

prof dr hab inż. Edward WŁODARCZYK *
ppłk dr inż. Mariusz MAGIER **
* Wojskowa Akademia Techniczna
** Wojskowy Instytut Techniczny Uzbrojenia

OPIS CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH PLASTYCZNIE

Streszczenie: W niniejszym artykule przedstawiono opis ciał odkształczalnych plastycznie oraz analizę zagadnienia rozprzestrzeniania się plastycznych odkształceń wzdłuż pręta, w kontekście obciążenia penetratora pocisku podkalibrowego.

THE DESCRIPTION OF THE OBJECTS UNDER PLASTIC STRAIN

Abstract: The description of the dynamic mechanical parameters of the rigid-plastic material is presented in this paper.

1. Modele ciał odkształczalnych

Matematyczne modele opisujące w języku matematyki problemy balistyki końcowej pocisków (penetratorów), zawierają równania różniczkowe z pochodnymi cząstkowymi, wyrażające prawa hydrodynamiki, a mianowicie:

- prawo zachowania masy;
- prawo zmiany ilości ruchu (pędu);
- prawo przekształcenia energii.

Ten układ równań domykają związki konstytutywne charakteryzujące dynamiczne właściwości mechaniczne metali.

W procesach odkształceń statycznych właściwości te ujmuje związek $\sigma - \varepsilon$ nazywany wykresem roboczym, uzyskiwanym z jednoosiowego rozciągania próbki danego materiału [1, 6]. W przypadku obciążeń dynamicznych ujawnia się dodatkowo wpływ szybkości odkształceń $\partial\varepsilon/\partial t$ na związek $\sigma - \varepsilon$. Uwzględnienie tego zjawiska prowadzi do skomplikowanych równań, których rozwiązanie konstruuje się zazwyczaj metodami numerycznymi. Okazuje się jednak, że dla szeregu ważnych praktycznie materiałów (np. stale wysokostopowe) w warunkach dynamicznych obciążeń można posługiwać się związkiem niezależnym w sposób jawny od szybkości odkształceń, tj.:

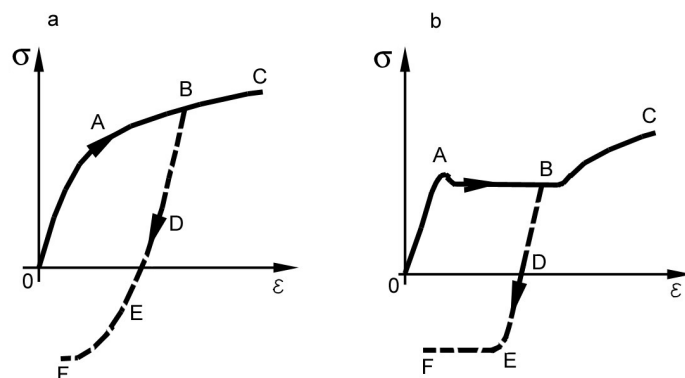
$$\sigma = \sigma(\varepsilon),$$

uzyskanym przy dynamicznym obciążeniu próbki [3, 6, 8].

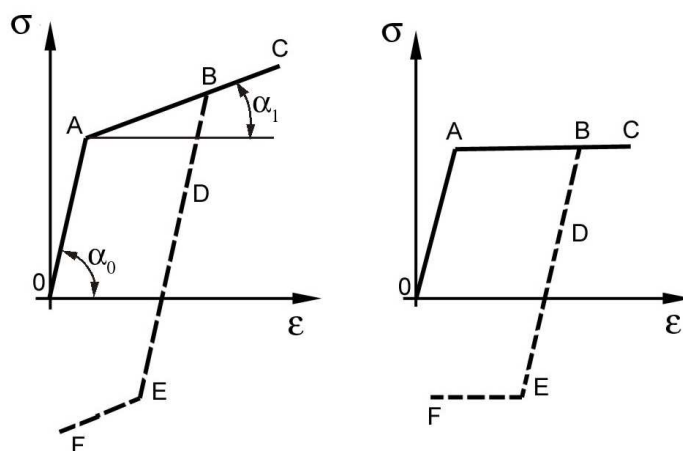
Dla dostatecznie małych naprężeń zależność $\sigma - \varepsilon$ jest liniowa i odwracalna. Materiał zachowuje się sprężyste. Gdy naprężenia są odpowiednio większe, zależność $\sigma - \varepsilon$ staje się nieliniowa, przy czym pojawiają się odkształcenia plastyczne (nieodwracalne).

Przejście między zakresem sprężystym a plastycznym może być stopniowe (płynne) jak pokazano to na rys.1.1a, albo nagłe, jak uwidoczniono to na rys.1.1b. W przypadku

pierwszym wielkość naprężenia na granicy plastyczności jest umowna, podczas gdy w przypadku drugim jest wyraźna i odpowiada ona pewnemu zjawisku fizycznemu. Wykresy pokazane na rys.1.1 są zbyt złożone, aby przyjmować je jako zależności podstawowe przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień technicznych. Dlatego stosuje się z reguły pewne uproszczenia. Pierwszym krokiem w tym kierunku jest zastąpienie wykresów krzywoliniowych przez ciąg odcinków linii prostych (rys.1.2a i 1.2b). Odcinki OA odpowiadają procesowi sprężystemu, a odcinki ABC – procesowi plastycznemu. Gdy odcinek ABC jest poziomy, otrzymujemy wykres, który charakteryzuje materiał idealnie plastyczny (rys.1.2b). Natomiast przy skośnie położonym odcinku ABC (rys.1.2a) mamy do czynienia z liniowym wzmocnieniem materiału.



Rys. 1.1. Zależność $\sigma - \varepsilon$ dla ośrodków sprężysto-plastycznych; a – bez wyraźnej granicy plastyczności, b – z wyraźną granicą plastyczności.

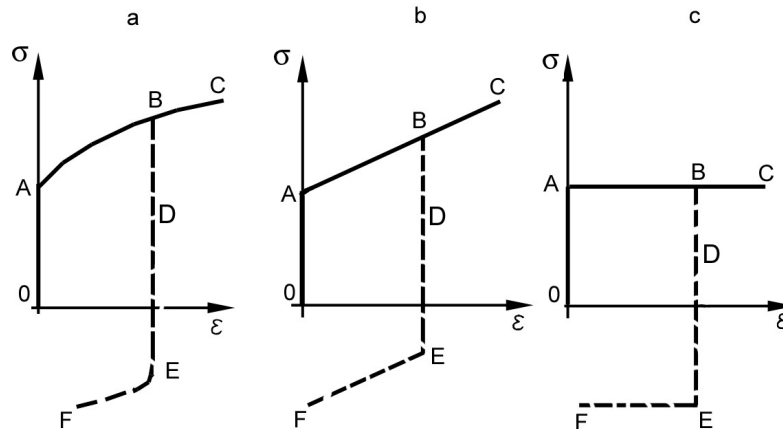


Rys.1.2. Zlinearyzowane zależności $\sigma - \varepsilon$ dla ciał sprężysto-plastycznych; a - liniowe wzmocnienie, b – idealna plastyczność.

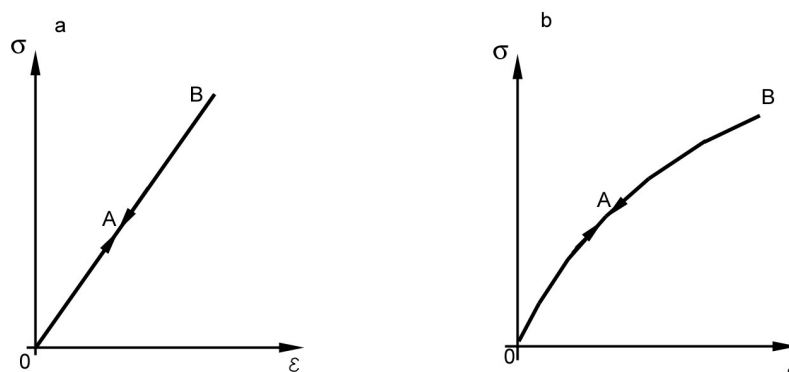
W przypadkach, gdy odkształcenia całkowite są duże w porównaniu z odkształceniami sprężystymi, można te ostatnie pominąć, co prowadzi do modelu ciał sztywno-plastycznych (rys.1.3).

W materiałach sprężystych procesy obciążania i odciążania są odwracalne i przebiegają wzdłuż tej samej krzywej $\sigma - \varepsilon$, zmienia się tylko kierunek procesu (rys.1.4). Tymczasem cechą zasadniczą zjawisk związanych z odkształceniami plastycznymi jest ich nieodwracalność. Materiał w procesie odciążenia reaguje bowiem sprężystością, co znajduje

swój wyraz w odpowiednim przebiegu wykresu roboczego. Z doświadczeń wynika, że jego nachylenie można z dostatecznym przybliżeniem przyjąć jako takie samo jak w pierwszym stadium obciążenia. Widoczne jest to na wykresach, przedstawionych na rysunkach 1.1÷1.3. Wskazują one na to, że jeśli materiał obciążymy w ten sposób, by wszedł on w fazę odkształceń plastycznych (OAB), a następnie odciążymy, odnośne krzywe odciążenia ($BDEF$) w pierwszej swej części (BDE) będą miały takie same nachylenie jak na odcinku OA .



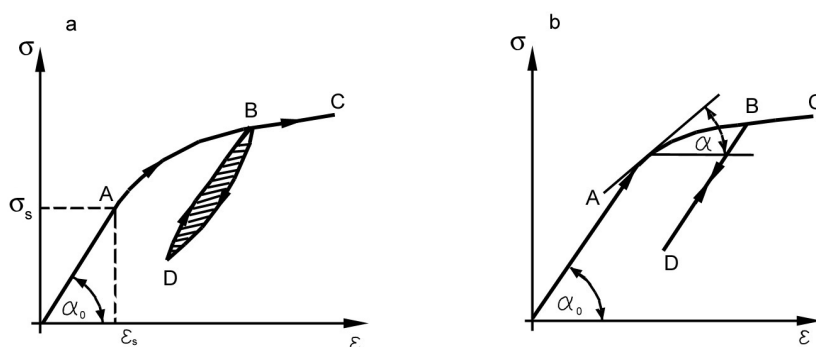
Rys.1.3. Zależności $\sigma - \varepsilon$ dla ośrodków sztywno-plastycznych; a - nieliniowe wzmocnienie, b - liniowe wzmocnienie, c - idealna plastyczność.



Rys.1.4. Zależności $\sigma - \varepsilon$ dla ośrodków sprężystych; a – sprężystość liniowa, b – sprężystość nieliniowa.

Gdy proces odciążenia poprowadzimy tak daleko, że naprężenie zmieni znak z dodatniego na ujemny, materiał może osiągnąć granicę plastyczności na ściskaniu. Dla materiałów idealnie plastycznych granica plastyczności przy ściskaniu jest wielkością stałą, którą przyjmuje się zazwyczaj jako równą granicy plastyczności przy rozciąganiu. Natomiast dla materiałów wykazujących wzmocnienie granica plastyczności przy ściskaniu jest, jak wynika to z wykresów na rysunkach 1.1÷1.3 zależna od miejsca na krzywej wzmocnienia odpowiadającego danemu etapowi rozciągania, zanim nastąpiło odciążenie (efekt Bauschingera). Zagadnieniem tym zajmuje się teoria ciał plastycznych wykazujących wzmocnienie.

W ten sposób opisywać jednak można interesujące nas zjawiska tylko w pierwszym przybliżeniu. Z badań doświadczalnych i dokładnej analizy odkształceń wynika bowiem szereg dalszych istotnych wniosków. Okazuje się, że jeśli proces odciążania przerwiemy w pewnym stadium, np. w stadium prezentowanym przez punkt D , a następnie badaną próbkę będziemy ponownie obciążali (por. rys.1.5a), to wtedy wykres roboczy dla tego ponownego procesu obciążenia nie będzie się pokrywał z uprzednio aktualnym wykresem odciążania, który nas doprowadził do stadium D . Odcinek opisujący odciążenie (BD) i odcinek opisujący obciążenie (DB) tworzą wąską pętlę, której pole informuje nas o pracy rozproszonej (dysypowanej) w trakcie cyklu roboczego BDB [7]. Zjawisko to, określone mianem histerezy sprężystej, w dalszych rozważaniach pominiemy. Założymy (por. rys.1.5b), że wykres dla procesu ponownego obciążania (po uprzednim całkowitym albo częściowym odciążeniu) pokrywa się z wykresem reprezentującym poprzednie odciążanie aż do chwili, gdy znajdziemy się ponownie na pierwotnym wykresie roboczym $\sigma - \varepsilon$. Następnie zaś proces odkształcenia scharakteryzowany będzie nadal tymże wykresem pierwotnym, tak jak gdyby cykl odciążanie-obciążanie w ogóle nie nastąpił. Zależność $\sigma - \varepsilon$ w czasie tak scharakteryzowanego procesu ponownego obciążania i następującego po nim dalszego plastycznego odkształcenia jest reprezentowana przez odcinki DBC na rysunku 1.5b.



Rys.1.5. Zależności $\sigma - \varepsilon$; a – z uwzględnieniem zjawiska histerezy, b – bez uwzględnienia zjawiska histerezy.

Założenie to utrzymamy w mocy dla wszystkich typów ciał sprężysto-plastycznych i sztywno-plastycznych, przedstawionych uprzednio na rysunkach 1.1÷1.3.

Rozważania dotychczasowe pozwalają jednocześnie wykryć pewną zasadniczą różnicę między zjawiskami sprężystymi a zjawiskami plastycznymi. Dla procesów związanych z pojawieniem się odkształceń plastycznych przestaje obowiązywać jednoznaczność zależności wiążących odkształcenia z naprężeniami, o której była mowa uprzednio. Widać np. od razu, że jeśli próbka jest odciążana zgodnie z programem BDE (rys.1.2), materiał przechodzi przez te same stany naprężenia i stany odkształcenia, przez jakie przechodził uprzednio w czasie procesu aktywnego OAB , z tym jednak, że odmienna jest teraz ich wzajemna zależność.

W ten sposób zatracą się jedno-jednoznaczność zależności $\sigma - \varepsilon$, tak znamienna dla procesów sprężystych (liniowych i nielinowych). Nawet w pewnym procesie jednoosiowego rozciągania poszukiwane odkształcenie może zależeć nie tylko od danej wartości aktualnego naprężenia, lecz również od wartości wszystkich poprzednich naprężeń, jakie działały na rozpatrywaną próbkę począwszy od jej stanu pierwotnego. Wynika stąd wniosek, że w zagadnieniach teorii plastyczności podać należy nie tylko końcowy stan obciążenia (co było wystarczające dla rozwiązywania zagadnień teorii ciał sprężystych liniowych oraz

nieliniowych), lecz również całą uprzednią „historię” rozpatrywanego procesu (jego „drogę”), počawszy od pierwotnego stanu beznaprężeniowego i bezodkształceniowego.

2. Fale plastyczne w prętach

Rozpatrzmy zagadnienie rozprzestrzeniania się plastycznych odkształceń wzdłuż pręta, który zachowuje cechy liniowo-sprężyste do określonej wartości naprężenia nazywanej granicą proporcjonalności lub granicą Hooke’a (największa wartość naprężenia, dla której ważne jest prawo Hooke’a). Za granicą proporcjonalności zależność między naprężeniem i odkształceniem jest inna.

Rozpatrywany układ stanowi pręt półnieskończony, którego koniec w chwili $t = 0$ został nagle napędzony do prędkości V_1 . Prędkość ta jest stała dla $t > 0$. zadanie polega na określeniu mechanicznego stanu pręta w dowolnej chwili t . Zakłada się, że związek $\sigma - \varepsilon$, w pręcie jest liniowy do granicy proporcjonalności a poza nią staje się nieliniowy, lecz jednoznaczny, tak że $\sigma' = \sigma'(\varepsilon)$, gdzie $\sigma'(\varepsilon)$ jest znaną jednoznaczną funkcją odkształcenia ε . Poza tym przyjmuje się, że szybkość zmiany odkształcenia $\partial\varepsilon/\partial t$ nie wpływa na zależność $\sigma' - \varepsilon$ oraz, że przekrój poprzeczny pręta A_0 jest dostatecznie mały, tak, aby można było pominąć wpływ radialnej kinetycznej energii na podłużny ruch pręta.

2.1. Fale plastyczne we współrzędnych Lagrange’a

Skupimy uwagę na małym elemencie pręta, który w chwili $t = 0$ był w odległości X od jego końca. Początkowe położenie przemieszczanego końca pręta przyjmujemy za początek układu współrzędnych, a dodatnie skierowanie osi współrzędnej X pokrywa się z osią pręta. Jeśli w chwili t przemieszczenie elementu jest u to z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że:

$$\rho_0 A_0 \delta X \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\sigma' + \frac{\partial \sigma'}{\partial X} \delta X - \sigma' \right) A_0$$

lub

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma'}{\partial X}, \quad (1.1)$$

gdzie ρ_0 – gęstość niezdeformowanego (początkowa) pręta, a σ' – umowne naprężenie, tj. siła działająca na pręt podzielona przez pole początkowego poprzecznego przekroju pręta, A_0 .

Jeśli teraz założymy, że związek $\sigma' - \varepsilon$ jest jednoznaczny kiedy naprężenie rośnie, to na podstawie równania (1.1) można zapisać:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d\sigma'}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X}, \quad (1.2)$$

gdzie ε jest względnym wydłużeniem elementu pręta, tj.

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial X}, \quad (1.3)$$

przy czym nie czyni się założenia, że ε jest obowiązkowo małe. Dalej, $d\sigma'/d\varepsilon$ jest modułem odkształcenia, sprężystego lub plastycznego, który będziemy oznaczać literą S , tj.

$$S = \frac{d\sigma'}{d\varepsilon}. \quad (1.4)$$

W dalszym ciągu rozważań moduł S rozpatruje się jako znaną funkcję odkształcenia, $S = S(\varepsilon)$. Po tych objaśnieniach, uwzględniając wyrażenia (1.3) i (1.4), równanie (1.2) można zapisać w postaci:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}. \quad (1.5)$$

Równanie (1.5) rozwiążemy dla następujących warunków brzegowych:

$$u = V_1 t \quad \text{dla } X=0 \quad \text{przy } t > 0, \quad (1.6)$$

$$u = 0 \quad \text{dla } X=\infty \quad \text{przy } t > 0. \quad (1.7)$$

Problem polega na rozwiązaniu równania (1.5) z warunkami (1.6) i (1.7) dla materiału, którego krzywa σ - ε i tym samym funkcja $S(\varepsilon)$ są znane. Okazuje się, że istnieją dwa rozwiązania tego problemu.

Jak można przekonać się bezpośrednim sprawdzeniem, funkcja

$$u = V_1 t + \varepsilon_1 X \quad (1.8)$$

spełnia równanie (1.5) i warunek brzegowy (1.6), przy czym rozwiązanie to odpowiada stałemu odkształceniu ε_1

Drugie rozwiązanie może być określone, jeśli spełniona jest równość:

$$\frac{S}{\rho_0} = \left(\frac{X}{t} \right)^2. \quad (1.9)$$

Ponieważ moduł S jest jednoznaczna funkcją odkształcenia ε to rozwiązanie (1.9) oznacza, że ε jest funkcją tylko zmiennej (X/t) , którą oznaczmy literą β , tj.

$$\beta = \frac{X}{t}. \quad (1.10)$$

Z kolei, mając na uwadze, że $\varepsilon = (\partial u / \partial X) = f(\beta)$, mamy:

$$u = \int_{-\infty}^X \frac{\partial u}{\partial X_1} dX_1 = \int_{-\infty}^X f(\beta_1) dX_1 = t \int_{-\infty}^{X/t} f(\beta_1) d\left(\frac{X_1}{t}\right)$$

a po uwzględnieniu (1.10) jest:

$$u = t \int_{-\infty}^{\beta} f(\beta_1) d\beta_1 \quad (1.11)$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że funkcja (1.11) spełnia warunek (1.7). Po zróżniczkowaniu wyrażenia (1.11) dwa razy względem czasu, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\beta} f(\beta_1) d\beta_1 + t \frac{\partial \beta}{\partial t} f(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} f(\beta_1) d\beta_1 - \frac{X}{t} f(\beta); \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} &= -\frac{X}{t^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{X}{t^2} f(\beta) + \frac{X}{t^2} f(\beta) - \frac{X}{t} f'(\beta) \left(-\frac{X}{t^2} \right) = \frac{1}{t} \beta^2 f'(\beta); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\beta^2}{t} f'(\beta), \end{aligned} \quad (1.12)$$

gdzie $f'(\beta)$ jest pochodną funkcji $f(\beta)$ względem argumentu β . Analogicznie, różniczkowanie względem X dostarcza następujące wyniki:

$$\frac{\partial u}{\partial X} = t \frac{\partial \beta}{\partial X} f(\beta) = t \frac{1}{t} f(\beta) = f(\beta); \quad \frac{\partial \beta}{\partial X} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = f'(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial X} = \frac{1}{t} f'(\beta). \quad (1.13)$$

Po podstawieniu wyrażen (1.12) i (1.13) do równania (1.5) mamy:

$$\rho_0 \frac{\beta^2}{t} f'(\beta) = S \frac{1}{t} f'(\beta).$$

Relacja ta jest spełniona w dwóch przypadkach, a mianowicie:

$$f'(\beta) = 0 \quad (1.14)$$

lub

$$\rho_0 \beta^2 = S \quad (1.15)$$

Wyrażenie (1.14) odpowiada rozwiązaniu (1.8), natomiast relacja (1.15) związana jest z rozwiązaniem, w którym

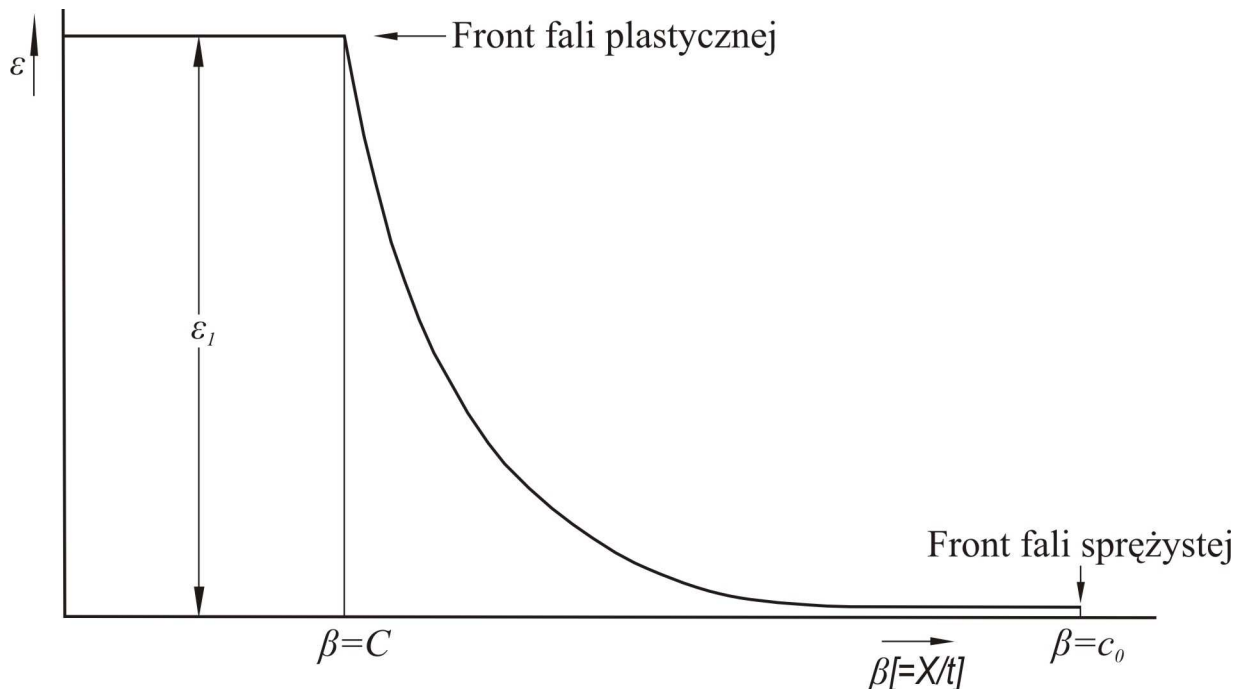
$$\frac{X}{t} = \left(\frac{S}{\rho_0} \right)^{1/2}. \quad (1.16)$$

Dla reprezentacji całkowitego rozwiązania analizowanego problemu, należy wyróżnić w przecie trzy obszary:

- Od $X = 0$ do $X = C t$ odkształcenie ma stałą wartość ε_1 , przy czym C jest prędkością rozprzestrzeniania się fali plastycznej [rozwiązanie (1.8)];
- W obszarze zawartym między liniami $X = C t$ i $X = c_0 t$ spełniona jest relacja (1.16), przy czym c_0 jest prędkością rozprzestrzeniania się fali sprężystej w przecie;
- Dla $X > c_0 t$ jest $\varepsilon = 0$ – obszar niezaburzony.

Na linii $X > c_0 t$ występuje nieciągłość odkształcenia. Wielkość S w obszarze b jest równa modułowi sprężystości podłużnej E i w przypadku liniowo-sprężystym mamy:

$$c_0^2 = \frac{E}{\rho_0}. \quad (1.17)$$



Rys.1.6. Schematyczna ilustracja rozkładu odkształcenia w przecie.

Na rys.1.6 pokazana jest schematyczna ilustracja zależności ε w funkcji β w trzech obszarach odpowiadających następującym przedziałom zmian wielkości β :

- (a) $0 < \beta < C$,
- (b) $C < \beta < c_0$,
- (c) $\beta > c_0$.

W obszarze (b) między frontem fali sprężystej i frontem fali plastycznej odkształcenie jest zmienne, ponieważ każdy jego przyrost od ε do $\varepsilon + d\varepsilon$ rozprzestrzenia się z prędkością zależną od wartości S odpowiadającej wielkości ε .

Dla zakończenia rozwiązania problemu należy jeszcze znaleźć zależność między prędkością rozprzestrzeniania się frontu fali plastycznej C i prędkością V_1 , z którą przemieszcza się koniec pręta.

Z rozwiązania w obszarze (a) (1.8) i równania (1.11) wynika, że przemieszczenie końca pręta wynosi:

$$u(0, t) = V_1 t = t \int_{-\infty}^0 f(\beta_1) d\beta_1,$$

Zatem prędkość V_1 określona jest całką:

$$V_1 = \int_{-\infty}^0 f(\beta_1) d\beta_1. \quad (1.18)$$

Dalej, zgodnie z rys.1.6, całkę (1.18), która określa pole pod krzywą $f(\beta)$ można przedstawić w innej postaci, a mianowicie:

$$V_1 = - \int_0^{\varepsilon_1} \beta d\varepsilon = - \int_0^{\varepsilon_1} \left(\frac{S}{\rho_0} \right)^{1/2} d\varepsilon. \quad (1.19)$$

Oznacza to, że jeśli S jest znaną funkcją ε , to wyrażenie (1.19) przedstawia zależność między odkształceniem ε_1 za frontem fali plastycznej i stałą prędkością przemieszczania się końca rozciąganego pręta. Prędkość rozprzestrzeniania się frontu plastycznej fali, C , można zatem otrzymać za pomocą krzywej σ - ε ponieważ ta prędkość jest równa wartości wielkości $(S/\rho_0)^{1/2}$ dla $\varepsilon = \varepsilon_1$, tj.

$$C = \sqrt{\frac{S}{\rho_0}} \quad \text{dla } \varepsilon = \varepsilon_1. \quad (1.20)$$

Rozkład naprężenia σ' w pręcie można otrzymać z rozkładu odkształcenia ε , przy czym występuje określona wartość odkształcenia ε_1 odpowiadająca granicy wytrzymałości materiału pręta. Prędkość V_1 odpowiadającą tej wartości można określić z (1.19). Po przekroczeniu tej wartości pręt jest niszczoney.

2.2. Fale plastyczne we współrzędnych Eulera

W metodzie Lagrange'a równania wyprowadza się dla małego odcinka pręta, który przemieszcza się w przestrzeni i zmienia swoją długość oraz przekrój poprzeczny podczas rozciągania (lub ściskania) pręta. W metodzie Eulera rozpatruje się ustalony obszar przestrzeni, a równania ruchu i ciągłości (zachowania masy) otrzymuje się dla elementu pręta przemieszczającego się przez ten obszar. Przyjmujemy za współrzędną Eulera x odległość od początkowego położenia końca pręta (x wzrasta wzdłuż pręta). Równanie ruchu dla obszaru zawartego między x i $x + \delta x$, można otrzymać, przyrównując różnicę sił działających na końce elementu pręta, znajdującego się w chwili t w tym obszarze, do iloczynu masy tego elementu przez przyspieszenie. Niech umowne naprężenie, analogicznie jak w poprzednim paragrafie, będzie σ' , wtedy w przekroju $x + \delta x$ ono wynosi

$$\sigma' + \frac{\partial \sigma'}{\partial x} \delta x. \quad (1.21)$$

Jeśli początkowe pole przekroju pręta oznaczone jest przez A_0 , to wypadkowa siła działająca na element w chwili t jest równa:

$$\left(\sigma' + \frac{\partial \sigma'}{\partial x} \delta x - \sigma' \right) A_0 = \frac{\partial \sigma'}{\partial x} \delta x A_0 \quad (1.22)$$

Oznaczmy przez M masę jednostki długości elementu pręta w chwili t . W chwili początkowej, $t = 0$, masa elementu pręta o długości jednostkowej wynosi $\rho_0 A_0$. Element ten w okresie t odkształcił się o ε , zatem z prawa zachowania masy mamy

$$M(1+\varepsilon) = \rho_0 A_0 \quad (1.23)$$

lub

$$M = \frac{\rho_0 A_0}{1 + \varepsilon}, \quad (1.24)$$

gdzie ρ_0 jest początkową gęstością materiału pręta, a ε oznacza wzdluzne odkształcenie pręta. Masa elementu pręta o długości δx wynosi:

$$M \delta x = \frac{\rho_0 A_0}{1 + \varepsilon} \delta x. \quad (1.25)$$

Jeśli prędkość elementu w chwili t jest V , to jego środek przemieści się w okresie δt o odcinek $V \delta t$. Prędkość środka w chwili $t + \delta t$ równa się:

$$V + V \delta t \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \delta t. \quad (1.26)$$

Zatem przyspieszenie wynosi:

$$\frac{\Delta V}{\delta t} = V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (1.27)$$

Dalej, zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona mamy:

$$\frac{\rho_0 A_0}{1 + \varepsilon} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) \delta x = A_0 \frac{\partial \sigma'}{\partial x} \delta x$$

lub

$$\frac{\rho_0}{1 + \varepsilon} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma'}{\partial x} = \frac{d\sigma'}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}. \quad (1.28)$$

Szybkość zmiany w funkcji czasu liniowej gęstości pręta M (1.24) można przyrównać do różnicy masy wchodzącej i masy opuszczającej element przestrzeni δx , tj.

$$\frac{\partial M}{\partial t} dt \delta x = V M dt - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} \delta x \right) \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} \delta x \right) dt.$$

Z zależności tej, po pominięciu małych wyższego rzędu, otrzymuje się

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -M \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (MV). \quad (1.29)$$

Kombinacja równań (1.24) i (1.29) daje ostateczną postać równania ciągłości (zachowania masy) dla pręta, a mianowicie:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = (1 + \varepsilon) \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (1.30)$$

Równania (1.28) i (1.30) są podobne do równań opisujących rozprzestrzenianie się płaskiej fali o skończonej amplitudzie w idealnej cieczy ściśliwej, które mają postać:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.32)$$

gdzie p i ρ odpowiednio oznaczają ciśnienie i bieżącą gęstość cieczy.

Równania (1.31) i (1.32) można przekształcić do postaci (1.28) i (1.30) za pomocą podstawienia:

$$\varepsilon = \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \quad \text{i} \quad \sigma' = -p. \quad (1.33)$$

Rzeczywiście, z relacji (1.33) wynika, że:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -\frac{\rho_0}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}, & \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= -\frac{\rho_0}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ (1 + \varepsilon) &= \frac{\rho_0}{\rho}, & \frac{\partial \sigma'}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu tych wyrażeń do równań (1.27) i (1.30), otrzymuje się zależności (1.31) i (1.32).

W dalszym ciągu rozważań założymy, że masowa prędkość cząstek pręta jest funkcją tylko odkształcenia, tj.

$$V = f(\varepsilon). \quad (1.34)$$

Wówczas równanie (1.28) można zapisać w postaci:

$$\frac{\rho_0}{1 + \varepsilon} \frac{df}{d\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) = \frac{d\sigma'}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad (1.35)$$

a z (1.30) otrzymuje się:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{df}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} (1 + \varepsilon). \quad (1.36)$$

Kombinacja równań (1.35) i (1.36) daje:

$$\left(\frac{df}{d\varepsilon} \right)^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma'}{d\varepsilon}. \quad (1.37)$$

W celu określenia prędkości $V = f(\varepsilon)$, należy scałkować wyrażenie (1.37). Zakładamy, że koniec pręta w chwili początkowej był w spoczynku i $\varepsilon = 0$. Wówczas z (1.37) otrzymuje się:

$$f(\varepsilon) = V = -\int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma'}{d\varepsilon} \right)^{1/2} d\varepsilon \quad (1.38)$$

Znak „-” wynika z faktu, że elementy pręta rozciągane przemieszczają się w kierunku przeciwnym do wzrostu współrzędnej x . Wyrażenie (1.38) jest analogiczne do wzoru (1.19) wyprowadzonego metodą Lagrange’a, albowiem $S = (d\sigma'/d\varepsilon)$.

Po podstawieniu pochodnej $df/d\varepsilon$ określonej z wzoru (1.37) do (1.36) i prostych przekształceniach mamy:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \left[V + (1 + \varepsilon) \left(\frac{S}{\rho_0} \right)^{1/2} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$$

lub

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (c + V) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0, \quad (1.39)$$

gdzie

$$c = (1 + \varepsilon) \left(\frac{S}{\rho_0} \right)^{1/2}. \quad (1.40)$$

Jeśli $(c+V)=\text{const}$, to z równania (1.39) wynika, że $(\partial\varepsilon/\partial t)=0$ i $(\partial\varepsilon/\partial x)=0$, czyli $\varepsilon = \text{const}$. Oznacza to, że w elementach pręta, które przemieszczają się w przestrzeni z prędkością $c+V$, odkształcenie ε , a tym samym i naprężenie σ są stałe. Rozwiązanie równania (1.39) można wówczas zapisać w postaci fali, a mianowicie:

$$\varepsilon = \varphi[x - (c + V)t]. \quad (1.41)$$

Dla większości metali wielkość $d\sigma'/d\varepsilon$ jest stała dla naprężeń poniżej granicy sprężystości Hook'a i maleje powyżej tej granicy. Dlatego większe odkształcenia rozprzestrzeniają się z prędkością mniejszą od prędkości fali sprężystej. W takim przypadku rozkład odkształceń trwałych w pręcie będzie podobny do pokazanego na rys.1.6. Natomiast jeśli pochodna $d\sigma'/d\varepsilon$ rośnie ze wzrostem odkształceń wówczas w ośrodku formuje się front fali uderzeniowej.

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2009-2010 jako projekt badawczy własny nr O N501 052937.

Literatura

- [1] Jakubowicz A., Orłoś Z., Wytrzymałość materiałów, Warszawa: WNT 1966.
- [2] Jeffrey A., Quasilinear hyperbolic systems and waves, London - San Francisco - Melbourne: Pitman Publishing 1976.
- [3] Kaliski S., Dźygadło Z., Solarz L., Włodarczyk E., Drgania i fale w ciałach stałych, Warszawa: PWN 1966.
- [4] Krzyżański M., Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, Cz. II, Warszawa, PWN 1962.
- [5] Nowacki W., Teoria sprężystości, Warszawa: PWN, 1970.
- [6] Olszak W., Perzyna P., Sawczak A., Teoria plastyczności, Warszawa: PWN 1965.
- [7] Prager W., Hodge P.G., Theory of perfectly plastic solids, New York: 1957.
- [8] Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А., Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках, Москва: Физ-мат-лит. 1961.
- [9] Tichonow A.N., Samarski A.A., Równania fizyki matematycznej, Warszawa: PWN 1963.