$$

Jeśli wewnątrz osłony wytworzone jest ciśnienie w sposób statyczny, tj.: $p(t) = p_s = \text{const}$, to funkcja $C(t) = C_s = \text{const}$. Wówczas $\ddot{C}(t) = 0$ i z relacji (3.3) otrzymuje się:

$$C(t) = C_s = \frac{1}{4} \frac{p_s}{\mu} \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} = \frac{1}{4} \frac{p_s}{\mu} \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1} a^3. \quad (3.12)$$

Dalej, po podstawieniu do wzorów (3.6), (3.8)-(3.11) w miejsce funkcji $C(t)$ wielkości C_s , otrzymuje się wartości parametrów problemu dla obciążenia statycznego.

4. Dynamiczny stan parametrów osłony kulistej obciążonej w sposób nagły wewnętrznym ciśnieniem $p = \text{const}$.

W celu uproszczenia analizy ilościowej poszczególnych parametrów: przemieszczenia, prędkości, odkształceń i naprężeń, wprowadzimy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{r}{a}, & \eta &= \frac{t}{T_0}, & \beta &= \frac{b}{a}, & U &= \frac{u}{a}, & V &= \frac{v}{c}, \\ \bar{C} &= \frac{C}{a^3}, & F &= \frac{\mu}{p}, & S_r &= \frac{\sigma_r}{p}, & S_\varphi &= \frac{\sigma_\varphi}{p}, & U_s &= \frac{u_s}{a}, \\ \bar{C}_s &= \frac{C_s}{a^3}, & S_{rs} &= \frac{\sigma_{rs}}{p_s}, & S_{\varphi s} &= \frac{\sigma_{\varphi s}}{p_s}, & \bar{\omega}_0 &= \frac{\omega_0}{(c/a)}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

gdzie T_0 jest okresem drgań własnych osłony:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (4.2)$$

Po podstawieniu $p(\tau) = p = \text{const}$ do wyrażenia (3.5), scałkowaniu w granicach $0 \div t$ i wykorzystaniu wielkości bezwymiarowych (4.1) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \bar{C}(t) &= \frac{1}{4F} \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1} (1 - \cos 2\pi\eta) = \bar{C}_s (1 - \cos 2\pi\eta), \\ \bar{C}_s &= \frac{1}{4F} \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pozostałe parametry określające mechaniczny stan osłony, zgodnie z wyrażeniami (3.6)-(3.12) i (4.3), można wyrazić następującymi wzorami:

- dla obciążenia dynamicznego:

$$U(\xi, \eta) = \frac{\bar{C}_s}{\xi^2} (1 - \cos 2\pi\eta), \quad (4.4)$$

$$V(\xi, \eta) = \frac{1}{2F} \frac{\beta^2 \sqrt{\beta^2 + \beta + 1}}{\beta^3 - 1} \frac{1}{\xi^2} \sin 2\pi\eta, \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_\varphi(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \varepsilon_r(\xi, \eta) = \frac{\bar{C}_s}{\xi^3} (1 - \cos 2\pi\eta), \quad (4.6)$$

$$S_r(\xi, \eta) = -\frac{1}{\beta^3 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 - 1 \right) + A_r(\xi) \cos 2\pi\eta, \quad (4.7)$$

$$A_r(\xi) = \frac{1}{\beta^3 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 - (\beta^2 + \beta + 1) \left(\frac{\beta}{\xi} - 1 \right) - 1 \right),$$

$$S_\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{\beta^3 - 1} \left(2 + \left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 \right) + \frac{1}{\beta - 1} \left(\frac{\beta}{\xi} - 1 \right) - A_\varphi(\xi) \cos 2\pi\eta, \quad (4.8)$$

$$A_\varphi(\xi) = \frac{1}{\beta^3 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 + 2(\beta^2 + \beta + 1) \left(\frac{\beta}{\xi} - 1 \right) + 2 \right),$$

$$\bar{\omega}_0 = 2 \frac{\sqrt{\beta^2 + \beta + 1}}{\beta}; \quad (4.9)$$

- dla obciążenia statycznego:

$$U_s(\xi) = \frac{1}{4F} \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1} \frac{1}{\xi^2} = \frac{\bar{C}_s}{\xi^2}, \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_\varphi(\xi) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{rs}(\xi) = \frac{\bar{C}_s}{\xi^3}, \quad (4.11)$$

$$S_{rs}(\xi) = -\frac{1}{\beta^3 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 - 1 \right), \quad (4.12)$$

$$S_\varphi(\xi) = \frac{1}{\beta^3 - 1} \left(2 + \left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 \right) + \frac{1}{\beta - 1} \left(\frac{\beta}{\xi} - 1 \right). \quad (4.13)$$

Dla porównania wyników przytoczymy analogiczne zależności uzyskane dla osłony cylindrycznej [5]:

- dla obciążenia dynamicznego:

$$C_s = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p}{2\mu}, \quad \bar{C}_s = \frac{C}{a^2} = \frac{1}{2F} \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}, \quad (4.14)$$

$$U(\xi, \eta) = \frac{1}{2F} \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{1}{\xi} (1 - \cos 2\pi\eta) = \frac{\bar{C}_s}{\xi} (1 - \cos 2\pi\eta), \quad (4.15)$$

$$V(\xi, \eta) = \frac{1}{F} \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{2 \ln \beta}} \frac{1}{\xi} \sin 2\pi\eta, \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_\varphi(\xi, \eta) = -\varepsilon_r(\xi, \eta) = \frac{\bar{C}_s}{\xi^2} (1 - \cos 2\pi\eta), \quad (4.17)$$

$$S_r(\xi, \eta) = -\frac{1}{\beta^2 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^2 - 1 \right) + A_r(\xi) \cos 2\pi\eta, \quad (4.18)$$

$$A_r(\xi) = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^2 - 1 \right) - \frac{\ln(\beta/\xi)}{\ln \beta},$$

$$S_\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^2 + 1 \right) - A_\varphi(\xi) \cos 2\pi\eta, \quad (4.19)$$

$$A_\varphi(\xi) = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^2 + 1 \right) + \frac{\ln(\beta/\xi)}{\ln \beta},$$

$$\bar{\omega}_0 = \sqrt{\frac{2(\beta^2 - 1)}{\beta^2 \ln \beta}}; \quad (4.20)$$

- dla obciążenia statycznego:

$$U_s(\xi) = \frac{1}{2F} \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{1}{\xi} = \frac{\bar{C}_s}{\xi}, \quad (4.21)$$

$$\varepsilon_{\varphi s}(\xi) = -\varepsilon_{rs}(\xi) = \frac{\bar{C}_s}{\xi^2}, \quad (4.22)$$

$$S_{rs}(\xi) = -\frac{1}{\beta^2 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^2 - 1 \right), \quad (4.23)$$

$$S_{\varphi s}(\xi) = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^2 + 1 \right). \quad (4.24)$$

Z analizy zamieszczonych wyżej wzorów wynika ogólny wniosek, że rozpatrywane osłony, obciążone w sposób nagły wewnętrznym ciśnieniem $p = \text{const}$, zachowują się jak układy mechaniczne o jednym stopniu swobody, które drgają radialnie z częstotliwościami kołowymi określonymi wzorami (4.9) i (4.20). Dynamiczny stan parametrów mechanicznych obciążonych osłon zmienia się w czasie cyklicznie wokół ich wartości statycznych, uzyskanych przy ciśnieniu wytworzonym statycznie o tej samej wartości tj.: $p = p_s = \text{const}$.

Obecnie przejdziemy do ilościowej analizy parametrów mechanicznych badanych osłon.

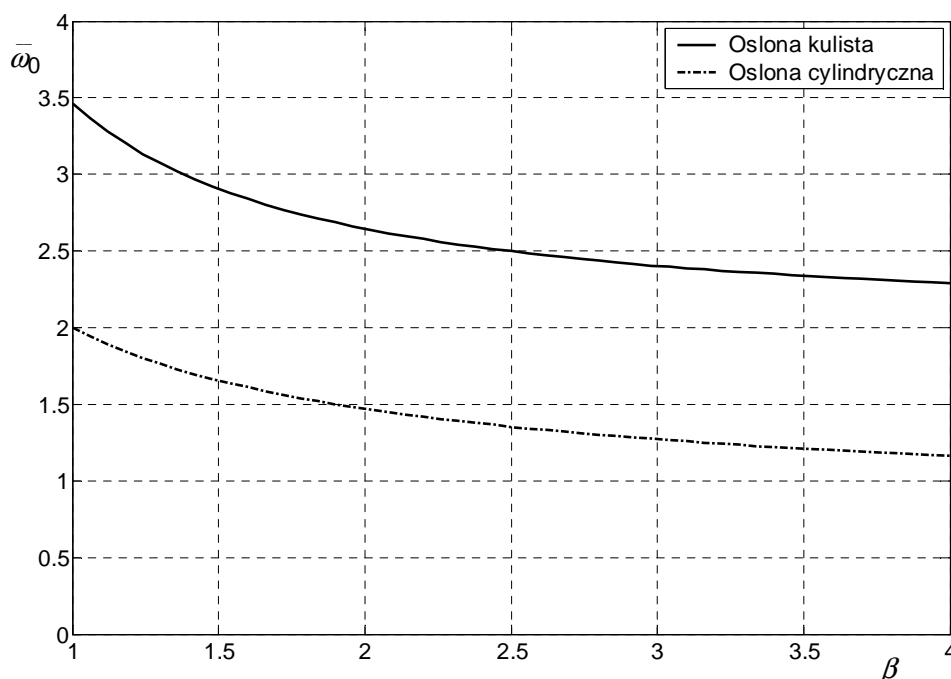
5. Ilościowa analiza dynamicznych parametrów mechanicznych badanych osłon

Zakładamy, że rozpatrywane osłony wykonane są ze stali o następujących charakterystykach mechanicznych: gęstość w warunkach normalnych – $\rho_0 = 7800 \text{ kg/m}^3$, moduł Kirchoffa – $\mu = 75 \text{ GPa}$. Wartość ciśnienia przyjmujemy $p = 400 \text{ MPa}$. Dla takich danych

mamy: $F = \frac{\mu}{p} = 187,5$; $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} = 3100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Pozostałe wartości liczbowe odpowiednich wielkości będą podawane przy analizie konkretnych parametrów.

Zgodnie ze wzorami (4.9) i (4.20), względne częstości kołowe drgań własnych rozpatrywanych osłon są funkcjami grubości ich ścianek charakteryzowanej przez parametr β . Wykresy tych funkcji pokazane są na rys.1.

Jak widać, kołowe częstości drgań własnych osłon maleją wykładniczo wraz ze wzrostem grubości ich ścian, co jest powodowane wzrostem ich masy. Istotnym jest fakt, że częstość kołowa osłony kulistej jest prawie dwa razy większa od częstości kołowej osłony cylindrycznej. Wynika to z większej sztywności osłony kulistej w porównaniu ze sztywnością osłony cylindrycznej przy tych samych grubościach ścianek.



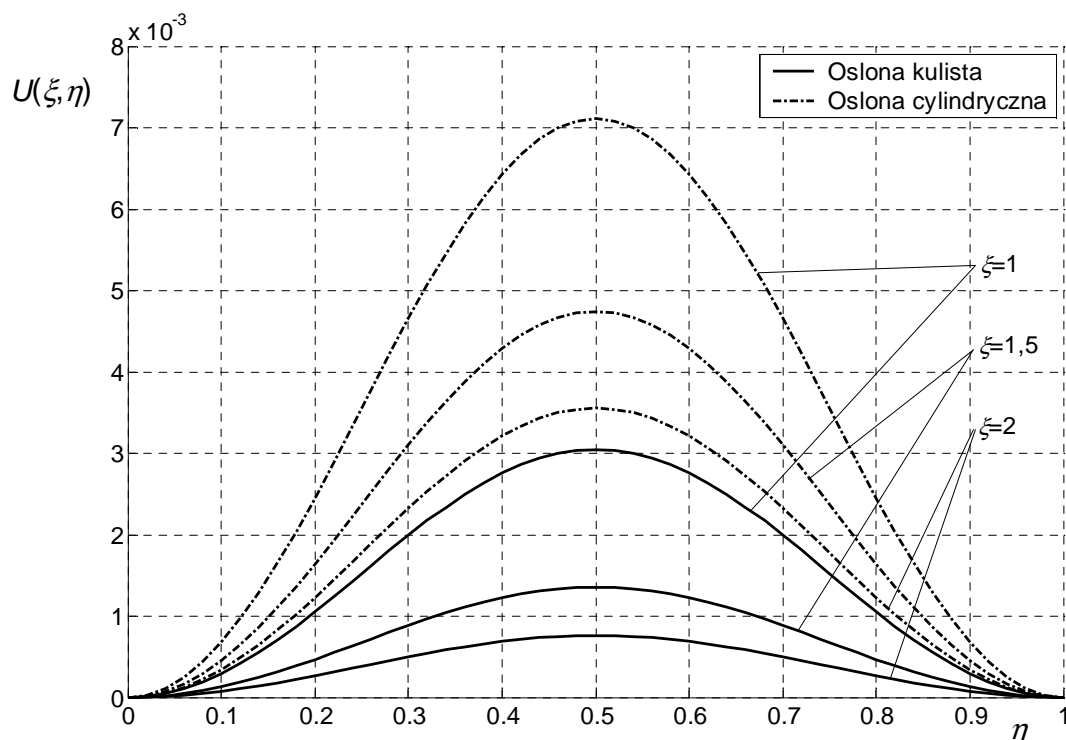
Rys. 1. Zmiany względnych kołowych częstości drgań własnych osłon w funkcji parametru β .

Na rys. 2. pokazane są wykresy zmian względnego radialnego przemieszczenia powierzchni osłon w przedziale $0 \leq \eta \leq 1$, tj. w pełnym okresie drgań $0 \leq t \leq T_0$, narysowane zgodnie ze wzorami (4.4) i (4.15) dla kilku wartości ξ i $\beta=2$. Zwróćmy uwagę na fakt, że przemieszczenie radialne wewnętrznej ($\xi=1$) i pozostałych powierzchni osłon jest dodatnią funkcją zmiennej η w całym okresie drgań. Oznacza to, że osłony podczas sprężystych drgań wymuszonych stałym wewnętrznym ciśnieniem, wytworzonym w sposób nagły, nie zmniejszają początkowej średnicy. Jak widać, amplitudy radialnych drgań poszczególnych powierzchni osłony kulistej są kilkakrotnie mniejsze od analogicznych amplitud osłony cylindrycznej. Oznacza to, że osłona kulista jest konstrukcją bardziej sztywną w porównaniu z osłoną cylindryczną.

W analogii do układu mechanicznego o jednym stopniu swobody, współczynnik dynamiczności uderowego obciążenia dla obydwóch osłon, zgodnie ze wzorami (4.4) i (4.10) oraz (4.15) i (4.21) określony jest wyrażeniem:

$$\Psi = \frac{U(\xi, \eta)}{U_s(\xi)} = 1 - \cos 2\pi\eta \quad (5.1)$$

i jego maksymalna wartość wynosi 2.

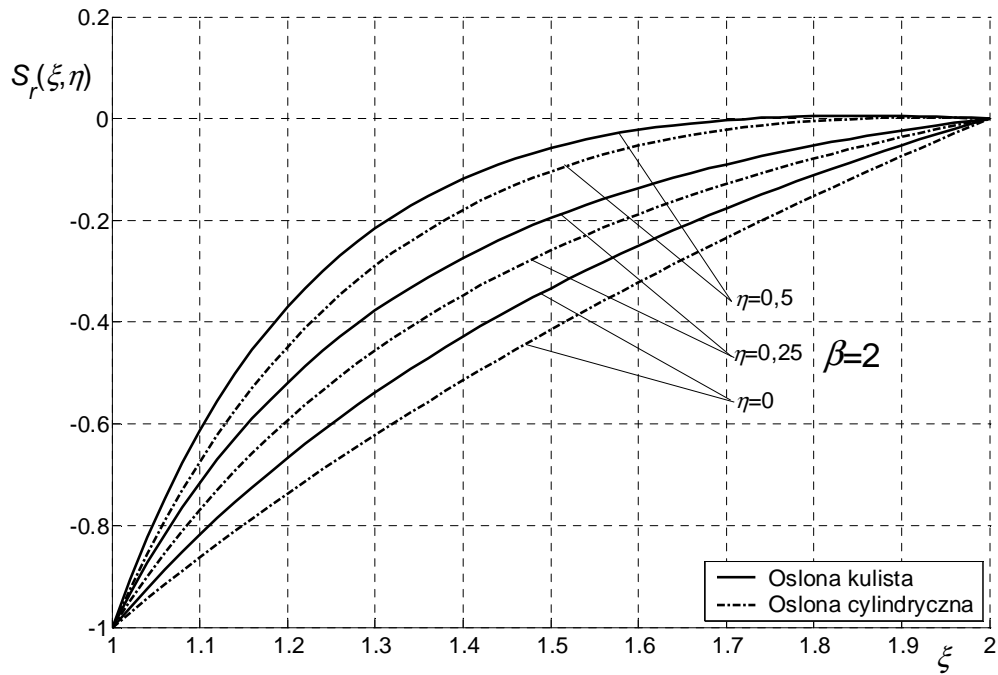


Rys. 2. Zmiany względnego radialnego przemieszczenia poszczególnych powierzchni osłon w przedziale $0 \leq \eta \leq 1$ dla kilku wartości parametru ξ i $\beta=2$.

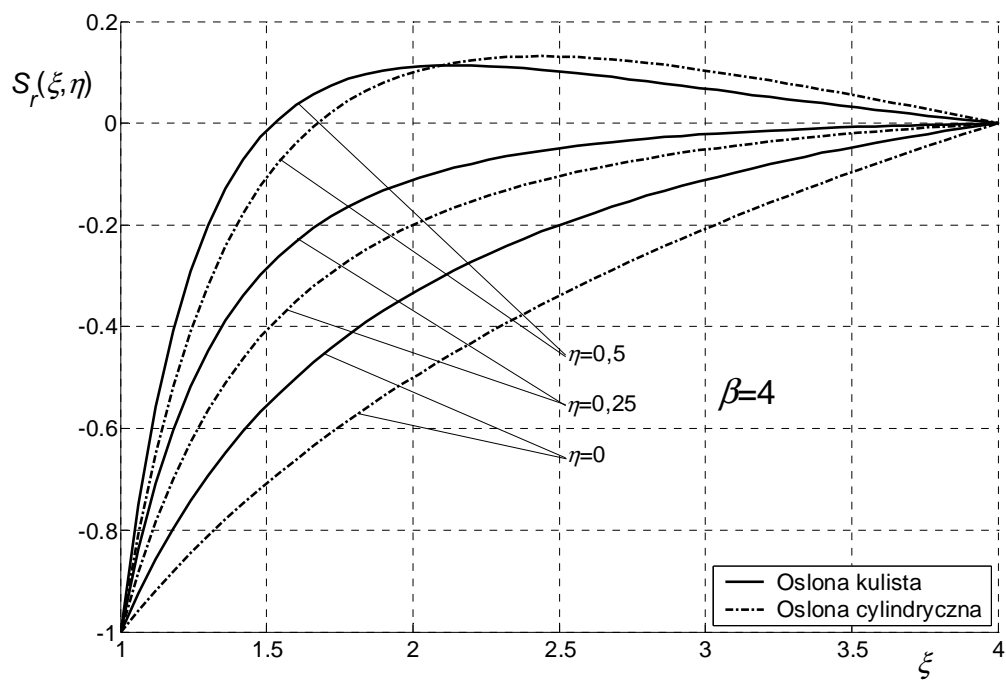
Z analizy wzorów (4.7) i (4.18) wynika wniosek, że funkcja $S_r(\xi, \eta)$ może zmieniać znak z ujemnego na dodatni (rozciąganie) wewnątrz ścianki osłony. Zjawisko to dla $\eta=0,5$ (połowa okresu drgań) występuje w osłonie kulistej, jeśli parametr β charakteryzujący grubość ścianki spełnia nierówność $\beta > 1,79$. Oznacza to, że w ściance o grubości, dla której ($\beta = b/a$) $< 1,79$ rozciągające naprężenia radialne nie wystąpią. Analogicznie dla osłony cylindrycznej wartością graniczną jest $\beta = 1,87$.

Graficzny obraz funkcji $S_r(\xi, \eta)$ przedstawiony jest na rysunkach 5 i 6.

a)

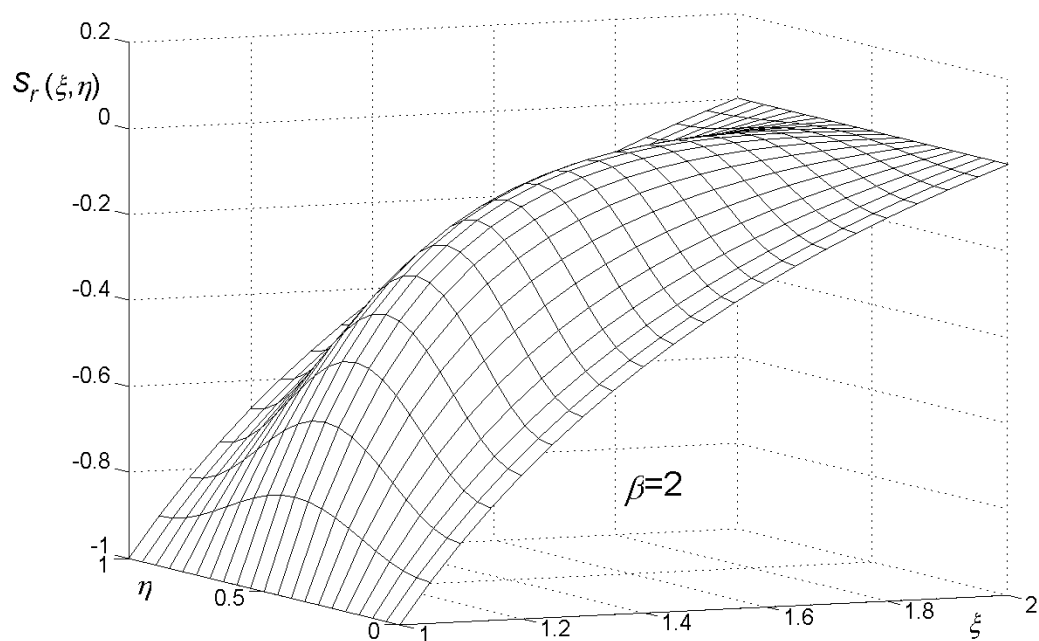


b)

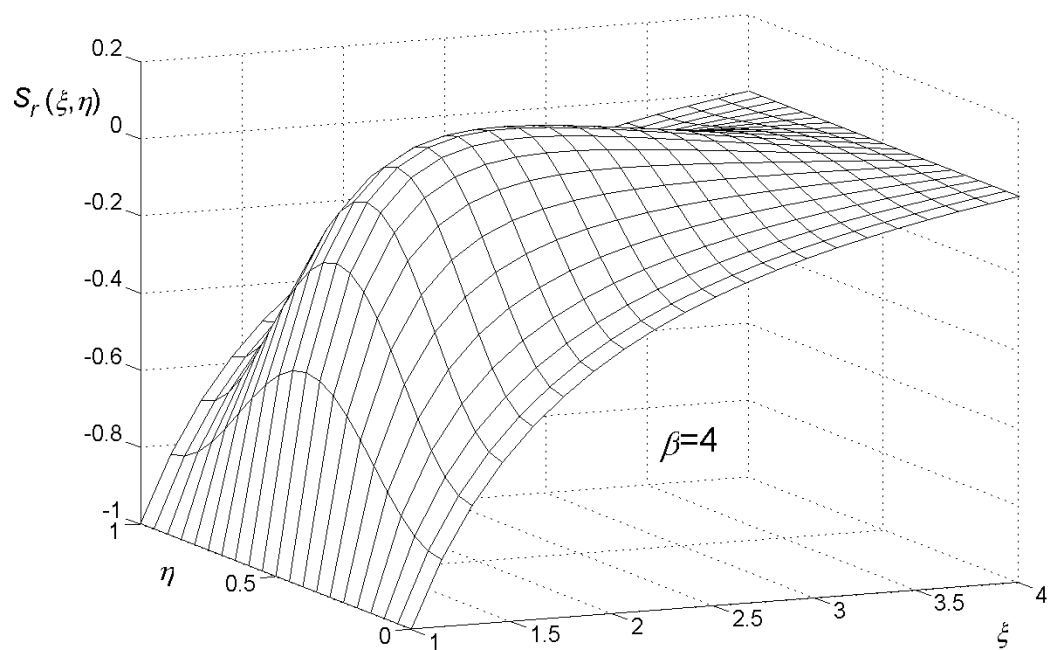


Rys. 5. Zmiana funkcji $S_r(\xi, \eta)$ wzdłuż grubości ścianek osłon dla $\eta=0$; 0,25 i 0,5 oraz $\beta=2$ i $\beta=4$.

a)



b)



Rys. 6. Przestrzenne kształty funkcji $S_r(\xi, \eta)$ dla osłony kulistej.

Wykresy zamieszczone na rys. 5 dla $\eta=0,25$ odpowiadają obciążeniu statycznemu ($\cos 2\pi \cdot 0,25 = 0$). Pozostałe wartości funkcji $S_r(\xi, \eta)$ dla $\eta=0$ i $\eta=0,5$ są symetrycznie rozmieszczone względem wykresu statycznego. Oznacza to, że układ drga wokół położenia równowagi statycznej. Na wykresach zamieszczonych na rys. 5 funkcje $S_r(\xi, \eta)$ dla obydwóch

osłon mają podobne przebiegi jakościowe, natomiast występują niewielkie różnice ilościowe. Bezwzględne wartości funkcji $S_r(\xi, \eta)$ dla osłony cylindrycznej są w większości przypadków większe. Wynika to z faktu, że przemieszczenie i odkształcenia dla tego samego obciążenia i grubości ścianki w osłonie cylindrycznej są większe (rys. 2).

Na kolejnych rysunkach 7 i 8 przedstawiono analogiczne wykresy dla funkcji $S_\phi(\xi, \eta)$. Istotnym faktem, różniącym funkcję $S_\phi(\xi, \eta)$ od funkcji $S_r(\xi, \eta)$, jest zmiana jej znaku z ujemnego na dodatni podczas procesu drgań dla każdej grubości ścianki. W początkowej chwili procesu drgań bezwładność ścianki powoduje, że naprężenie obwodowe jest ujemne (ściskanie). Natomiast z upływem czasu ścianka przemieszcza się radialnie i naprężenie obwodowe zmienia znak na dodatni. Maksymalna wartość tego naprężenia występuje na wewnętrznej powierzchni ścianki ($\xi=1$) i jest osiągnięta w połowie okresu drgań ($\eta=0,5$ – rys. 7).

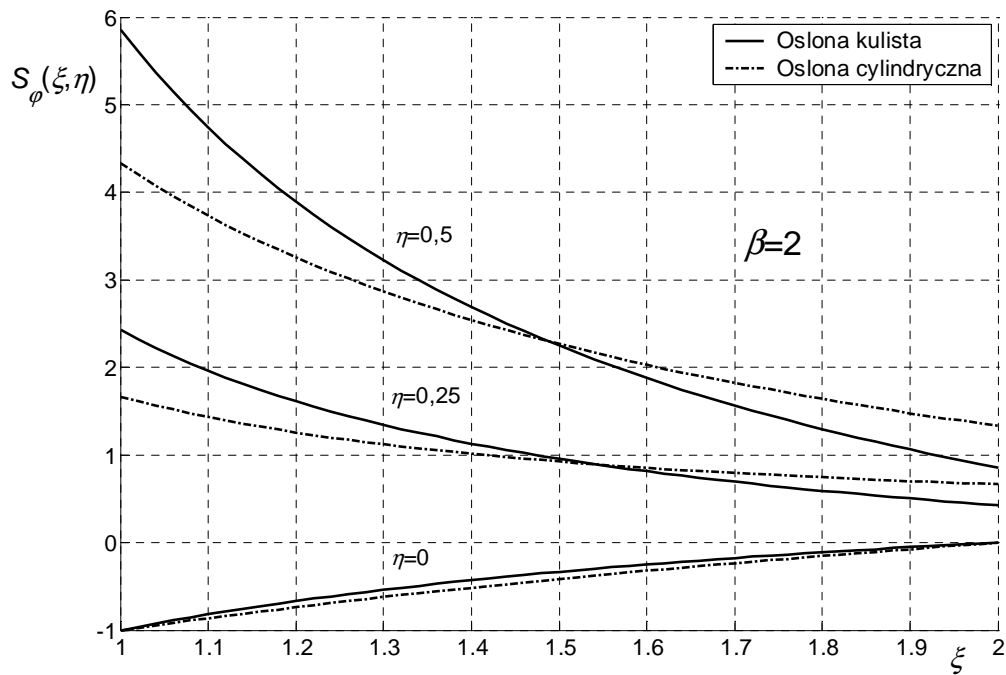
Z analizy przedstawionych na rysunku 7 wykresów wynika wniosek, że podobnie jak w przypadku funkcji $S_r(\xi, \eta)$, przebiegi jakościowe funkcji $S_\phi(\xi, \eta)$ dla osłon kulistych i cylindrycznych są podobne, natomiast występują dość znaczne różnice ilościowe. Generalnie można stwierdzić, że dla tych samych wartości średnic i grubości ścianek oraz ciśnienia wewnętrznego, wytworzonego w osłonach w sposób udarowy, naprężenia obwodowe są większe w osłonie kulistej.

6. Wnioski końcowe

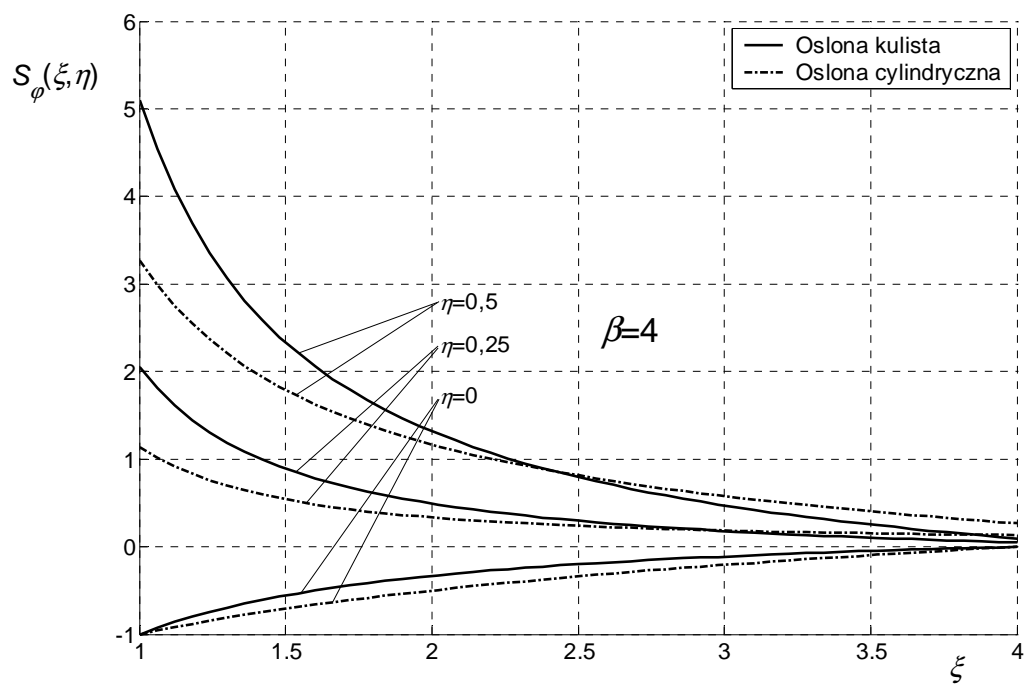
Z analizy problemu można sformułować następujące wnioski:

1. W analitycznym modelu dynamicznych obliczeń wytrzymałościowych metalowych osłon kulistych i cylindrycznych obciążonych udarowo wewnętrznym ciśnieniem rzędu kilkuset MPa, ich materiał można aproksymować, z wystarczającą dla celów technicznych dokładnością, ośrodkiem sprężyste nieściśliwym ($\rho=\rho_0=\text{const}$). Popelniany przy tym uproszczeniu błąd nie przekracza ułamka procenta.
2. Grubościenne osłony o symetrii kulistej i cylindrycznej, obciążone nagle wewnętrznym ciśnieniem drgają radialnie z częstotliwościami kołowymi ω_0 i zachowują się podobnie jak mechaniczny układ o jednym stopniu swobody. Przy równych średnicach i grubościach ścianek, kołowa częstota drgań własnych osłony kulistej jest prawie dwukrotnie większa od osłony cylindrycznej. Przyczyną tej różnicy jest większa sztywność osłony kulistej.
3. Maksymalny współczynnik dynamiczności drgań $\Psi=2$.
4. Z analitycznego rozwiązania problemu bezpośrednio wynika, że dynamiczne stany: radialnego przemieszczenia (u), odkształceń ($\epsilon_r, \epsilon_\phi$) i naprężeń (σ_r, σ_ϕ), wygenerowane w ściankach osłon wewnętrznym ciśnieniem $p(t)$ zdeterminowane są przez fizyczne właściwości ich materiału (ρ_0, μ) i geometrię (a, b) oraz charakter zmian ciśnienia w funkcji czasu ($p(t)$).

a)

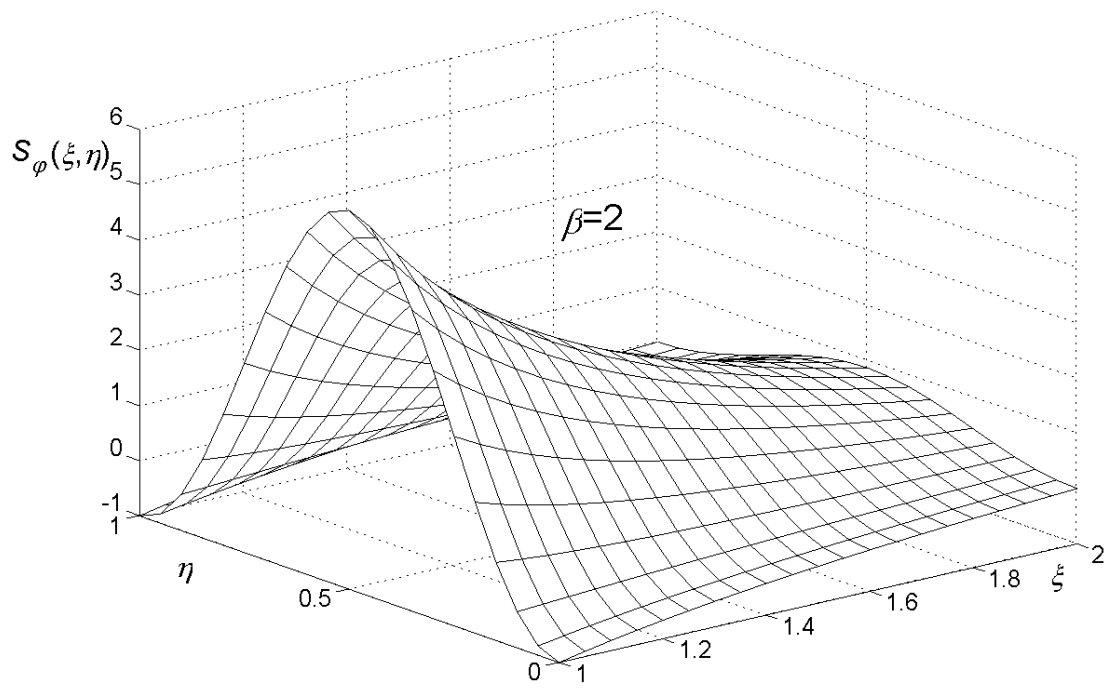


b)

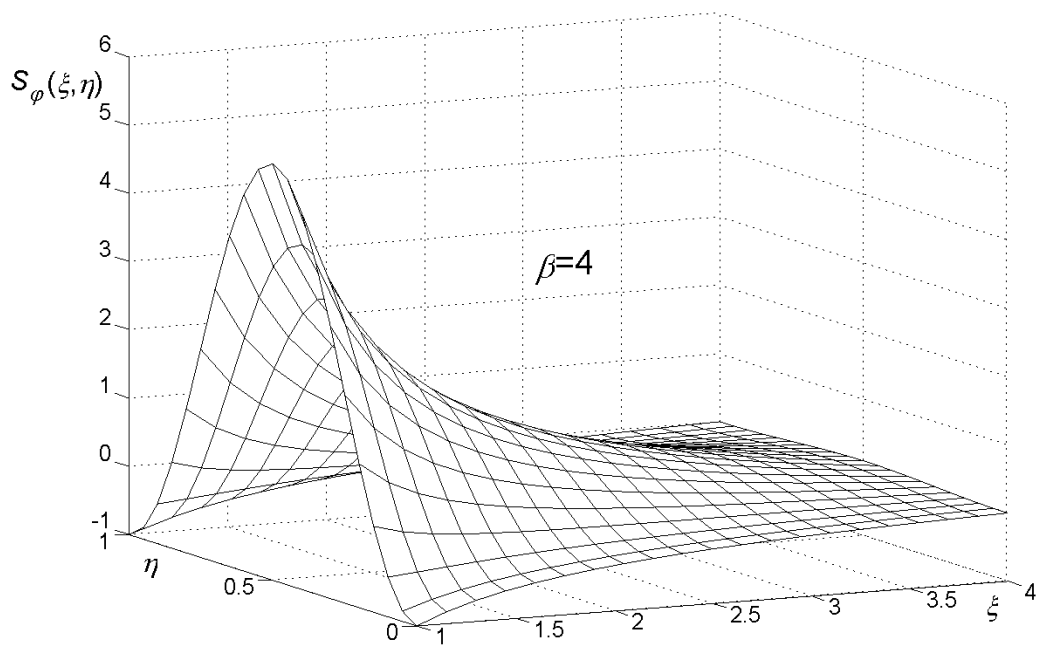


Rys. 7. Zmiana funkcji $S_\varphi(\xi, \eta)$ wzdłuż grubości ścianek osłon dla $\eta=0 ; 0,25$ i $0,5$ oraz $\beta=2$ i $\beta=4$.

a)



b)



Rys. 8. Przestrzenne kształty funkcji $S_\varphi(\xi, \eta)$ dla osłony kulistej.

Literatura

- [1] E. Włodarczyk, J. Janiszewski, *Static and dynamic ductility of copper and its sinters*, J. Tech. Phys., 45, 4, 263-274, 2004.
- [2] E. Włodarczyk, J. Janiszewski, Z. Głodowski, *Dynamiczny stan naprężenia i odkształcenia w cienkim, rozszerzanym wybuchowo metalowym pierścieniu*, Biul. WAT, Vol. LIV, Nr 2-3, 109-119, 2005.
- [3] W. P. Walters, J. A. Zukas, *Fundamentals of shaped charges*, New York: A. Wiley – Interscience Publication, 1989.
- [4] E. Włodarczyk, J. Janiszewski, M. Magier, *Analiza koncentracji osiowego naprężenia w rdzeniu wydłużonego pocisku podkalibrowego podczas strzału*, Biul. WAT, Vol. LIII, Nr 2-3, 109-132, 2004.
- [5] E. Włodarczyk, Z. Głodowski, R. Paszkowski, *Radialne drgania grubościennej rury wymuszone wewnętrznym ciśnieniem impulsowym*, Biul. WAT, Vol. LIV, Nr 10, 31-48, 2005.
- [6] W. Nowacki, *Teoria sprężystości*, Warszawa: PWN 1970.
- [7] Z. Dzygadlo, S. Kaliski, L. Solarz, E. Włodarczyk, *Drgania i fale w ciałach stałych*, Warszawa: PWN 1966.